目　　录

第二部分 拟线性方程

第一章

引 论

概要

本书的主要目的是系统展开二阶拟线性椭圆型方程的一般理论以及为此而需要的线性理论. 这就意味着我们将要处理边值问题(首先是 Dirichlet 问题)的可解性以及与线性方程

$$(1.1)\qquad Lu\equiv a^{ij}(x)D_{ij}u+b^i(x)D_iu+c(x)u=f(x),\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

和拟线性方程

$$(1.2)\qquad Qu\equiv a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u+b(x,\ u,\ Du)=0$$

的解有关的一般性质, 这里 $Du=(D_1u,\ \cdots,\ D_nu)$, 其中 $D_iu=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, 等等, 而且求和约定是不讲自明的. 这些方程的椭圆性是通过下列事实来表明的, 即在各个变元的定义域中, 系数矩阵$[a^{ij}]$(在每种情形中)是正定的. 如果矩阵$[a^{ij}]$的最大特征值和最小特征值的比γ有界, 我们就把这个方程叫做一致椭圆型的. 我们将处理非一致和一致椭圆型方程.

线性椭圆型方程的古典原型当然是 Laplace 方程

$$\Delta u=\sum D_{ii}u=0$$

及其相应的非齐次方程, Poisson 方程$\Delta u=f$. 拟线性椭圆型方程最著名的例子可能就是在求最小面积问题中提出来的极小曲面方程

$$\sum D_i(D_iu/(1+|Du|^2)^{1/2})=0.$$

这个方程为非一致椭圆的, 因为$\gamma=1+|Du|^2$. 这些例子中的微分算子的性质促进了本书中讨论的一般类型方程的许多理论.

有关的线性理论在第2—8章(以及第11章的一部分)中展开. 虽然这些材料有其独立的兴趣, 这里把重点还是放在应用到非线

性问题上去所需要的那些方面．因此这个理论强调关于系数的弱的假定，从而放过了许多有关线性椭圆型方程的重要的古典和近代结果．

因为我们最终感兴趣的是方程(1.2)的古典解，在某些方面所需要的是相当大一类线性方程的古典解的一个基础理论．这是由第 6 章的 Schauder 理论提供的，对于具有 Hölder 连续系数的(1.1)类方程来说，Schauder 理论是一个本质上完备的理论．对古典解而言这类方程具有确定的存在性和正则性理论，而对于系数只假定是连续的那些方程，相应的结果就不再成立了．

研究古典解的一个自然的出发点是 Laplace 方程和 Poisson 方程的理论．这是第 2 章和第 4 章的内容．为预示以后的发展，具有连续边值的调和函数的 Dirichlet 问题是通过下调和函数*)的 Perron 方法来解决的．在论证中强调极大值原理以及研究边界行为时的闸函数概念，在后面的章节中都容易推广到更一般的情形中去．在第 4 章中我们从 Newton 位势的分析中推得了 Poisson 方程的基本的 Hölder 估计．第 4 章的主要结果是说(见定理 4.6, 4.8)：$\mathbb{R}^n$ 的区域 Ω 中 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 的所有 $C^2(\Omega)$ 解在任何子集 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 中满足一致估计

$$(1.3)\qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}')}\leqslant C\,(\sup_{\Omega}|u|+\|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}),$$

其中 C 是一个只依赖于 $\alpha(0<\alpha<1)$，维数 n 及 $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 的常数；(记号见 4.1 节)．对于取充分光滑边值的解，只要边界 $\partial\Omega$ 也充分光滑，就可以把这个内估计(因为 $\Omega'\subset\subset\Omega$，所以是内估计)延拓成为全局估计(global estimate)．在第 4 章中只对超平面和球面

*) 译者注：在本书中我们统一采用下述译名：

harmonic	调和
subharmonic	下调和
superharmonic	上调和
subsolution	下解
supersolution	上解
subfunction	下函数
superfunction	上函数

边界建立了直到边界的估计，但就以后的应用来说这些就够了.

线性二阶椭圆型方程古典解理论的最高峰是在 Schauder 理论中达到的，这个理论以修改过的而且发展了的形式在第 6 章中展开. 本质上说，这个理论是把位势理论的结果推广到具有 Hölder 连续系数的方程类(1.1)中去. 它是通过一个简单然而基本的方法来完成的，这个方法是：在单个点上固定首项系数的值，得到一个常系数方程，把原方程局部地看作是这个常系数方程的扰动. 基于上面提到的 Poisson 方程的估计进行仔细的计算就得出(1.1)的任何 $C^{2,\alpha}$ 解的同一不等式(1.3)，其中常数 C 现在还依赖于系数的界和 Hölder 常数，此外还依赖于系数矩阵$[a^{ij}]$在 Ω 中的最大和最小特征值. 这些结果被叙述为以加权内部范数表示的内估计(定理 6.2)，而在边界数据充分光滑的情形，则被叙述为以全局范数表示的全局估计(定理 6.6). 这里我们遇到了先验估计这个重要而又要经常用到的概念；也就是说，对一类问题的所有可能的解都成立(以给定的数据表出)的一个估计，即使前提并不保证这样的解的存在性. 本书的主要部分就是专门用来建立各种问题的先验的界.

在第 6 章的一些应用中可以看到这些先验估计的重要性，其中包括用连续性的方法建立 Dirichlet 问题的可解性(定理 6.8)以及在适当的光滑性假定下证明 C^2 解的更高阶的正则性(定理 6.17, 6.19). 在这两种情形中这种估计对于某类解提供了必须的紧致性，由此就容易推出所要的结果.

我们评述一下第 6 章的另外几个特征，虽然它们对本书后面的发展说来并不需要，但却扩大了基本 Schauder 理论的范围. 在 6.5 节中我们看到对于连续边值问题以及适当广泛的一类区域，(1.1)的 Dirichlet 问题可解性的证明可以完全用内估计来完成，从而简化了理论的结构. 6.6 节的结果把 Dirichlet 问题的存在性理论推广到了某类非一致椭圆型方程. 这里我们看到边界的几何性质和在边界处的退化椭圆性之间的一些关系如何确定边值的连续性假定. 基于闸函数论证的这些方法预示着第 II 部分中非线

性方程的类似的(但更深入的)结果. 在6.7节中我们把(1.1)的理论推广到正则斜导数问题上去. 这个方法基本上是对早先处理Poisson方程的边界条件和Schauder理论(但是不用闸函数的论证)的外推.

在上述考虑中,特别是在存在性理论和闸函数论证中,算子L(当$c\leqslant 0$时)的极大值原理起着本质的作用. 这是二阶椭圆型方程的一个特别的特征,它简化并加强了二阶椭圆型方程的理论.关于极大值原理的基本事实,以及比较方法的例证性应用都包括在第3章中. 极大值原理提供了一般理论的最早和最简单的先验估计. 相当重要的是第4和第6章中所有的先验估计完全可以从基于极大值原理的比较论证中推得,而不用任何Newton位势或积分.

线性问题的另一种而且是更一般的不用位势理论的方法可以象第8章所讲的那样用基于广义解或弱解的Hilbert空间方法来得到. 更具体地说,设L'是由

$$L'u\equiv D_i(a^{ij}(x)D_ju+b^i(x)u)+c^i(x)D_iu+d(x)u$$

定义的主部是*散度形式*的二阶微分算子. 如果系数都充分光滑,则这个算子显然可归入第6章所讨论的类中. 但是,即使系数属于更广泛的函数类而且u只是弱可微的(在第7章的意义下),我们仍然能够在适当的函数类中定义$L'u=g$的弱解或广义解. 特别,如果系数a^{ij}, b^i, c^i在Ω中有界可测,而且g是Ω中的可积函数,如果$u\in W^{1,2}(\Omega)$(就象第7章中定义的那样)并且对一切检验函数$v\in C_0^1(\Omega)$有

$$(1.4)\qquad \int_\Omega[(a^{ij}D_ju+b^iu)D_iv-(c^iD_iu+du)v]\,dx=-\int_\Omega gv\,dx,$$

我们就把u叫做$L'u=g$在Ω中的弱解或广义解. 显然,如果系数和g都充分光滑并且$u\in C^2(\Omega)$,则u也是古典解.

现在我们也可以说广义Dirichlet问题

$$\text{在}\ \Omega\ \text{中}\ L'u=g,\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上}\ u=\varphi$$

的弱解u了: 如果u是满足$u-\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$的一个弱解,其中

$\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. 假定$[a^{ij}]$的最小特征值在 Ω 中有正下界，在弱的意义下

$$(1.5) \qquad D_i b^i + d \leqslant 0,$$

而且还有 $g \in L^2(\Omega)$，在定理 8.3 中我们发现广义 Dirichlet 问题有唯一解 $u \in W^{1,2}(\Omega)$. 条件(1.5)是与(1.1)中 $c \leqslant 0$ 相类似的条件，它保证了 $L'u \geqslant 0 (\leqslant 0)$ 的弱解的极大值原理(定理 8.1)，因此保证了广义 Dirichlet 问题解的唯一性. 然后，从算子 L' 的 Fredholm 二择一性质得出解的存在性(定理 8.6)，在 Hilbert 空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$中应用 Riesz 表示定理就证明了这定理.

第 8 章的主要部分是处理弱解的正则性. (1.4)中系数的附加的正则性蕴涵着解属于更高的 $W^{k,2}$ 空间(定理 8.8, 8.10). 如果系数充分正则，从第 7 章的 Sobolev 嵌入定理就得到弱解实际上就是古典解. 当边界数据充分光滑时，把内部正则性延拓到边界就得到这些解的全局正则性(定理 8.13, 8.14).

对于非线性理论，弱解的正则性理论和相应的逐点估计是基本的. 这些结果提供了非线性问题中典型的“依靠自己力量”(bootstrap)的论证的出发点. 简言之，这里的想法是从一个拟线性方程的弱解出发，把它们看成是把这些解代入到系数中去而得到的有关的线性方程的弱解，然后继续改进这些解的正则性. 重新从后来得到的解出发，重复这个过程，使进一步的正则性仍得到保证，如此等等. 直到原来的弱解最终被证明是适当光滑的. 这是较古老的变分问题的正则性证明的实质，它对这里介绍的非线性理论来说无疑也是本质的.

对于非线性理论说来，非常重要的弱解的 Hölder 估计在第 8 章中从基于 Moser 迭代技巧的 Harnack 不等式推导出来(定理 8.17, 8.18, 8.20, 8.24). 这些结果推广了 De Giorgi 的基本的 Hölder 先验估计，De Giorgi 的估计是多于两个自变量的拟线性方程理论的最早的突破. 论证是以从 (1.4) 中适当选取检验函数而导出的弱解 u 的积分估计为依据的. 在本书大多数估计的推导中检验函数的技巧是支配性的课题.

本书的第二部分大部分讲述拟线性方程的 Dirichlet 问题和有关的估计. 一部分结果是关于一般算子(1.2)的, 而其余的主要是应用到散度形式的算子

$$(1.6)\qquad Qu\equiv \operatorname{div}\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)+\mathbf{B}(x,\ u,\ Du)$$

的, 其中 $\mathbf{A}(x,\ z,\ p)$ 和 $\mathbf{B}(x,\ z,\ p)$ 分别是定义在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的向量和数量函数.

第 9 章把极大值原理和比较原理(类似于第 3 章中的结果)推广到拟线性方程的解和下解. 我们特别要提到 $Qu\geqslant 0(=0)$ 的解的先验界, 其中 Q 是一个散度形式的算子, 满足一些比椭圆性更一般的结构条件(定理 9.7).

第 10 章为下几章解 Dirichlet 问题提供了基本的框架. 我们主要处理古典解, 而方程可以是一致或非一致椭圆型的. 在适当一般的假定下, 具有光滑边界的区域 Ω 中 $Qu=0$ 的边值问题的任何全局光滑解 u, 可以看作对于任一 $\alpha\in(0,\ 1)$ 从 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 到 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 的紧致算子 T 的一个不动点 $u=Tu$. 在应用中, 对于任何的 $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, 由 Tu 定义的函数是把 u 代入 Q 的系数中而得到的线性问题的唯一解. 如果对于有关的连续方程族 $u=T(u;\ \sigma)$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, 其中 $T(u;1)=Tu$ 的解能在 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中建立一个先验的界, 那么, (在第 10 章中证明的) Leray-Schauder 不动点定理蕴涵着边值问题解的存在性(定理 10.4, 10.7). 对于广泛的一类 Dirichlet 问题, 这种先验界的建立是第 12—14 章的目标.

为了对可能的解 u 得到所需要的先验界, 一般的方法包括逐次估计 $\sup\limits_{\Omega}|u|$, $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$, $\sup\limits_{\Omega}|Du|$ 和 $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$ (对于某个 $\alpha>0$) 等四步. 每一步都事先假定了前一步的估计, 根据 Leray-Schauder 定理, 最后的关于 $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$ 的界完成了存在性的证明.

如同已经谈到的那样, 在第 9 章中讨论关于 $\sup\limits_{\Omega}|u|$ 的界. 在以后各章中这个界或者假定在假设中, 或者蕴涵在方程的性质中.

两个自变量的方程 (第 11 章) 在理论中占有特殊的地位. 部

分原因是因为对这种方程已经发展了有特色的方法，另一部分原因是因为两个自变量的某些结果对于多于两个自变量的方程是不成立的．拟保角映射的方法以及基于散度结构方程的论证（参看第10章）都可用到两个变量的方程上去，而且相对说来容易得到所要的 $C^{1,\alpha}$ 先验估计，从这个先验估计容易得到Dirichlet 问题的解．

特别有意思的是两个变量的一致椭圆型线性方程的解满足一个只依赖于椭圆性常数和系数的界，而不要任何正则性假定的$C^{1,\alpha}$ 先验估计（定理 11.4）．对于多于两个变量的方程来说，这样一种 $C^{1,\alpha}$ 估计，或者甚至在同样的一般条件下梯度界的存在性都是不知道的．二维理论的另一个特别的特征是对于任意的椭圆型方程

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0 \tag{1.7}$$

的解 u，存在一个先验的 C^1 界 $|Du|\leqslant K$，其中 u 在有界凸区域 Ω 的闭包上连续，而且在 $\partial\Omega$ 上取边值 φ，$\partial\Omega$ 满足常数为 K 的有界斜率（或三点）条件．这个古典的结果通常是根据鞍面的 Radó 定理来证明的，在引理 11.6 中给出了一个初等的证明．已经说过的梯度的界——这个界对于一般的拟线性方程 (1.7) 的所有解 u 成立，其中 $a=a(x, y, u, u_x, u_y)$ 等等，并且在 $\partial\Omega$ 上满足 $u=\varphi$——把这个 Dirichlet 问题化为定理 11.5 中讨论过的一致椭圆型方程的情形．在定理 11.7 中，假定了系数的局部 Hölder 连续性和边界数据的有界倾斜条件（对数据没有进一步的光滑性限制），我们就得到(1.7)的一般 Dirichlet 问题的解．

第 12，13 和 14 章讲述包含在上面叙述过的存在性方法中的梯度估计的推导．在第 12 章中我们证明 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva 关于拟线性椭圆型方程导数的 Hölder 估计的基本结果．在第 13 章中我们研究拟线性椭圆型方程的解在边界上的梯度估计．在考虑了一般的以及凸的区域后，我们叙述了 Serrin 的理论，它把广义边界曲率条件和 Dirichlet 问题的可解性联系起来了．特别是从第 10，12 和 13 章的结果能得出极小曲面方程的 Dirichlet 问题的可解性的 Jenkins 和 Serrin 判别准则，也就是说，

对于光滑区域以及任意的光滑边值，极小曲面方程是可解的当且仅当边界(关于内法向的)平均曲率在每一点非负(定理 13. 14).

在第14章中建立了拟线性方程解 u 的梯度界的全局和内部估计. 遵循 Bernstein 的老方法的一个改进,我们对一类方程——既包括满足自然增长条件的一致椭圆型方程，也包括与规定平均曲率的方程有共同结构性质的方程,我们推导了用 $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$ 表示的 $\sup\limits_{\Omega}|Du|$ 的估计(定理 14.2). 对于限制更多的一类方程，我们方法的一个变种给出了内部梯度估计(定理 14.3). 我们还考虑了散度形式的一致和非一致椭圆型方程(定理 14.4, 14.5 和 14.6),在这些情形中，通过适当的检验函数的论证，我们推得了与一般情形相比是不同类型的系数条件下的梯度估计. 我们选择了一些用来说明理论的范围的存在定理来结束第 14 章. 这些定理都是通过应用第 9, 13 和 14 章的先验估计的各种组合，并且适当选择可以应用定理 10.8 的一族问题而得到的.

在第 15 章中我们集中于规定平均曲率的方程，并导出梯度的内估计 (定理 15.5)，从而使我们能够对只假定连续边值的 Dirichlet 问题导出存在性定理 (定理 15.8, 15.10). 我们还考虑了一组两个变量的方程，在某种意义下这组方程和规定平均曲率的方程的关系与第 11 章中一致椭圆型方程和 Laplace 方程的关系是一样的. 确实,借助于拟保角映射的一个推广了的概念,我们导出了一阶和二阶导数的内估计. 二阶导数的估计对极小曲面方程的解提供了熟知的 Heinz 曲率估计的一个推广 (定理 15.20)，而且蕴涵着 Bernstein 的著名结果的一个推广(推论 15.19)，Bernstein 的结果是: 两个变量的极小曲面方程的整函数解必定是线性函数. 然而,定理 15.5 和 15.20 的显著的特征或许是下列方法，与其在区域 Ω 中讨论问题，不如在由解 u 的图象给出的超曲面 S 上讨论问题，并且去发掘在切线梯度和 S 上的 Laplace 算子以及 S 的平均曲率之间的各种关系.

我们对读者提出某些指导来结束本概要. 本书的材料不是按

严格的逻辑次序安排的．因此在正规情形下 Poisson 方程的理论（第 4 章）应该跟在 Laplace 方程（第 2 章）的后面．但是由于极大值原理的结果是很基本的而且为了使读者有早一点碰到某些变系数的一般问题的机会，所以把这些内容插在第二章之后．事实上，直到第 6 章的存在性理论时，才用到一般的极大值原理．基本的泛函分析材料（第 5 章）对于 Schauder 理论来说只在少数几点上是需要的：除了证明定理 6.15 中的 Fredholm 二择一性质外，只要压缩映象原理和 Banach 空间的基本概念就够了．为了在第二部分中应用到非线性问题中去，只要知道第 6 章 1—3 节的结果就够了．如果读者有兴趣，直接从第 8 章的 L^2 理论开始学习线性理论更好些；这要假定有泛函分析（第 5 章）和弱可微函数计算（第 7 章）方面的初步知识．第 8 章正则性理论中的 Harnack 不等式和 Hölder 估计直到第 12 章才有应用．

两个变量的拟线性方程的理论（第 11 章）本质上是独立于第 7—10 章的，只要假定 Schauder 不动点定理（定理 10.1），它就可以接着第 6 章来念．拟保角映射的方法在第 15 章中再次碰到，但在其它方面，余下的章节是不依赖于第 11 章的．因此在第 10 章中有了非线性理论的基本轮廓以后，读者可以直接读第 12—15 章的 n 个变量的理论．第 15 章大部分是与第 12—14 章独立的．

进一步的附注

除了假定基本的实分析和线性代数以外，本书的材料几乎完全是自封的．因而，位势理论和泛函分析的很多初步结论，以及关于 Sobolev 空间和不动点定理的结果，对许多读者说来将是熟悉的，虽然在定理 10.6 中不用拓扑度的 Leray-Schauder 定理的证明很可能不是众所周知的．为了完整起见还证明了许多建立得很好的辅助结果，诸如第 6 章的内插不等式和延拓引理．

本书与 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva [LU4] 和 Morrey [MY5] 的专著有相当大的重迭．本书在某些分析技巧以及在非线性理论中强调非一致椭圆型方程方面与 [LU4] 不同．不同于 [MY5] 的是本书不直接涉及变分问题和变分方法．本书还包含了自那两本书

出版以来所发展的材料. 另一方面,在许多方面受到更多的限制. 没有包括方程组, 非 Dirichlet 边界条件的非线性问题、单调算子理论以及基于几何测度理论方面的课题.

在一些常常完全是技术性的问题上我们永远不去追求最大的一般性,特别是关于连续模、估计、积分条件等等方面. 我们把自己限于由幂函数决定的条件: 例如, Hölder 连续性而不是 Dini 连续性, 在第 8 章中是 L^p 空间而不是 Orlicz 空间, 是用 $|p|$ 的幂表示的结构条件而不是更一般的 $|p|$ 的函数, 等等. 适当修改一下证明,读者通常都能作出适当的推广.

历史材料和参考文献主要在每章的末尾的评注中讨论. 这不是为了完整而是为了补充正文以及更好地看待正文. 更为详尽的文献的述评, 至少到 1968 年为止, 包括在 Miranda[MR2] 中. 每章附加的习题也是为了补充正文; 希望这些对于读者将是有用的练习.

基本记号

$\mathbb{R}^n$: n 维 Euclid 空间, $n\geqslant 2$, 其点为 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $x_i\in\mathbb{R}$(实数); $|x|=(\sum x_i^2)^{1/2}$; 若 $\mathbf{b}=(b_1, \cdots, b_n)$是一个有序 n 重数, 则 $|\mathbf{b}|=(\sum b_i^2)^{1/2}$.

$\mathbb{R}_+^n$: $\mathbb{R}^n$ 中的半空间 $=\{x\in\mathbb{R}^n | x_n>0\}$.

∂S: 点集 S 的边界; $\bar{S}=S$ 的闭包 $=S\cup\partial S$.

$S-S'$: $\{x\in S | x\notin S'\}$.

$S'\subset\subset S$: $S'\subset S$ 而且 $\operatorname{dist}(S', \partial S)>0$; S' 严格包含在 S 中.

Ω: $\mathbb{R}^n$ 的一个真开子集, 不必有界; Ω 是一个区域, 如果它还是连通的; $|\Omega|=\Omega$ 的体积.

$B(y)$: $\mathbb{R}^n$ 中中心在 y 的球; $B_r(y)$是中心在 y、半径为 r 的开球.

ω_n: $\mathbb{R}^n$ 中的单位球的体积 $=\dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$.

$D_iu=\partial u/\partial x_i$, $D_{ij}u=\partial^2u/\partial x_i\partial x_j$, 等等; $Du=(D_1u, \cdots, Du_n)=u$ 的梯度; $D^2u=[D_{ij}u]=$ 二阶导数 $D_{ij}u$ 构成的矩阵, $i, j=1, 2,$

$\cdots, n$.

$\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, $\beta_i=$整数$\geqslant 0$, $|\beta|=\sum\beta_i$, 是一个多重指标; 我们定义

$$D^\beta u=\frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}.$$

$C^0(\Omega)$ $(C^0(\overline{\Omega}))$: $\Omega(\overline{\Omega})$上的连续函数构成的集合.

$C^k(\Omega)$: 由Ω中具有所有$\leqslant k$阶连续导数的函数构成的集合($k=$整数$\geqslant 0$或$k=\infty$).

$C^k(\overline{\Omega})$: $C^k(\Omega)$中具有所有$\leqslant k$阶导数可以连续延拓到$\overline{\Omega}$上去的函数构成的集合.

$\operatorname{supp} u$: u的支集, $u\neq 0$的集合的闭包.

$C_0^k(\Omega)$: $C^k(\Omega)$中的在Ω中具有紧支集的函数集合.

$C=C(*, \cdots, *)$表示只依赖于出现在括号中的量的常数. 在给定的上下文中, 同一个字母C(一般地)将用来表示依赖于同一组变量的不同的常数.

第一部分

线性方程

第二章

Laplace 方程

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，u 是 $C^2(\Omega)$ 函数，u 的 Laplacian 用 Δu 表示，定义为

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n} D_{ii}u=\operatorname{div}Du. \tag{2.1}$$

如果函数 u 在 Ω 中满足

$$\Delta u=0 \quad (\geqslant 0,\ \leqslant 0), \tag{2.2}$$

则称 u 在 Ω 中调和（下调和，上调和）. 在本章中我们推导调和、下调和与上调和函数的某些基本性质，我们用它去研究 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的古典 Dirichlet 问题的可解性. 正如第 1 章中所提到的，Laplace 方程和它的非齐次形式 Poisson 方程是线性椭圆型方程的基本模型.

这里我们的出发点是 $\mathbb{R}^n$ 中熟知的散度定理. 设 Ω_0 是一个具有 C^1 边界 $\partial\Omega_0$ 的有界区域，并设 $\boldsymbol{\nu}$ 表示 $\partial\Omega_0$ 的单位外法向. 于是，对 $C^0(\overline{\Omega}_0)\cap C^1(\Omega_0)$ 中的任一向量场 $\mathbf{w}$，我们有

$$\int_{\Omega_0}\operatorname{div}\mathbf{w}\,dx=\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds, \tag{2.3}$$

其中 ds 表示 $\partial\Omega_0$ 中的 $(n-1)$ 维面积元素. 特别，如果 u 是 $C^1(\overline{\Omega}_0)\cap C^2(\Omega_0)$ 函数，在 (2.3) 中取 $\mathbf{w}=Du$，我们就有

$$\int_{\Omega_0}\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega_0}Du\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds=\int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds. \tag{2.4}$$

（对于散度定理的更一般的阐述，请参看 [KE2].）

2.1. 平均值不等式

我们第一个定理是恒等式 (2.4) 的一个推论，它包括熟知的调和、下调和及上调和函数的平均值性质.

定理 2.1 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $\Delta u=0(\geqslant 0,\ \leqslant 0)$. 则对任何一个球 $B=B_R(y)\subset\Omega$, 有

$$u(y)=(\leqslant,\ \geqslant)\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B}u\,ds, \tag{2.5}$$

$$u(y)=(\leqslant,\ \geqslant)\frac{1}{\omega_n R^n}\int_B u\,dx. \tag{2.6}$$

于是，对于调和函数，定理 2.1 断言在球 B 中心的函数值等于展布在曲面 ∂B 和 B 本身上的两个积分平均值. 这些结果通称平均值定理，实际上也刻划了调和函数的特征；(见定理 2.7).

定理 2.1 的证明 设 $\rho\in(0,\ R)$, 把恒等式 (2.4) 应用到球 $B_\rho=B_\rho(y)$ 上. 得到

$$\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds=\int_{B_\rho}\Delta u\,dx=(\geqslant,\ \leqslant)0.$$

引进径向和角度坐标 $r=|x-y|$, $\omega=\dfrac{x-y}{r}$, 并记 $u(x)=u(y+r\omega)$, 我们就有

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds&=\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial r}(y+\rho\omega)\,ds=\rho^{n-1}\int_{|\omega|=1}\frac{\partial u}{\partial r}(y+\rho\omega)d\omega\\&=\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{|\omega|=1}u(y+\rho\omega)d\omega=\rho^{1-n}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{n-1}\int_{\partial B_\rho}u\,ds\right]\\&=(\geqslant,\ \leqslant)0.\end{aligned}$$

所以对任一 $\rho\in(0,\ R)$,

$$\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u\,ds=(\leqslant,\ \geqslant)R^{1-n}\int_{\partial B_R}u\,ds.$$

又因
$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u\,ds=n\omega_n u(y),$$

由此得出关系式(2.5). 为了得到立体的平均值不等式，亦即关系式(2.6)，我们把(2.5)写成如下形式：

$$n\omega_n\rho^{n-1}u(y)=(\leqslant,\ \geqslant)\int_{\partial B_\rho}u\,d\rho,\ \rho\leqslant R,$$

关于 ρ 从 0 到 R 积分，立刻得出关系式(2.6). ∎

2.2. 极大值和极小值原理

借助于定理 2.1, 对于下调和函数可以导出强极大值原理, 而对于上调和函数, 可以导出强极小值原理.

定理 2.2 设在 Ω 中 $\Delta u \geqslant 0\ (\leqslant 0)$, 并设存在一点 $y \in \Omega$, 使得 $u(y) = \sup_{\Omega} u\ (\inf_{\Omega} u)$. 则 u 是常数. 因而一个调和函数不能有内部极大值或极小值, 除非它是常数.

证明 设在 Ω 中 $\Delta u \geqslant 0$, $M = \sup_{\Omega} u$ 并定义

$$\Omega_M = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}.$$

由假设 Ω_M 非空. 进而因为 u 连续, 故 Ω_M 相对于 Ω 是闭的. 设 z 是 Ω_M 中任一点, 在球 $B = B_R(z) \subset\subset \Omega$ 中对下调和函数 $u-M$ 应用平均值不等式(2.6). 因此得到

$$0 = u(z) - M \leqslant \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B (u - M)\, dx \leqslant 0,$$

于是在 $B_R(z)$ 中 $u = M$. 所以 Ω_M 相对于 Ω 也是开的. 因此 $\Omega_M = \Omega$. 用 $-u$ 代替 u 就得到上调和函数的结果. ▌

强极大值和极小值原理直接蕴涵全局的估计, 亦即下面的弱极大值和极小值原理.

定理 2.3 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, 在 Ω 中 $\Delta u \geqslant 0\ (\leqslant 0)$. 假设 Ω 有界, 则

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u). \tag{2.7}$$

因此, 对于调和函数 u,

$$\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u, \quad x \in \Omega.$$

现在从定理 2.3 推出有界区域中 Laplace 方程和 Poisson 方程的古典 Dirichlet 问题的唯一性定理.

定理 2.4 设 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $\Delta u = \Delta v$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = v$. 则在 Ω 中 $u = v$.

证明 设 $w = u - v$. 则在 Ω 中 $\Delta w = 0$, 并在 $\partial\Omega$ 上 $w = 0$. 从定理 2.3 就得到在 Ω 中 $w = 0$. ▌

注意由定理 2.3 我们还得到: 如果 u 和 v 分别是调和与下调

和函数，在边界 $\partial\Omega$ 上相同，则在 Ω 中 $v\leqslant u$. 因此，有下调和这个术语. 对于上调和函数，相应的附注也是正确的. 在本章的稍后，我们使用 $C^2(\Omega)$ 下调和及上调和函数的这个性质把它们的定义扩充到更大一类函数上去. 在下章，当我们对一般椭圆型方程讨论极大值原理时，将提供定理 2.2、2.3 和 2.4 的另一证明方法；(也可参看习题 2.1).

2.3. Harnack 不等式

定理 2.1 的一个进一步的推论是调和函数的下述 Harnack 不等式.

定理 2.5 设 u 是 Ω 中一个非负调和函数. 则对任一有界子域 $\Omega'\subset\subset\Omega$，存在一个只依赖于 n, Ω' 和 Ω 的常数 C, 使得

$$\sup_{\Omega'} u\leqslant C\inf_{\Omega'} u. \tag{2.8}$$

证明 设 $y\in\Omega$, $B_{4R}(y)\subset\Omega$. 则对任二点 x_1, $x_2\in B_R(y)$, 由不等式(2.6)我们有

$$u(x_1)=\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B_R(x_1)} u\,dx\leqslant\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B_{2R}(y)} u\,dx,$$

$$u(x_2)=\frac{1}{\omega_n (3R)^n}\int_{B_{3R}(x_2)} u\,dx\geqslant\frac{1}{\omega_n (3R)^n}\int_{B_{2R}(y)} u\,dx.$$

所以得到

$$\sup_{B_R(y)} u\leqslant 3^n\inf_{B_R(y)} u. \tag{2.9}$$

现在设 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 并选 x_1, $x_2\in\overline{\Omega}'$ 使得 $u(x_1)=\sup_{\Omega'} u$, $u(x_2)=\inf_{\Omega'} u$. 设 $\Gamma\subset\Omega'$ 是连接 x_1 和 x_2 的闭弧，选 R 使得 $4R<\operatorname{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$. 由 Heine-Borel 定理，$\Gamma$ 能被有限的 N (仅依赖于 Ω' 和 Ω) 个半径为 R 的球所覆盖. 在每个球中应用估计 (2.9). 并合并所得的不等式，就得到

$$u(x_1)\leqslant 3^{nN}u(x_2).$$

因此估计(2.8)成立，其中 $C=3^{nN}$. ∎

注意 (2.8) 中的常数是相似正交变换下的不变量. 齐次椭圆

型方程弱解的 Harnack 不等式将在第 8 章中建立.

2.4. Green 表示

作为存在性考虑的序幕，我们来导出散度定理的进一步的推论，即 Green 恒等式. 设 Ω 是一个区域，对于它，散度定理成立，并设 u 和 v 是 $C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 函数. 我们在恒等式 (2.3) 中选 $\mathbf{w}=vDu$ 就得到 Green 第一恒等式:

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx+\int_\Omega Du\cdot Dv\,dx=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds. \tag{2.10}$$

在(2.10)中交换 u 和 v 并且相减，我们得到 Green 第二恒等式:

$$\int_\Omega (v\Delta u-u\Delta v)\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds. \tag{2.11}$$

Laplace 方程当 $n>2$ 时有轴对称的解 r^{2-n}，而当 $n=2$ 时有轴对称的解 $\log r$，r 是与一固定点的径向距离. 从(2.11)继续推导，我们在 Ω 中固定一点 y 并引进 Laplace 方程的正规化的基本解:

$$\Gamma(x-y)=\Gamma(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n>2,\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n=2.\end{cases} \tag{2.12}$$

经过简单计算我们有

$$\begin{aligned}D_i\Gamma(x-y)&=\frac{1}{n\omega_n}(x_i-y_i)\,|x-y|^{-n};\\ D_{ij}\Gamma(x-y)&=\frac{1}{n\omega_n}\{|x-y|^2\delta_{ij}-n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\}\\ &\quad\times|x-y|^{-n-2}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

显然，对于 $x\neq y$，Γ 是调和的. 为了后面的目的，我们指出下面的导数估计:

$$\begin{aligned}|D_i\Gamma(x-y)|&\leqslant\frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n};\\ |D_{ij}\Gamma(x-y)|&\leqslant\frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

在 $x=y$ 处的奇性妨碍我们使用 Γ 来代替 Green 第二恒等式

(2.11) 中的 v，克服这个困难的一个方法是用 $\Omega-B_\rho$ 代替 Ω，这里，对充分小的 ρ，$B_\rho=B_\rho(y)$. 于是能够从 (2.11) 得出

$$\int_{\Omega-B_\rho}\Gamma\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)ds+\int_{\partial B_\rho}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)ds. \tag{2.15}$$

现在 $\displaystyle\int_{\partial B_\rho}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}ds=\Gamma(\rho)\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\nu}ds$

$$\leqslant n\omega_n\rho^{n-1}\Gamma(\rho)\sup_{B_\rho}|Du|\to 0,\ \text{当}\ \rho\to 0\ \text{时};$$

$$\int_{\partial B_\rho}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}ds=-\Gamma'(\rho)\int_{\partial B_\rho}u\,ds\quad(\text{回忆}\ \nu\ \text{是}\ \Omega-B_\rho\ \text{的外法向})$$

$$=\frac{-1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}u\,ds\to -u(y),\ \text{当}\ \rho\to 0\ \text{时}.$$

因此，在 (2.15) 中令 ρ 趋于零，就得到 Green 表示公式：

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)-\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)ds+\int_\Omega\Gamma(x-y)\Delta u\,dx,\quad(y\in\Omega). \tag{2.16}$$

对于有界可积函数 f，积分 $\int_\Omega\Gamma(x-y)f(x)dx$ 称为具有密度 f 的 Newton 位势. 如果 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中具有紧支集，则 (2.16) 得出经常有用的表示公式

$$u(y)=\int\Gamma(x-y)\Delta u(x)dx. \tag{2.17}$$

对于调和函数 u，我们也得到表示

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)-\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)ds,\ (y\in\Omega). \tag{2.18}$$

因为上面的被积函数无穷次可微，并且事实上还关于 y 解析，由此推出 u 在 Ω 中也解析. 这样一来，调和函数在它的定义域中到处是解析的，因此由它在任一开子集中的值所唯一确定.

现在假设 $h\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $\Delta h=0$，那么再一次用 Green 第二恒等式 (2.11)，就得到

$$(2.19)\qquad -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial h}{\partial\nu}-h\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)ds=\int_{\Omega}h\Delta u\,dx.$$

记 $G=\Gamma+h$，并把(2.16)与(2.19)相加，于是得到关于 Green 表示公式的一个更一般的形式：

$$(2.20)\qquad u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G}{\partial\nu}-G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)ds+\int_{\Omega}G\Delta u\,dx.$$

如果此外在 $\partial\Omega$ 上 $G=0$，我们有

$$(2.21)\qquad u(y)=\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial G}{\partial\nu}ds+\int_{\Omega}G\Delta u\,dx,$$

并且把函数 $G=G(x, y)$ 叫做区域 Ω 的(Dirichlet)Green 函数，有时也叫做 Ω 的第一类 Green 函数．按照定理 2.4，Green 函数是唯一的，而从公式(2.21)，它的存在性蕴涵着 $C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 调和函数的一个表示，用它的边值表出．

2.5. Poisson 积分

当区域 Ω 是一个球时，Green 函数能够通过象法显式地确定，并且导出有名的球中调和函数的 Poisson 积分表示．即，设 $B_R=B_R(0)$ 并且对于 $x\in B_R$, $x\neq 0$ 设

$$(2.22)\qquad \bar{x}=\frac{R^2}{|x|^2}x$$

表示它关于 B_R 的反演点；如果 $x=0$，取 $\bar{x}=\infty$．于是容易证实 B_R 的 Green 函数由下式给出：

$$(2.23)\qquad G(x, y)=\begin{cases}\Gamma(|x-y|)-\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right), & y\neq 0,\\ \Gamma(|x|)-\Gamma(R), & y=0.\end{cases}$$

$$=\Gamma\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2x\cdot y}\right)-\Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x|\,|y|}{R}\right)^2+R^2-2x\cdot y}\right)$$

对所有 $x, y\in B_R$, $x\neq y$.

由(2.23)定义的函数 G 具有性质：

$$(2.24)\qquad G(x, y)=G(y, x),\ G(x, y)\leqslant 0,\ x, y\in\overline{B}_R.$$

而且，直接计算表明，在 $x\in\partial B_R$ 处，G 的法向导数为

$$(2.25)\qquad \frac{\partial G}{\partial \nu}=\frac{\partial G}{\partial |x|}=\frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}|x-y|^{-n}\geqslant 0.$$

因此，如果 $u\in C^2(B_R)\cap C^1(\overline{B}_R)$ 调和，由(2.11)就有 Poisson 积分公式：

$$(2.26)\qquad u(y)=\frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B_R}\frac{u\,ds}{|x-y|^n}.$$

公式(2.26)的右端叫做 u 的 Poisson 积分．一个简单的逼近论证表明，Poisson 积分公式对于 $u\in C^2(B_R)\cap C^0(\overline{B}_R)$ 仍然成立．注意取 $y=0$，就重新得到调和函数的平均值定理．实际上本章中所有前面的定理都能够作为 $\Omega=B_R(0)$ 时的表示式 (2.21) 的推论而导出．

为了建立球的古典 Dirichlet 问题解的存在性，我们需要表示式(2.26)的逆结果，现在就证明它．

定理 2.6 设 $B=B_R(0)$，并设 φ 是 ∂B 上的连续函数．那么由

$$(2.27)\qquad u(x)=\begin{cases}\dfrac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\displaystyle\int_{\partial B}\frac{\varphi(y)\,ds}{|x-y|^n}, & x\in B,\\ \varphi(x), & x\in\partial B\end{cases}$$

定义的函数 u 属于 $C^2(B)\cap C^0(\overline{B})$，并在 B 中满足 $\Delta u=0$.

证明 由(2.27)定义的 u 在 B 中调和是显然的，这是根据这样的事实：G，因而 $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}$，关于 x 是调和的，或者它可以用直接计算来证实．为了建立 u 在 ∂B 上的连续性，我们对特殊情形 $u=1$ 使用 Poisson 公式(2.26)来求得恒等式

$$(2.28)\qquad \int_{\partial B}K(x,y)\,ds=1 \quad \text{对所有 } x\in B,$$

其中 K 是 Poisson 核：

$$(2.29)\qquad K(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n};\quad x\in B,\ y\in\partial B.$$

当然，(2.28)中的积分能够直接求值，但这是一个复杂的计算．现在设 $x_0\in\partial B$，并设 ε 是一个任意正数．选 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$，并设在 ∂B 上 $|\varphi|\leqslant M$. 于是，如果 $|x-x_0|<$

$\delta/2$, 由(2.27)和(2.28)就有

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(x_0)| &= \left|\int_{\partial B} K(x,\ y)(\varphi(y)-\varphi(x_0))\,ds_y\right| \\
&\leqslant \int_{|y-x_0|<\delta} K(x,\ y)\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\,ds_y \\
&\quad + \int_{|y-x_0|>\delta} K(x,\ y)\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\,ds_y \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{2M(R^2-|x|^2)R^{n-2}}{(\delta/2)^n}.
\end{aligned}
$$

现在如果$|x-x_0|$充分小，显然有$|u(x)-u(x_0)|<2\varepsilon$，因此$u$就在$x_0$连续，所以$u\in C^0(\overline{B})$正如所需.]

我们指出前面的论证是局部的；即，如果φ在∂B上仅仅是有界可积的，而在x_0是连续的，那么当$x\to x_0$时$u(x)\to\varphi(x_0)$.

2.6. 收敛性定理

现在考虑 Poisson 积分公式的一些直接推论. 不过，下面三个定理对于后面的讨论并不是必需的. 我们首先证明调和函数实际上能够用它的平均值性质来表征.

定理 2.7 一个$C^0(\Omega)$函数u是调和的，当且仅当对每一个球$B=B_R(y)\subset\subset\Omega$，它满足平均值性质，

$$
u(y)=\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B} u\,ds. \tag{2.30}
$$

证明 由定理 2.6，对任何一个球$B\subset\subset\Omega$，存在一个调和函数h，使得在∂B上$h=u$. 于是差$w=u-h$是在B的任何球上满足平均值性质的一个函数，所以定理 2.2, 2.3 和 2.4 的极大值原理和唯一性结果可以应用于w，因为平均值不等式是在这些定理的推导中所用到的调和函数的唯一的性质. 因此在B中$w=0$，所以u在Ω中必是调和函数.]

作为前面定理的直接推论，我们有

定理 2.8 调和函数的一致收敛序列的极限是调和的.

从定理 2.8 可见，如果$\{u_n\}$在有界区域Ω中是一个调和函数

序列，具有在 $\partial\Omega$ 上一致收敛到一个函数 φ 的连续边值$\{\varphi_n\}$，那么序列 $\{u_n\}$（由极大值原理）一致收敛到一个在 $\partial\Omega$ 上具有边值 φ 的调和函数. 借助于 Harnack 不等式（定理 2.5），我们也能够从定理 2.8 导出 Harnack 收敛定理.

定理 2.9 设 $\{u_n\}$ 在区域 Ω 中是一个单调增加的调和函数序列，并设对某点 $y\in\Omega$，序列$\{u_n(y)\}$有界. 那么序列在任一有界子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 上一致收敛到一个调和函数.

证明 序列$\{u_n(y)\}$收敛，于是对任意 $\varepsilon>0$，存在一个数 N，使得对所有 $m\geqslant n>N$，有 $0\leqslant u_m(y)-u_n(y)<\varepsilon$. 但是由定理 2.5，我们必须有

$$\sup_{\Omega'}|u_m(x)-u_n(x)|<C\varepsilon,$$

其中 C 是依赖于 Ω' 和 Ω 的某常数. 从而$\{u_n\}$一致收敛并且由于定理 2.8，极限函数是调和的. ∎

2.7. 导数的内估计

将 Poisson 积分直接微分可以求得调和函数的导数的内估计. 另外，这样的估计也可以从平均值定理得到. 设 u 在 Ω 中调和并且 $B=B_R(y)\subset\subset\Omega$. 因为梯度 Du 在 Ω 中也调和，由平均值和散度定理得到

$$Du(y)=\frac{1}{\omega_nR^n}\int_B Du\,dx=\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{\partial B}u\nu\,ds,$$

$$|Du(y)|\leqslant\frac{n}{R}\sup_{\partial B}|u|,$$

因此

$$|Du(y)|\leqslant\frac{n}{d_y}\sup_{\Omega}|u|, \tag{2.31}$$

其中 $d_y=\mathrm{dist}(y,\partial\Omega)$. 在等距离地分隔开的球套中逐次应用估计(2.31)就得到高阶导数的估计.

定理 2.10 设 u 在 Ω 中调和，并设 Ω' 是 Ω 的任一紧子集. 则对任一多重指标 α，我们有

(2.32)
$$\sup_{\Omega'}|D^\alpha u| \leqslant \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega}|u|,$$
其中 $d=\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

界(2.32)的一个直接推论是：对于调和函数的任一有界集合，它们的导数在一个紧子区域上等度连续．所以由 Arzela 定理我们知道调和函数的任一有界集合形成一个*正规族*；即，我们有

定理 2.11 在区域 Ω 上任一有界的调和函数序列包含一个在 Ω 的紧子区域上一致收敛于调和函数的子序列．

以前的收敛定理(定理 2.8)，也能够从定理 **2.11** 直接得到．

2.8. Dirichlet 问题；下调和函数方法

我们现在能够处理任意有界区域中古典 Dirichlet 问题的解的存在性问题了．这里的讨论是用*下调和函数的* Perron *方法* [PE] 来完成的，它极大地依赖于极大值原理与球中 Dirichlet 问题的可解性．这个方法具有许多引人注目的特色：它是初等的，它把内部存在问题与解的边界性质分离开来，并且很容易推广到更一般类型的二阶椭圆型方程上去．另外还有熟知的达到存在定理的途径，诸如：(例如在书 [KE2] [GU] 中讨论的)积分方程方法，以及变分方法或者 Hilbert 空间的方法，我们将在第 8 章中以更一般的方式来叙述它．

$C^2(\Omega)$ 下调和与上调和函数的定义可推广如下．一个 $C^0(\Omega)$ 函数 u 称为在 Ω 中是*下调和*(*上调和*)的，如果对每一个球 $B\subset\subset\Omega$ 和每一个在 B 中调和的函数 h，在 ∂B 上满足 $u\leqslant(\geqslant)h$，在 B 中我们也有 $u\leqslant(\geqslant)h$．不难建立 $C^0(\Omega)$ 下调和函数的下述性质：

(i) 如果 u 在区域 Ω 中下调和，则它在 Ω 中满足强极大值原理；又如果 v 在一个有界区域 Ω 中上调和，并在 $\partial\Omega$ 上 $v\geqslant u$，则或者在 Ω 上到处有 $v>u$，或者 $v\equiv u$．为证明后一断言，假设相反的情形，则在某一个点 $x_0\in\Omega$ 上有
$$(u-v)(x_0)=\sup_{\Omega}(u-v)=M\geqslant 0,$$

并且我们可以假设存在一个球 $B=B(x_0)$，使得在 ∂B 上 $u-v\not\equiv M$. 设 $\bar{u}$、$\bar{v}$ 分别表示在 ∂B 上等于 u、v 的调和函数(定理 2.6). 容易看出

$$M\geqslant\sup_{\partial B}(\bar{u}-\bar{v})\geqslant(\bar{u}-\bar{v})(x_0)\geqslant(u-v)(x_0)=M.$$

因此等式到处成立. 由调和函数的强极大值原理 (定理 2.2), 得到在 B 中 $\bar{u}-\bar{v}\equiv M$, 因此在 ∂B 上 $u-v\equiv M$, 它与 B 的选取矛盾

(ii) 设 u 在 Ω 中下调和, B 是严格包含在 Ω 中的一个球. 用 $\bar{u}$ 表示在 ∂B 上满足 $\bar{u}=u$ 的 B 中的调和函数 (由 u 在 ∂B 上的 Poisson 积分给出). 我们在 Ω 中用

$$U(x)=\begin{cases}\bar{u}(x) & x\in B,\\ u(x) & x\in\Omega-B\end{cases}\tag{2.33}$$

定义 u(在 B 中)的调和提升. 那么函数 U 也在 Ω 中下调和. 因为考虑一个任意球 $B'\subset\subset\Omega$, 设 h 在 B' 中是一个调和函数, 在 $\partial B'$ 上满足 $h\geqslant U$. 因为在 B' 中 $u\leqslant U$, 故在 B' 中就有 $u\leqslant h$, 因此在 $B'-B$ 中 $U\leqslant h$, 又因为 U' 在 B 中调和, 由极大值原理可得在 $B\cap B'$ 中 $U\leqslant h$. 所以在 B' 中 $U\leqslant h$, 并且 U 在 Ω 中下调和.

(iii) 设 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 在 Ω 中都是下调和函数. 则函数 $u(x)=\max\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_N(x)\}$ 也在 Ω 中下调和. 这是下调和定义的一个平凡的推论. 对于上调和函数的相应结果可在性质 (i), (ii) 和 (iii) 中用 $-u$ 代替 u 而得到.

现在设 Ω 有界, φ 在 $\partial\Omega$ 上是一个有界函数. 一个 $C^0(\bar{\Omega})$ 下调和函数 u, 如果它在 $\partial\Omega$ 上满足 $u\leqslant\varphi$, 就称为相对于 φ 的下函数. 类似地, 一个 $C^0(\bar{\Omega})$ 上调和函数 u, 如果它在 $\partial\Omega$ 上满足 $u\geqslant\varphi$, 就称为相对于 φ 的上函数. 由极大值原理, 每一个下函数小于或等于每一个上函数. 特别, 常数函数 $\leqslant\inf_{\partial\Omega}\varphi$ ($\geqslant\sup_{\partial\Omega}\varphi$) 是下函数(上函数). 设 S_φ 表示相对于 φ 的下函数集合. Perron 方法的基本结果包含在下面的定理中.

定理 2.12 函数 $u(x)=\sup_{v\in S_\varphi}v(x)$ 在 Ω 中调和.

证明 由极大值原理，任一函数 $v\in S_\varphi$ 满足 $v\leqslant\sup\varphi$，这样的 u 有明确定义．设 y 是 Ω 中的一个任意固定的点．由 u 的定义知，存在一个序列 $\{v_n\}\subset S_\varphi$ 使得 $v_n(y)\to u(y)$．用 $\max(v_n, \inf\varphi)$ 代替 v_n，我们可以假设序列 $\{v_n\}$ 有界．现在选择 R 使得球 $B=B_R(y)\subset\subset\Omega$，并按照(2.33)定义 V_n 是 v_n 在 B 中的调和提升．那么 $V_n\in S_\varphi$，$V_n(y)\to u(y)$ 并且由定理 2.11，序列 $\{V_n\}$ 包含一个子序列 $\{V_{n_i}\}$，它在任一球 $B_\rho(y)$ $(\rho<R)$ 中一致收敛到一个在 B 中调和的函数 v．显然在 B 中 $v\leqslant u$ 并且 $v(y)=u(y)$．现在我们断定实际上在 B 中 $v=u$．因为假设在某一点 $z\in B$ 上 $v(z)<u(z)$，那么存在一个函数 $\bar{u}\in S_\varphi$，使得 $v(z)<\bar{u}(z)$．定义 $w_k=\max(\bar{u}, v_{n_k})$，并且也由(2.33)定义调和提升 W_k，如前我们得到序列 $\{W_k\}$ 的一个子序列收敛到一个调和函数 w，在 B 中满足 $v\leqslant w\leqslant u$，并且 $v(y)=w(y)=v(y)$．但是由极大值原理，在 B 中必有 $v=w$．这与 $\bar{u}$ 的定义相矛盾，因此 u 在 Ω 中调和．】

前面结果给出一个调和函数，它是古典 Dirichlet 问题：$\Delta u=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\rho$ 的一个可能解(prospective solution)(称为 Perron 解)．的确，如果 Dirichlet 问题是可解的，它的解就与 Perron 解恒等，因为设 w 是假定的解，那么显然 $w\in S_\varphi$，由极大值原理，对所有的 $u\in S_\varphi$ 就有 $w\geqslant u$．这里我们还要指出：代替紧致性定理(定理 2.11)，定理 2.12 的证明能够以 Harnack 收敛定理(定理 2.9)作为基础；(见习题 2.10)．

在 Perron 方法中，对解的边界性质的研究本质上是和存在性问题分开的．边值的连续假设通过闸函数的概念与边界的几何性质联系起来．设 ξ 是 $\partial\Omega$ 的一点．那么一个 $C^0(\bar{\Omega})$ 函数 $w=w\xi$ 称为相对于 Ω 的在 ξ 的一个闸函数，如果：

(i) w 在 Ω 中是上调和的；

(ii) 在 $\bar{\Omega}-\xi$ 中 $w>0$；$w(\xi)=0$．

闸函数概念的一个重要特征在于它是边界 $\partial\Omega$ 的一个局部性质．亦即，我们定义 w 是 $\xi\in\partial\Omega$ 处的一个*局部闸函数*，如果存在 ξ 的一个邻域 N，使得 w 在 $\Omega\cap N$ 中满足上面的定义．于是相对

于 Ω 的在 ξ 的一个闸函数能够定义如下：设 B 是一个满足 $\xi\in B\subset\subset N$ 的球，并且 $m=\inf_{N-B} w>0$. 于是函数

$$\bar{w}(x)=\begin{cases}\min(m,\ w(x)), & x\in\bar{\Omega}\cap B,\\ m, & x\in\bar{\Omega}-B\end{cases}$$

就是一个相对于 Ω 的在 ξ 的闸函数，这通过验证性质(i)和(ii)不难看出. 事实上，由下调和函数的性质(iii)知 $\bar{w}$ 在 $\bar{\Omega}$ 中是连续的，并且在 Ω 中是上调和的；性质(ii)可直接得出.

在一个边界点上如果存在闸函数，该点就称为**正则点**(关于 Laplace 算子).

闸函数和解的边界性质之间的联系包含在下面引理中.

引理 2.13 设 u 是 Ω 中用 Perron 方法(定理 2.12)定义的调和函数. 如果 ξ 是 Ω 的一个正则边界点，并且 φ 在 ξ 连续，那么当 $x\to\xi$ 时，$u(x)\to\varphi(\xi)$.

证明 选 $\varepsilon>0$，并设 $M=\sup|\varphi|$. 因为 ξ 是一个正则边界点，于是在 ξ 存在一个闸函数 w，而由于 φ 连续，所以存在常数 δ 和 k，使得如果 $|x-\xi|<\delta$，就有 $|\varphi(x)-\varphi(\xi)|<\varepsilon$，而如果 $|x-\xi|\geqslant\delta$，就有 $kw(x)\geqslant 2M$. 函数 $\varphi(\xi)+\varepsilon+kw$, $\varphi(\xi)-\varepsilon-kw$ 分别是相对于 φ 的下函数和上函数. 因此从 u 的定义和每一个上函数控制每一个下函数的事实，我们在 Ω 中得到

$$\varphi(\xi)-\varepsilon-kw(x)\leqslant u(x)\leqslant\varphi(\xi)+\varepsilon+kw(x)$$

或
$$|u(x)-\varphi(\xi)|\leqslant\varepsilon+kw(x).$$

因为当 $x\to\xi$ 时 $w(x)\to 0$，我们得到当 $x\to\xi$ 时 $u(x)\to\varphi(\xi)$. ∎

这直接导致

定理 2.14 在一个有界区域中古典 Dirichlet 问题对任意连续边值是可解的，当且仅当边界点全是正则点.

证明 如果边值 φ 是连续的并且边界 $\partial\Omega$ 由正则点组成，则前面的引理说明，由 Perron 方法提供的调和函数是 Dirichlet 问题的解. 反之，假设 Dirichlet 问题对所有连续边值是可解的. 设 $\xi\in\partial\Omega$，则函数 $\varphi(x)=|x-\xi|$ 在 $\partial\Omega$ 上连续，并且解出具有边值 φ



的在 Ω 中的 Dirichlet 问题的这一调和函数，显然在 ξ 处是一个闸函数．因此 ξ 是正则点，$\partial\Omega$ 的所有点都是如此．▌

留下的重要问题是：对于什么样的区域，边界点是正则的？原来能够通过边界的局部几何性质来叙述一般的充分条件．我们在下面讲述某些这样的条件．

如果 $n=2$，考虑有界区域 Ω 的一个边界点 z_0，并取原点在 z_0 的极坐标 r，θ．假设有 z_0 的一个邻域 N 使得在 $\Omega\cap N$ 中定义了 θ 的一个单值分支，或者在 $\Omega\cap N$ 的组成部分中在它的边界上有 z_0．可以看出，

$$w=-\mathrm{Re}\frac{1}{\log z}=-\frac{\log r}{\log^2 r+\theta^2}$$

在 z_0 是一个局部闸函数，因此 z_0 是一个正则点．特别，如果 z_0 是位于 Ω 外部的一个简单弧的端点，它就是一个正则边界点．这样一来，在平面上一个(有界)区域(它的边界点都是可以从外部用简单弧达到的)中，对于连续边值的 Dirichlet 问题总是可解的．更一般地，同样的闸函数表明，如果区域的补集的每个组成部分包含多于一点，则边值问题也是可解的．这种区域的例子是由有限个简单闭曲线所围成的区域．另外的例子是沿着一条弧有裂缝的单位圆域；在这种情形下，边界值能够在裂缝的相对两侧上被指定．

对于高维来说，情况有本质的不同，Dirichlet 问题在对应的一般性条件下是不能解的．例如，一个属于 Lebesgue 的例子表明，在三维空间中一个带有充分尖锐的向内尖点的闭曲面在尖点的尖端有非正则点(例如参看[CH])．

在有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中可解性的一个简单的充分条件是 Ω 满足外部球条件；即，对每一点 $\xi\in\partial\Omega$，存在一个球 $B=B_R(y)$ 满足 $\overline{B}\cap\overline{\Omega}=\xi$．如果这样的条件满足，那么由

$$w(x)=\begin{cases}R^{2-n}-|x-y|^{2-n}, & n\geq 3,\\ \log\dfrac{|x-y|}{R}, & n=2\end{cases}\tag{2.34}$$

给出的函数 w 是在 ξ 的一个闸函数．所以具有 C^2 边界的区域的

边界点都是正则点；（见习题 2.11）.

我们用关于 Perron 方法的一些评注来结束本章. 这个方法显然具有重大简单性和一般性的优点，可是它是非构造性的，对边界的正则性只给出较少的信息. 它也不能推广到其它的边值问题或缺少极大值原理的方程上去，诸如高阶方程. 然而它却能够广泛地应用. 检查定理 2.12 的证明表明：每当下面条件满足时这方法总能够被应用：(i) 极大值原理对于两个解的差成立；(ii) Dirichlet 问题在适当小的区域上对于连续边值可解；(iii) 解的有界族是紧的. 这些条件在很多包含二阶椭圆型及抛物型方程的文章中盛行，这样就使得 Perron 方法在这些更一般情形下能够应用.

习　题

2.1. 从相对极大值必要条件的考虑来导出 $C^2(\Omega)$ 下调和函数的弱极大值原理.

2.2. 证明：如果在 Ω 中 $\Delta u=0$，并且在 $\partial\Omega$ 的一个开的光滑部分上 $u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0$，那么 u 恒等于零.

2.3. 设 G 对于有界区域 Ω 是 Green 函数，证明

a) $G(x, y)=G(y, x)$ 对所有的 $x, y\in\Omega$, $x\neq y$ 成立；

b) $G(x, y)<0$ 对所有的 $x, y\in\Omega$, $x\neq y$ 成立；

c) 如果 f 在 Ω 上有界可积，则当 $x\to\partial\Omega$ 时 $\int_\Omega G(x, y)f(y)dy\to 0$.

2.4. (Schwarz 反射原理) 设 Ω^+ 是半空间 $x_n>0$ 的一个子区域，它以超平面 $x_n=0$ 的一个开的截面 T 作为它的边界的一部分. 假设 u 在 Ω^+ 中调和，在 $\Omega^+\cup T$ 中连续，并且在 T 上 $u=0$. 证明由

$$U(x_1, \cdots, x_n)=\begin{cases} u(x_1, \cdots, x_n) & x_n\geqslant 0, \\ -u(x_1, \cdots, x_n) & x_n<0 \end{cases}$$

定义的函数 U 在区域 $\Omega^+\cup T\cup\Omega^-$ 中调和，其中 Ω^- 是 Ω^+ 在 $x_n=0$ 上的反射(即，$\Omega^-=\{(x_1, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n \mid (x_1, \cdots, -x_n)\in\Omega^+\}$).

2.5. 对于在 $\mathbf{R}^n$ 中由两个同心球面所围成的环形区域，求 Green 函数.

2.6. 设 u 在球 $B_R(0)$ 中是一个非负调和函数. 从 Poisson 积分公式推导 Harnack 不等式的下述形式：

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0)\leqslant u(x)\leqslant\frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

2.7. 证明一个 $C^0(\Omega)$ 函数 u 在 Ω 中下调和当且仅当它满足局部平均值不等式; 即, 对每一个 $y\in\Omega$, 存在 $\delta=\delta(y)>0$, 使得对所有的 $R\leqslant\delta$,

$$u(y)\leqslant\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R(y)}u\,ds.$$

2.8. 区域 Ω 中的一个可积函数称为在 Ω 中**弱调和** (**弱下调和**、**弱上调和**), 如果

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx=(\geqslant,\ \leqslant)0$$

对于 $C^2(\Omega)$ 中在 Ω 中有紧支集的所有函数 $\varphi\geqslant0$ 成立. 证明: 一个 $C^0(\Omega)$ 弱调和(弱下调和、弱上调和)函数必是调和(下调和、上调和)函数.

2.9. 证明对于 $C^2(\Omega)$ 函数 u, 以下条件等价: (i)在 Ω 中 $\Delta u\geqslant0$; (ii)u 在 Ω 中下调和; (iii)u 在 Ω 中弱下调和.

2.10. 用定理 2.9 代替定理 2.11 来证明定理 2.12.

2.11. 证明具有 C^2 边界 $\partial\Omega$ 的区域 Ω 满足一致外部球条件.

2.12. 证明对于满足**外部锥条件**的任何区域 Ω, Dirichlet 问题可解; 即, 对每一点 $\xi\in\partial\Omega$, 存在一个有限正圆锥 K, 其顶点 ξ 满足 $\overline{K}\cap\overline{\Omega}=\xi$. 把每点 $\xi\in\partial\Omega$ 取做原点, 证明能够选取形式为 $w=r^\lambda f(\theta)$ 的适当的局部闸函数, 其中 θ 是极角.

2.13. 设 u 在 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中调和, 使用导出(2.31)的论证来证明内部梯度的界

$$|Du(x_0)|\leqslant\frac{n}{d_0}[\sup_\Omega u-u(x_0)],\ d_0=\mathrm{dist}(x_0,\ \partial\Omega).$$

如果在 Ω 中 $u\geqslant0$, 试推断

$$|Du(x_0)|\leqslant\frac{n}{d_0}u(x_0).$$

2.14. (a) 证明 Liouville **定理**: 在 $\mathbf{R}^n$ 上定义并且上有界的调和函数是常数.

(b) 如果 $n=2$, 证明(a)中的 Liouville 定理对于下调和函数有效.

(c) 如果 $n>2$, 证明在 $\mathbf{R}^n$ 上定义的一个有界下调和函数不一定是常数.

第三章

古典极大值原理

本章目的是把第二章导出的 Laplace 算子的古典极大值原理推广到形如

(3.1) $$Lu=a^{ij}(x)D_{ij}u+b^i(x)D_iu+c(x)u,\quad a^{ij}=a^{ji},$$

的线性椭圆型微分算子上去，其中 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 属于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域 Ω, $n\geqslant 2$. 除非另外声明，否则我们总假设 u 属于 $C^2(\Omega)$. 这里求和约定是遵循着重复指标指示从 1 到 n 的求和，并且到处都如此. L 总是表示算子(3.1).

我们采用下面的定义：

如果系数矩阵$[a^{ij}(x)]$正定，L 在点 $x\in\Omega$ 就是椭圆的；即，如果用 $\lambda(x)$、$\Lambda(x)$ 分别表示$[a^{ij}(x)]$的最小和最大特征值，那么

(3.2) $$0<\lambda(x)\,|\xi|^2\leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda(x)\,|\xi|^2$$

对于所有的 $\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ 成立. 如果在 Ω 中$\lambda>0$, 那么 L 在 Ω 中就是椭圆的，如果对于某常数 λ_0 有 $\lambda\geqslant\lambda_0>0$, L 在 Ω 中就是严格椭圆的. 如果 $\dfrac{\Lambda}{\lambda}$ 在 Ω 中有界，我们称 L 在 Ω 中是一致椭圆的. 这样，算子 $D_{11}+x_1D_{22}$ 在半平面 $x_1>0$ 中是椭圆的但不是一致椭圆的，但是在条形$(\alpha,\ \beta)\times\mathbb{R}$ 中(这里 $0<\alpha<\beta<\infty$)它是一致椭圆的.

有关形为(3.1)的椭圆算子的大多数结果需要附加条件，来限制低阶项 b^iD_iu, cu 关于主项 $a^{ij}D_{ij}u$ 的相对重要性. 在本章中到处假设有条件

(3.3) $$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)}\leqslant\text{常数}<\infty,\ i=1,\ \cdots,\ n,\ x\in\Omega.$$

于是考虑用 $L'=\lambda^{-1}L$ 代替 L, 就能够化归到 $\lambda=1$ 并且 b^i 有界的情形. 此外，如果 L 是一致椭圆的，我们也能取 a^{ij} 有界. 注意，如

果系数 a^{ij}, b^i 在 Ω 中连续，那么在任一有界子区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 上，L 是一致椭圆的并且(3.3)成立. 系数 c 也要服从一些限制，但是这些将是变化的，因此在一些适当的假设中再去指出.

极大值原理是二阶椭圆型方程的一个重要特性，它把这类方程与高阶方程及方程组区别开来. 除了它们的很多应用外，极大值原理还提供了逐点估计，它导出比另外可用的理论更为确定的理论. 本章中大多数的结果单单基于 L 的椭圆性，并不基于系数的其它特别的性质(诸如光滑性). 正是这个一般性使得极大值原理在解的先验估计中，特别是在非线性问题中，是很有用的.

3.1. 弱极大值原理

对于很多目的来说，有下面的弱极大值原理就足够了.

定理3.1 设 L 在有界区域 Ω 中是椭圆的. 假设

(3.4) 在 Ω 中，$Lu \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$； 在 Ω 中，$c=0$，

其中 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. 则 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值(最小值)在 $\partial\Omega$ 上达到，即

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right). \tag{3.5}$$

如果 $|b^i|/\lambda$ 在 Ω 中仅局部有界，例如 a^{ij}, $b^i \in C^0(\Omega)$，显然这个结果仍然正确. 还有，如果不假定 u 在 $\bar{\Omega}$ 中连续，结果(3.5)能够换成

$$\sup_{\Omega} u = \limsup_{x \to \partial\Omega} u(x) \left(\inf_{\Omega} u = \liminf_{x \to \partial\Omega} u(x)\right). \tag{3.6}$$

证明 不难看出，如果在 Ω 中 $Lu > 0$，那么强极大值原理成立；即，u 不能在 $\bar{\Omega}$ 中达到内部最大值. 因为在这样的点 x_0 上，$Du(x_0)=0$，并且矩阵 $D^2u(x_0)=[D_{ij}u(x_0)]$ 非正. 但是因为 L 是椭圆的，所以矩阵 $[a^{ij}(x_0)]$ 正定. 因此 $Lu(x_0)=a^{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leqslant 0$，这与 $Lu>0$ 矛盾.（注意在这个论证中仅需要系数矩阵 $[a_{ij}]$ 的半定性.）

由假设(3.3)，$|b^i|/\lambda \leqslant b_0=$常数. 于是因为 $a^{11} \geqslant \lambda$，有一个充分大常数 γ 使得

$$Le^{\gamma x_1}=(\gamma^2a^{11}+\gamma b^1)e^{\gamma x_1}\geqslant\lambda(\gamma^2-\gamma b_0)e^{\gamma x_1}>0.$$

因此，对任何 $\varepsilon>0$, 在 Ω 中 $L(u+\varepsilon e^{\gamma x_1})>0$, 按照上面就有

$$\sup_{\Omega}(u+\varepsilon e^{\gamma x_1})=\sup_{\partial\Omega}(u+\varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

令 $\varepsilon\to 0$, 我们看到，正如定理断言的，$\sup_{\Omega}u=\sup_{\partial\Omega}u$. ∎

附注 从这个证明显然可得：在系数矩阵$[a^{ij}]$非负并且对某个 k, 比$|b^k|/a^{kk}$局部有界的较弱假设下，定理也成立.

引进下面由极大值原理所提示的术语是方便的：在 Ω 中满足 $Lu=0(\geqslant 0,\ \leqslant 0)$ 的函数是 $Lu=0$ 在 Ω 中的解（下解、上解）. 当 L 是 Laplace 算子时，这些术语分别对应于调和、下调和及上调和函数.

更一般地我们假设在 Ω 中 $c\leqslant 0$. 考虑子集 $\Omega^+\subset\Omega$, 在其中 $u>0$, 可以看出如果在 Ω 中 $Lu\geqslant 0$, 那么在 Ω^+ 中 $L_0u=a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu\geqslant -cu\geqslant 0$, 因此 u 在 $\overline{\Omega}^+$ 上的最大值必在 $\partial\overline{\Omega}^+$ 上达到，因此也就在 $\partial\Omega$ 上达到. 于是，记 $u^+=\max(u,0)$, $u^-=\min(u,0)$, 我们得到：

推论 3.2 设 L 在有界区域 Ω 中是椭圆的. 假设在 Ω 中

$$Lu\geqslant 0(\leqslant 0),\quad c\leqslant 0, \tag{3.7}$$

其中 $u\in C^0(\overline{\Omega})$. 那么

$$\sup_{\Omega}u\leqslant\sup_{\partial\Omega}u^+\ (\inf_{\Omega}u\geqslant\inf_{\partial\Omega}u^-). \tag{3.8}$$

如果在 Ω 中 $Lu=0$, 那么

$$\sup_{\Omega}|u|=\sup_{\partial\Omega}|u|. \tag{3.9}$$

在这个推论中，条件 $c\leqslant 0$ 一般不能放松到允许 $c>0$. 这是显然的，因为问题：$\Delta u+\varkappa u=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$, 存在正特征值 $\varkappa$. 弱极大值原理的一个直接而重要的应用是问题的唯一性和解对它的边值的连续依赖性. 从推论 3.2 自动地推出对于算子 L 的古典 Dirichlet 问题的唯一性结果.

定理 3.3 设 L 在 Ω 中是椭圆的，在 Ω 中 $c\leqslant 0$. 假设 u 和

v 是 $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 函数，在 Ω 中满足 $Lu=Lv$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=v$. 那么在 Ω 中 $u=v$.

3.2. 强极大值原理

虽然弱极大值原理对大多数应用来说已足够了，但是，有一个强的，排除了非平凡内部最大值假设的极大值原理常常是必要的. 我们将使用下面经常有用的边界点引理来对于局部一致椭圆型算子得到这一结果. 区域 Ω 称为在 $x_0\in\partial\Omega$ 满足内部球条件，如果存在一个球 $B\subset\Omega$，使 $x_0\in\partial B$（即，Ω 的补集在 x_0 点满足外部球条件）.

引理 3.4 假设 L 在 Ω 中是一致椭圆的，$c=0$ 并且 $Lu\geqslant 0$. 设 $x_0\in\partial\Omega$ 使得

(i) u 在 x_0 连续；

(ii) 对所有的 $x\in\Omega$，$u(x_0)>u(x)$；

(iii) $\partial\Omega$ 在 x_0 满足内部球条件.

那么 u 在 x_0 的外法向导数如果存在，必满足严格的不等式

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)>0. \tag{3.10}$$

如果 $c\leqslant 0$ 并且 c/λ 有界，只要 $u(x_0)\geqslant 0$，则同样的结果成立.

证明 因为在 x_0 处 Ω 满足内部球条件，故存在一个球 $B=B_R(y)\subset\Omega$，使 $x_0\in\partial B$. 对 $0<\rho<R$，我们引进由下式定义的一个辅助函数：

$$v(x)=e^{-\alpha r^2}-e^{-\alpha R^2},$$

其中 $r=|x-y|>\rho$，而 α 是一个待定的正常数. 直接计算得

$$\begin{aligned}Lv(x)&=e^{-\alpha r^2}[4\alpha^2a^{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)-2\alpha(a^{ii}+b^i(x_i-y_i))]+cv\\&\geqslant e^{-\alpha r^2}[4\alpha^2\lambda(x)r^2-2\alpha(a^{ii}+|\mathbf{b}|r)+c],\ \mathbf{b}=(b^1,\cdots,b^n).\end{aligned}$$

由假设 a^{ii}/λ，$|\mathbf{b}|/\lambda$ 和 c/λ 是有界的. 因此可选 α 足够大使得 $Lv\geqslant 0$ 在环形区域 $A=B_R(y)-B_\rho(y)$ 上到处成立. 因为在 $\partial B_\rho(y)$ 上 $u-u(x_0)<0$，故存在常数 $\varepsilon>0$，使得在 $\partial B_\rho(y)$ 上 $u-u(x_0)+\varepsilon v\leqslant 0$. 这个不等式也在 $\partial B_R(y)$ 上满足（这里 $v=0$）. 这

样，在 A 中就有 $L(u-u(x_0)+\varepsilon v)\geqslant -cu(x_0)\geqslant 0$，并且在 ∂A 上 $u-u(x_0)+\varepsilon v\leqslant 0$. 现在弱极大值原理（推论 3.2）蕴涵 $u-u(x_0)+\varepsilon v\leqslant 0$ 在 A 到处成立. 在 x_0 取法向导数，我们就得到所要的

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)\geqslant -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)=-\varepsilon v(R)>0. \quad]$$

更一般地，无论法向导数是否存在，我们得到

$$\liminf_{x\to x_0}\frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|}>0, \tag{3.11}$$

其中，对某个固定的 $\delta>0$，向量 x_0-x 与 x_0 处法线之间的夹角小于 $\pi/2-\delta$.

虽然内部球条件能够被稍稍放松，可是 $\partial\Omega$ 在 x_0 没有适当的光滑性是不可能断定(3.11)的. 例如，设 $L=\Delta$ 并且 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的第一象限；于是在 Ω 中对于 $u(x)=-x_1x_2$，我们有 $u<0$, $u(0)=0$，并且 $\Delta u=0$，但是 $\lim\limits_{x\to 0}u(x)/|x|=0$，所以(3.11)不成立.

我们现在能够推导下面的 E. Hopf[HO1]的**强极大值原理**.

定理 3.5 设 L 在区域 Ω（不必有界）中是一致椭圆的，$c=0$ 并且 $Lu\geqslant 0(\leqslant 0)$. 那么，如果 u 在 Ω 内部达到它的最大值（最小值），u 就是常数. 如果 $c\leqslant 0$ 并且 c/λ 有界，那么除非它是常数，否则 u 在 Ω 内部不能达到非负最大值（非正最小值）.

如果 L 仅是局部一致椭圆的并且 $|b^i|/\lambda$, c/λ 仅是局部有界的，这个结论显然保持有效.

证明 如果我们假设，与定理相反，u 不是常数并且它的最大值 $M\geqslant 0$ 在 Ω 的内部达到，那么 $u<M$ 的集合 Ω^- 满足 $\Omega^-\subset\Omega$ 及 $\partial\Omega^-\cap\Omega\neq\emptyset$. 设 x_0 是 Ω^- 中的一点，它到 $\partial\Omega^-$ 比到 $\partial\Omega$ 更近. 考虑以 x_0 为心的最大的球 $B\subset\Omega^-$. 于是对某一点 $y\in\partial B$ 有 $u(y)=M$，而在 B 内 $u<M$. 由前面引理推出 $Du(y)\neq 0$，这在内部最大值点 y 上是不可能的.]

如果在某点 $c<0$，那么定理的常数显然为零.

不用定理 3.1 和引理 3.4 而直接去证明强极大值原理当然是可能的（例如看[MR2]）.

另外类型的边值问题的唯一性定理是引理 3.4 和定理 3.5 的推论，特别，对于古典 Neumann 问题，我们有下面的唯一性定理.

定理 3.6 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 是 $Lu=0$ 在有界区域 Ω 中的一个解，其中 L 是一致椭圆的，$c\leqslant 0$，c/λ 有界并且 Ω 在 $\partial\Omega$ 的每一点上满足内部球条件. 如果在 $\partial\Omega$ 上处处定义了法向导数并且在 $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0$，那么 u 在 Ω 中是常数. 如果在 Ω 中某点上还有 $c<0$，那么 $u\equiv 0$.

证明 如果 $u\neq$ 常数，我们可以假设函数 u 或者 $-u$ 在 $\partial\Omega$ 的一点 x_0 上达到一个非负最大值 M，并且在 Ω 内部小于 M（根据强极大值原理）. 在 x_0 应用引理 3.4，我们就推出 $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)\neq 0$，与假设矛盾.]

定理 3.6 的结果也可以推广到混合边值和斜导数问题；（见习题 3.1）. 当 $\partial\Omega$ 有隅角或棱线时，在那里 u 的导数没有定义，即使假设 u 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，这些结果在所说的一般性之下也是不真的；（见习题 3.8(a)）.

3.3. 先验的界

极大值原理也为有界区域中的非齐次方程 $Lu=f$ 的解提供了一个简单的逐点估计. 我们要指出，只有椭圆性常数和系数的界被包含在内. 这成为在非线性问题中的一个重要的考虑.

定理 3.7 设在有界区域 Ω 中 $Lu\geqslant f(=f)$，其中 L 是椭圆的，$c\leqslant 0$，并且 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. 那么

$$(3.12)\qquad \sup_{\Omega} u(|u|)\leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+(|u|)+C\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda}\left(\frac{|f|}{\lambda}\right),$$

其中 C 是一个仅依赖于 Ω 的直径和 $\beta=\sup|\mathbf{b}|/\lambda$ 的常数. 特别，如果 Ω 位于二个相距 d 的平行平面之间，那么 (3.12) 成立，其中 $C=e^{(\beta+1)d}-1$.

证明 设 Ω 位于板形区域 $0<x_1<d$ 中，并令 $L_0=a^{ij}D_{ij}+$

b^iD_i. 对于 $\alpha\geqslant\beta+1$，我们有

$$L_0e^{\alpha x_1}=(\alpha^2a^{11}+\alpha b^1)e^{\alpha x_1}\geqslant\lambda(\alpha^2-\alpha\beta)e^{\alpha x_1}\geqslant\lambda.$$

设
$$v=\sup_{\Omega}u^+ + (e^{\alpha d}-e^{\alpha x_1})\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda}.$$

于是，因为 $Lv=L_0v+cv\leqslant-\lambda\sup_{\Omega}(|f|/\lambda)$，

$$L(v-u)\leqslant-\lambda\left(\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda}+\frac{f}{\lambda}\right)\leqslant 0\quad(\text{在 }\Omega\text{ 中}),$$

并且在 $\partial\Omega$ 上 $v-u\geqslant 0$。因此，对于 $C=e^{\alpha d}-1$ 和 $\alpha\geqslant\beta+1$，对 $Lu\geqslant f$ 的情况我们得到所要的结果，

$$\sup_{\Omega}u\leqslant\sup_{\Omega}v=\sup_{\partial\Omega}u^+ + C\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda}.$$

用 $-u$ 代替 u，即得到 $Lu=f$ 情形的(3.12)。 ∎

当条件 $c\leqslant 0$ 不满足时，只要区域 Ω 充分窄小，仍然可能断言一个类似于(3.12)的先验的界。

推论 3.8 设在有界区域 Ω 中 $Lu=f$，其中 L 是椭圆的，$u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$。设 C 是定理 3.7 的常数，并设

$$C_1=1-C\sup_{\Omega}\frac{c^+}{\lambda}>0,\tag{3.13}$$

那么

$$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\frac{1}{C_1}\left(\sup_{\partial\Omega}|u|+C\sup_{\Omega}\frac{|f|}{\lambda}\right).\tag{3.14}$$

附注 因为 $C=e^{(\beta+1)d}-1$ 是(3.12)中常数的一个可能的值，其中 d 是包含 Ω 的任一板形区域的宽度，故条件(3.13)在任一充分窄小的区域中将被满足，在这个区域中量 $|\mathbf{b}|/\lambda$ 和 c/λ 上有界。如果 $c^+\equiv 0$（即 $c\leqslant 0$），那么 $C_1=1$ 而(3.14)变成(3.12)。

推论 3.8 的证明 把 $Lu=(L_0+c)u=f$ 改写为形式

$$(L_0+c^-)u=f'\equiv f+(c^- - c)u=f-c^+u.$$

从(3.12)得到

$$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|u|+C\sup\frac{|f'|}{\lambda}$$
$$\leqslant\sup_{\partial\Omega}|u|+C\left(\sup_{\Omega}\frac{|f|}{\lambda}+\sup_{\Omega}|u|\sup_{\Omega}\frac{c^+}{\lambda}\right).$$

这个不等式和(3.13)蕴涵(3.14). ▮

推论 3.8 的一个直接推论是在充分小区域中 Dirichlet 问题解的唯一性(当然假定量$|\mathbf{b}|/\lambda$ 和 c/λ 有固定上界).

3.4. Poisson 方程的梯度估计

只要对方程附加上一些条件，极大值原理还能用来导出解的导数的估计. 为了说明方法，我们对 Poisson 方程来求这种估计. 这里导出的结果对于较后的发展并不需要.

设在立方体 $Q=\{x=(x_1, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n \mid |x_i|<d,\ i=1, \cdots, n\}$ 中 $\Delta u=f$, $u\in C^2(Q)\cap C^0(\bar{Q})$, 并且 f 在 Q 中有界. 使用比较论证,我们将导出估计

$$(3.15)\qquad |D_i u(0)|\leqslant\frac{n}{d}\sup_{\partial Q}|u|+\frac{d}{2}\sup_{Q}|f|,\ i=1, \cdots, n.$$

在半立方体

$$Q'=\{(x_1, \cdots, x_n) \mid |x_i|<d,\quad i=1, \cdots, n-1,\ 0<x_n<d\}$$

中考虑函数 $\varphi(x', x_n)=\frac{1}{2}[u(x', x_n)-u(x', -x_n)]$,

其中 $x'=(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 和 $x=(x', x_n)$. 可以看出 $\varphi(x', 0)=0$, $\sup_{\partial Q'}|\varphi|\leqslant M=\sup_{\partial Q}|u|$, 并且在 Q' 中 $|\Delta\varphi|\leqslant N=\sup_{Q}|f|$. 再考虑函数

$$\psi(x', x_n)=\frac{M}{d^2}[|x'|^2+x_n(nd-(n-1)x_n)]+N\frac{x_n}{2}(d-x_n).$$

显然在 $x_n=0$ 上 $\psi(x', x_n)\geqslant 0$, 而在 $\partial Q'$ 的其余部分上 $\psi\geqslant M$; 还有 $\Delta\psi=-N$. 因此在 Q' 中 $\Delta(\psi\pm\varphi)\leqslant 0$, 在 $\partial Q'$ 上 $\psi\pm\varphi\geqslant 0$, 从它由极大值原理推出，在 Q' 中 $|\varphi(x', x_n)|\leqslant\psi(x', x_n)$. 在 φ 和 ψ 的表达式中置 $x'=0$, 然后用 x_n 去除并令 x_n 趋于零,就得到

$$|D_n u(0)|=\lim_{x_n\to 0}\left|\frac{\varphi(0, x_n)}{x_n}\right|\leqslant\frac{n}{d}M+\frac{d}{2}N,$$

它就是 $i=n$ 时所断言的估计(3.15). 用相应的方法可推出 $i=1, \cdots, n-1$ 的结果. 如果 $f=0$, (3.15)为调和函数梯度界(2.31)提供了一个(本质上)独立的证明.

从 (3.15) 我们推断出在任一区域 Ω 中 $\Delta u=f$ 的有界解 u 满足估计

(3.16) $$\sup_{\Omega} d_x|Du(x)| \leqslant C(\sup_{\Omega}|u|+\sup_{\Omega} d_x^2|f(x)|),$$

其中 $d_x=\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $C=C(n)$. 因为如果 $x\in\Omega$, 并且 Q 是一个中心在 x 边长为 $d=d_x/\sqrt{n}$ 的立方体, 则从(3.15)就有不等式

$$\begin{aligned} d_x|Du(x)| &\leqslant C(\sup_{\partial Q}|u|+d^2\sup_{Q}|f|) \\ &\leqslant C(\sup_{\Omega}|u|+\sup_{\Omega} d_y^2|f(y)|). \end{aligned}$$

(这里我们用同一字母 C 表示仅依赖于 n 的常数.)

在如上的同样一般情形下, 我们现在用类似的比较论证来导出 Poisson 方程解的梯度连续模的估计.

仍设 $u\in C^2(Q)\cap C^0(\overline{Q})$ 是立方体 Q 中 $\Delta u=f$ 的一个解, 令 $M=\sup_{Q}|u|$, $N=\sup_{Q}|f|$. 设 Q' 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个区域, 由下式定义:

$$Q'=\{(x_1, \cdots, x_{n-1}, y, z)\,|\,|x_i|<d/2, \\ i=1, \cdots, n-1. \ 0<y, z<d/4\},$$

并设在 Q' 中定义函数

$$\varphi(x', y, z)=\frac{1}{4}[u(x', y+z)-u(x', y-z) \\ -u(x', -y+z)+u(x', -y-z)].$$

引进 $n+1$ 个变量 $x_1, \cdots, x_{n-1}, y, z$ 的椭圆算子

$$L\equiv\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

我们看到在 Q' 中 $|L\varphi|\leqslant N$. 在 Q' 上我们还有: (i) $\varphi(x', 0, z)=\varphi(x', y, 0)=0$; (ii) 在 $|x_i|=d/2\,(i=1, \cdots, n-1)$ 上 $|\varphi|\leqslant M$; (iii) $|\varphi(x', d/4, z)|\leqslant\mu z$ 和 $|\varphi(x', y, d/4)|\leqslant\mu y$, 其中, 在 Q' 中 $|Du|\leqslant\mu$, μ 是根据 (3.16) 用 M 和 N 给出. 现在在 Q' 中选择一个比较函数, 其形式为

(3.17) $$\psi(x', y, z)=\frac{4M|x'|^2}{d^2}+\frac{4\mu}{d}yz+kyz\log\frac{2d}{y+z},$$

其中 k 是待定的正常数. 我们首先观察到在 $\partial Q'$ 上 $|\varphi|\leqslant\psi$. 因为

$$L\psi=\frac{8(n-1)}{d^2}M+k\left(-1+\frac{yz}{(y+z)^2}\right)\leqslant\frac{8(n-1)M}{d^2}-\frac{3}{4}k,$$

我们知道只要

$$k\geqslant\frac{4}{3}(N+8(n-1)M/d^2),$$

就有 $L\psi\leqslant-N$.

对于这样选择的 k, 函数

$$\psi(x',\ y,\ z)=\frac{4M|x'|^2}{d^2}+yz\left(\frac{4\mu}{d}+k\log\frac{2d}{y+z}\right)$$

满足条件: 在 Q' 中 $L(\psi\pm\varphi)\leqslant0$, 在 $\partial Q'$ 上 $\psi\pm\varphi\geqslant0$. 因此在 Q' 中 $|\varphi|\leqslant\psi$. 在这个不等式中令 $x'=0$, 然后除以 z 并令 z 趋于零, 得到

$$(3.18)\quad \frac{1}{2}|u_y(0,\ y)-u_y(0,\ -y)|=\lim_{z\to0}\frac{|\varphi(0,\ y,\ z)|}{z}\leqslant\frac{4\mu}{d}y+ky\log\frac{2d}{y}.$$

稍稍修改一下论证就能够对 $|D_iu(0,\ x_n)-D_iu(0,\ -x_n)|$ 导出类似的估计(其中 $D_i=\partial/\partial x_i$, $i=1,\ \cdots,\ n-1$). 我们定义

$$\varphi(\hat{x},\ y,\ z)=\frac{1}{4}[u(\hat{x},\ y,\ z)-u(\hat{x},\ -y,\ z)-u(\hat{x},\ y,\ -z)+u(\hat{x},\ -y,\ -z)],$$

其中 $\hat{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_{n-2})$. 在区域

$$Q'=\{(x_1,\ \cdots,\ x_{n-2},\ y,\ z)\ |\ |x_i|<d/2,\ i=1,\ \cdots,\ n-2,\ 0<y,\ z<d/2\}$$

中, 我们选择一个类似于(3.17)的比较函数, 其形式为

$$\psi(\hat{x},\ y,\ z)=\frac{4M|\hat{x}|^2}{d^2}+yz\left(\frac{4\mu}{d}+\bar{k}\log\frac{2d}{y+z}\right),$$

其中 μ 和 $\bar{k}$ 是常数, 使得在 Q' 中成立 $|Du|\leqslant\mu$ 和

$$\bar{k}\geqslant\frac{2}{3}[N+8(n-2)M/d^2].$$

容易验证在 Q' 中 $\Delta(\psi\pm\varphi)\leqslant0$, 在 $\partial Q'$ 上 $\psi\pm\varphi\geqslant0$, 从它们推得, 在 Q' 中 $|\varphi|\leqslant\psi$. 如同上面一样, 如果在这个不等式中置 $\hat{x}=0$, 然后除以 y 并令 y 趋于零, 就得到

$$(3.19)\quad \frac{1}{2}|D_{n-1}u(0,z)-D_{n-1}u(0,-z)|=\lim_{y\to 0}\frac{|\varphi(0,y,z)|}{y}$$

$$\leqslant\frac{4\mu}{d}z+\bar{k}z\log\frac{2d}{z}.$$

如果用 $D_i(i=1,\cdots,n-2)$ 代替 D_{n-1}，可得相同结果. 我们注意与(3.18)的论证不同，(3.19)的证明不需要引进 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个算子.

现在如果在 $\mathbb{R}^n$ 的区域 Ω 中 $\Delta u=f$，我们就能从 (3.18) 和 (3.19) 得到 $|Du(x)-Du(y)|$ 的一个估计，其中 x 和 y 是 Ω 的任何两点. 设

$$d_x=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega),\quad d_y=\operatorname{dist}(y,\partial\Omega),$$

并且 $d_{x,y}=\min(d_x,d_y)$. 假设 $d_x\leqslant d_y$ 因而 $d_x=d_{x,y}$. 首先假设

$$|x-y|\leqslant d=d_x/2\sqrt{n},$$

并考虑连接 x 和 y 的线段. 取这个线段的中点作为原点并旋转坐标轴使得 x 和 y 位于 x_n 轴上，它们在新坐标系中是 $x=(0,x_n)$，$y=(0,-x_n)$. 立方体 $Q=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid |x_i|<d,\ i=1,\cdots,n\}$ 位于 Ω 中，它到 $\partial\Omega$ 的距离大于 $d_x/2$. 在 Ω 中可以直接应用 (3.16)，(3.18) 和(3.19)得到对某个常数 $C=C(n)$ 有

$$d^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leqslant C(\sup_Q|u|+d^2\sup_Q|f|)\log\frac{2d}{|x-y|}.$$

因此

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leqslant C(\sup_\Omega|u|+\sup_\Omega d_x^2|f(x)|)\log\frac{d_{x,y}}{|x-y|}.$$

如果 x, y 是 Ω 中使得 $|x-y|>d$ 的点，则从(3.16)有

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leqslant C(\sup_\Omega|u|+\sup_\Omega d_x^2|f(x)|).$$

合并这些结果，我们就得到

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leqslant C(\sup_\Omega|u|+\sup_\Omega d_x^2|f(x)|)\times\left(\left|\log\frac{d_{x,y}}{|x-y|}\right|+1\right),$$

其中 C 是仅依赖于 n 的常数.

前面的结果汇总在如下的定理中.

定理 3.9 设 $u\in C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 Poisson 方程 $\Delta u=f$. 那么

$$\sup_{\Omega} d_x|Du(x)|\leqslant C(\sup_{\Omega}|u|+\sup_{\Omega} d_x^2|f(x)|),$$

而对 Ω 中所有的 x, $y(x\neq y)$, 有

$$(3.20)\quad d_{x,y}^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leqslant C(\sup_{\Omega}|u|+\sup_{\Omega} d_x^2|f(x)|)\times\left(\left|\log\frac{d_{x,y}}{|x-y|}\right|+1\right),$$

其中 $C=C(n)$, $d_x=\text{dist}(x, \partial\Omega)$, $d_{x,y}=\min(d_x, d_y)$.

尽管它的证明有初等的特性,这个定理实质上却是很强的,除非对 f 作进一步的连续性假设,否则估计(3.20)是不能改进的. 假如 f 有界, 则对第 8 章意义下的弱解, 定理 3.9 也成立; (见习题 8.4).

对于 Hölder 连续的 f, 上面结果的推广在第 4 章中是用其他方法处理的, 虽然使用本节的比较方法也能得到这些推广 ;(见 [BR1, 2]).

3.5. Harnack 不等式

极大值原理为两个变量的一致椭圆型方程的一般 Harnack 不等式提供了一个初等的证明. 设 $D_\rho=D_\rho(0)$ 表示中心在原点半径为 ρ 的开圆域,我们以下述形式叙述这个结果.

定理 3.10 设 u 是

$$Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0$$

在圆域 D_R 中的一个非负 C^2 解,并设 L 在 D 中是一致椭圆的. 则在所有的点 $z=(x, y)\in D_{R/4}$ 上,我们有不等式

$$(3.21)\qquad Ku(0)\leqslant u(z)\leqslant K^{-1}u(0),$$

其中 K 是一个仅依赖于椭圆模数 $\mu=\sup\limits_{D}\Lambda/\lambda$ 的常数.

证明 我们首先指出, 因为方程 $Lu=0$ 和模数 μ 在相似变换下是不变量, 故只需在单位圆域 $D=D_1$ 中证明这个定理就够了.

因为在 D 中 $u\geqslant 0$, 强极大值原理(定理 3.5)蕴涵或者 $u\equiv 0$, 或者在 D 中 $u>0$. 于是假设是后者就够了. 考虑在 D 中的集合 G, 其中 $u>u(0)/2$, 并设 $G'\subset G$ 是包含 0 的部分. 从极大值原理可以看出 $\partial G'\cap\partial D$ 非空, 因此不失一般性可假设点 $Q=(0, 1)$ 在 $\partial G'$ 中. 用

$$v_{\pm}(x, y)=\pm x+\frac{3}{4}-k\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$

定义函数 v_+ 与 v_-, 其中 k 是一个正常数. 抛物线 $\Gamma_{\pm}: v_{\pm}=0$ 在 D 中有顶点$\left(\mp\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 和公共轴 $y=\frac{1}{2}$. 如果 k 是充分大 ($k\geqslant$ 3 就够了), 在 D 中使 $v_{\pm}>0$ 的区域 $P_{\pm}$ 有交 $P_+\cap P_-$, 它由弧 Γ_+, Γ_- 所围成, 全部位于 D 的上半部分内; (见图 1). 在 $P_{\pm}$ 中, 函数 $v_{\pm}$ 显然满足不等式 $0<v_{\pm}<\frac{7}{4}$.

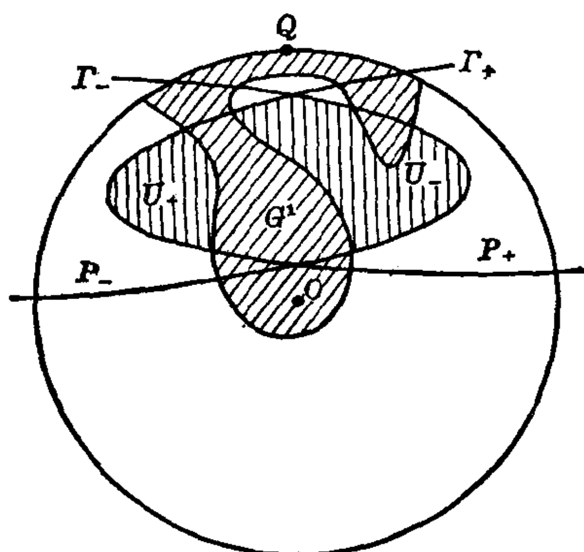


图 1

令 $E_{\pm}=\exp(\alpha v_{\pm})$, 其中 α 是一个待定正常数, 经直接计算发现在 D 中, 如果 $\alpha\geqslant 2k\mu$, 就有

$$LE_{\pm}=E_{\pm}\left\{\alpha^2\left[a\mp 4bk\left(y-\frac{1}{2}\right)+4ck^2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]-2\alpha kc\right\}$$
$$\geqslant E_{\pm}(\alpha^2\lambda-2\alpha k\Lambda)\geqslant 0.$$

所以, 对如此选取的 α, 函数

(3.22) $$w_{\pm}=(E_{\pm}-1)/(e^{7\alpha/4}-1)$$

具有性质:

在 D 中 $Lw_{\pm}\geqslant 0$, 在 $\Gamma_{\pm}$ 上 $w_{\pm}=0$, 在 $P_{\pm}$ 中 $0<w_{\pm}<1$.

现在设 z 是 $P_+\cap P_-$ 中的任一点. 于是或者(i)$u\geqslant u(0)/2$ 和 $z\in\overline{G}$, 或者 (ii)z 位于 $P_+-\overline{G}$ 的一部分 U_+ 中, 使得 $\partial U_+\subset\Gamma_+\cup\partial G$; 或者(iii)$z$ 位于 P_--G 的一部分 U_- 中, 使得 $\partial U_-\subset\Gamma_-$

$\cup\partial G$; (见图 1). 这些是仅有的选择, 因为或者 $P_+\cap P_-\subset G'$, 或者 $\partial G'$ 分离 $P_+\cup P_-$. (二维性的使用在这里是本质的.) 在情形 (ii) 和 (iii) 中, 我们有

$$u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm=\frac{1}{2}u(0)(1-w_\pm)>0 \quad (\text{在 } \partial G\cap\partial U_\pm \text{ 上}),$$

$$u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm=u>0 \quad (\text{在 } \Gamma_\pm\cap\partial U_\pm \text{ 上}).$$

这样一来, 在 $\partial U_\pm$ 上 $u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm>0$. 因为 $L\left(u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm\right)\leqslant 0$, 我们推断出

$$u(z)>\frac{1}{2}u(0)\min(w_+(z),\ w_-(z)) \quad \forall z\in P_+\cap P_-.$$

特别, 在线段 $y=\frac{1}{2}$, $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 上, 我们有

$$u\left(x,\ \frac{1}{2}\right)>K_1u(0) \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right], \tag{3.23}$$

其中

$$K_1=\frac{1}{2}(e^{\alpha/4}-1)(e^{7\alpha/4}-1)$$
$$=\frac{1}{2}\inf_{|x|<1/2}\left[w_+\left(x,\ \frac{1}{2}\right),\ w_-\left(x,\ \frac{1}{2}\right)\right].$$

现在我们定义另一个类似于(3.22)的比较函数. 即, 令 $v=y+1-6x^2$, 考虑区域

$$P=\left\{(x,\ y)\in D\,\middle|\,v(x,\ y)>0,\ y<\frac{1}{2}\right\}.$$

P 由线段 $y=\frac{1}{2}$, $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 以及具有顶点 $(0,\ -1)$ 并通过点 $\left(\pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 的抛物线 $v=0$ 的弧 Γ 所围成. 如前, 适当选取仅依赖于 μ 的 $\beta>0$, 函数

$$w=(e^{\beta v}-1)(e^{3\beta/2}-1)$$

具有性质:

在 D 中 $Lw\geqslant 0$; 在 Γ 上 $w=0$; 在 P 中 $0<w<1$.

从(3.23)得到: 在 ∂P 上 $u-K_1u(0)w>0$, 又因 $L(u-K_1u(0)w)\leqslant 0$, 从极大值原理就得到

$$u(z)>K_1u(0)w(z) \quad \forall z\in P.$$

注意到 $D_{1/3}\subset P$, 并令 $K_2=\inf\limits_{D_{1/3}} w$, 就得到

(3.24) $$u(z)>K_1K_2u(0)=Ku(0) \quad \forall z\in D_{1/3}.$$

显然 K 仅依赖于 μ.

现在如果 $z\in D_{1/4}$, 圆域 $D_{3/4}(z)$ 包含在 D 中, 把不等式(3.24)应用于圆域 $D_{1/4}(z)$, 就推出

$$u(0)>Ku(z) \quad \forall z\in D_{1/4}.$$

把这个不等式与(3.24)结合起来, 我们得到

$$Ku(0)<u(z)<K^{-1}u(0) \quad \forall z\in D_{1/4}. \blacksquare$$

从(3.21)直接得到

(3.25) $$\sup_{D_{R/4}} u\leqslant \varkappa \inf_{D_{R/4}} u,$$

其中 $\varkappa=1/K^2$. 使用定理 2.5 中的同样链式论证, 对于 $\mathbb{R}^2$ 中任意区域, 我们得到下面的 Harnack 不等式.

推论 3.11 设在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 中定理 3.10 的假设成立. 则对任一有界子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 存在一个仅依赖于 Ω, Ω' 和 μ 的常数 $\varkappa$, 使得

$$\sup_{\Omega'} u\leqslant \varkappa \inf_{\Omega'} u,$$

如果我们考虑更一般椭圆型方程

$$Lu=a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu=0, \quad c\leqslant 0, \quad i, j=1, 2,$$

其中算子 L 的系数有界并且 $\lambda\geqslant\lambda_0>0$, 定理 3.10 的证明在单位圆域 D 中(稍加修改)仍然有效; 结论仍然相同, 但是现在常数 K 依赖于系数在 D 中的界以及 μ. 因此, 在叙述半径为 R 的圆域中的类似结果时, 常数 K 除依赖其它量之外将依赖于 R; (见习题 3.4).

对多于两个自变量的方程, 与定理 3.10 类似的定理的证明仍然是一个未解决的问题, 虽然在系数在边界上有适当连续性 [SE1] 或系数在边界附近振幅充分小 [LN] 的附加假设之下这类结果已经建立; (也可参看第 8 章).

作为 Harnack 不等式 (3.21) 的推论, 有下面的 Liouville

定理.

推论 3.12 如果方程 $Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是一致椭圆的，u 是一个下(或上)有界的解，在全平面上有定义，那么 u 是常数.

证明 不失一般性可以假设在 $\mathbb{R}^2$ 中 $u>0$. 在任意大半径 R 的圆域中应用定理 3.10(我们回忆 K 是不依赖于 R 的)，得到不等式

$$(3.26)\qquad Ku(0)\leqslant u(z)\leqslant K^{-1}u(0)\quad \forall z\in\mathbb{R}^2.$$

这蕴涵着 u 在全平面上有界. 令

$$M=M(R)=\sup_{|z|\leqslant R}u(z),\quad m=m(R)=\inf_{|z|\leqslant R}u(z),$$

$$\omega=\omega(R)=M-m$$

和 $$\widetilde{M}=M(R/4),\ \widetilde{m}=m(R/4),\ \widetilde{\omega}=\omega(R/4).$$

注意 $M-u$, $u-m$ 都是在 D_R 中的正解，从(3.25)得到不等式

$$M-\widetilde{m}=\sup_{D_{R/4}}(M-u)\leqslant\varkappa\inf_{D_{R/4}}(M-u)=\varkappa(M-\widetilde{M}),$$

类似地

$$\widetilde{M}-m\leqslant\varkappa(\widetilde{m}-m).$$

把这两个不等式相加，就得到 u 在圆域 D_R、$D_{R/4}$ 中的振幅 ω、$\widetilde{\omega}$ 之间的关系式

$$(3.27)\qquad \omega(R/4)=\widetilde{M}-\widetilde{m}\leqslant\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(M-m)=\gamma\omega(R),\ 0\leqslant\gamma<1.$$

因为 $\omega(R)$ 单调增加且有界(由于(3.26))，我们就有

$$\lim_{R\to\infty}\omega(R)=\omega_0<\infty.$$

如此， $$\omega(R)\leqslant\gamma\omega(4R)\leqslant\gamma\omega_0.$$

令 $R\to\infty$，得到 $\omega_0\leqslant\gamma\omega_0$，它蕴涵 $\omega_0=0$. 我们断言对所有 $z\in\mathbb{R}^2$，有 $u(z)=u(0)$.]

另外一些 Harnack 不等式以及一些重要应用将在第 8 章和第 12 章中出现.

3.6. 散度形式的算子

我们简短地考查一下*散度形式*的算子的情形来结束本章. 在

很多情形下考虑这些算子比考虑形式为(3.1)的算子更为自然. 最简单的这种情形是

$$Lu = D_j(a^{ij}D_iu). \tag{3.28}$$

较后将有必要考虑主部是散度形式的更一般的算子. L 在 Ω 中称为椭圆的, 如果对所有的 $x\in\Omega$, 系数矩阵 $[a^{ij}(x)]$ 是正定的.

显然, 当系数 a^{ij} 充分光滑时, 有关极大值原理的一些结果同样能很好地应用于算子(3.28). 然而, 当情形不是这样时, 或者, 象在非线性问题中那样, 当作出有关系数光滑性的定量假设(例如, 它们的导数有界), 常常是不适宜的时候, 本章中前面部分本质上是代数的方法就不能应用, 而必须用积分方法来代替, 后者对于 L 的散度结构更为自然.

对于方程 $Lu=0$, 如果系数和函数 u 所属的类型比之(3.28)中形式上所允许的那些更为广泛, 则 $Lu=0$ 的解(下解, 上解)所满足的关系式 $Lu=0(\geqslant 0, \leqslant 0)$ 仍可定义. 这样, 如果系数 a^{ij} 有界可测, 并且 $u\in C^1(\Omega)$, 那么, 在广义意义下, 如果

$$\int_\Omega a^{ij}(x)D_iuD_j\varphi\, dx = 0(\leqslant 0, \geqslant 0) \tag{3.29}$$

对所有非负的函数 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ 成立, 就称 u 在 Ω 中满足 $Lu=0(\geqslant 0, \leqslant 0)$. 应用散度定理容易看出: 当 $a^{ij}\in C^1(\Omega)$ 和 $u\in C^2(\Omega)$ 时, 这等价于 $Lu=0(\geqslant 0, \leqslant 0)$. 在以后各章中将对更广泛更合适的函数空间来定义广义解.

弱极大值原理是 (3.29) 的一个直接推论. 因为设 u 对所有 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$, $\varphi\geqslant 0$ 满足

$$\int_\Omega a^{ij}D_iuD_j\varphi\, dx \leqslant 0, \tag{3.30}$$

并设和我们的断言相反, 有 $\sup\limits_\Omega u > \sup\limits_{\partial\Omega} u = u_0$, 那末, 对某常数 $c>0$, 存在一个子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 在其中 $v=u-u_0-c>0$, 而在 $\partial\Omega'$ 上 $v=0$. 关系式(3.30)在用 v 代替 u 并对在 Ω 中 $\varphi=v$、在别处 $\varphi=0$ 的 φ 仍然正确. (如定义的 $\varphi\notin C_0^1(\Omega)$, 但是用 $C_0^1(\Omega)$ 中的函数去逼近这个 φ 时就能够看出(3.30)成立.) 由此得到

$$\int_{\Omega'} a^{ij}D_i v D_j v\, dx \leqslant 0,$$

并且因为 $[a^{ij}]$ 是正定的，因此我们推出在 Ω' 中 $Dv=0$. 因为在 $\partial\Omega'$ 上 $v=0$，我们得到在 Ω' 中 $v=0$. 这与 v 的定义矛盾. 这就建立了弱极大值原理.

对于散度结构算子，较强的和更一般的极大值原理将在后面几章中介绍. 除了已经提到的这两类算子处理方法上的差别之外，还应当注意到当系数具有弱光滑性条件时，对于算子 (3.1) 和 (3.28)，与极大值原理有关的结果常常也是不同的. 例如，对散度形式(3.28)的一致椭圆算子，甚至当系数在内部任意光滑并且连续到边界时引理 3.4 也未必是正确的；(见习题 3.9).

评注

在这里所证明的边界点引理 (引理 3.4) 是属于 Hopf[HO5] 的；仅在比较函数的选择上有所不同的一个独立的证明已由 Oleinik[OL] 得到. 除系数的某些连续性外需要 $C^{1,\alpha}$ 边界的同样结果在较早的时候由 Giraud[GR2] 导出，他使用了许多较深的方法. 更早些的同类结果，在更多限制的假设下，见于 Lichtenstein [LC] 并可参考 Protter-Weinberger[PW]. 一般来说，对于散度形式的严格一致椭圆型方程，即使系数在边界点上连续，引理 3.4 也是不正确的，(见习题 3.9)，但是如果系数在一个邻域中 Hölder 连续，它就是正确的(Finn-Gilbarg[FG1]).

对于满足内部锥条件而不是内部球条件的区域，与引理 3.4 相类似的结果已由 Oddson[OD] 和 Miller[ML1, 3] 得到. 他们证明了(3.11)和更精确的结果：用 $|x-x_0|^\mu$ 代替 $|x-x_0|$，指数 μ 仅依赖于锥角和椭圆性常数；(这里向量 $x-x_0$ 位于在 x_0 所假定的内部锥的一个固定子锥的内部). 这些本质上强的结果基于 Pucci [PU2] 的极值椭圆算子(extremal elliptic operator).

在定理 3.5 的一般性下的极大值原理首先是由 Hopf[HO1] 证明的. 在更多限制的假设下更早的结果可参考 [P W] p. 156.

其中也讨论了极大值原理的各种各样的扩充，在第8章和第9章中研究了它们的某些结果.

第3，4节基于Brandt[BR1,2]的想法，他证明了二阶椭圆型和抛物型方程古典解的线性理论的许多结果，包括第4章和第6章的能够从使用极大值原理的比较论证推导出来的更深刻的估计. 与第3，4节中一样，其方法需要适当(一般来说不是显然的)选择比较函数，用它们去估计差商，因此得到导数的估计.

Harnack不等式(定理3.10)和某些推广属于Serrin[SE1]. 这似乎是用极大值原理的Harnack不等式的第一个证明. Bers和Nirenberg[BN]用完全不同的较深的方法推导了很相似的结果. 由Landis[LN]把Harnack不等式推广到n个变量上也是基于极大值原理，但是需要对微分算子的系数在边界附近加上限制. 当系数在边界上是Dini连续时，Serrin使用方程的上解和下解的修正Poisson积分证明了对n个变量的一个推广.

Liouville定理(推论3.12)与非正曲率曲面上的Bernstein的一个几何定理有关(见[HO4])，它蕴涵任一椭圆型方程$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0$的完全解$u$若在$r\to\infty$时$u=o(r)$，则必是常数. 特别有趣的是：方程仅需是逐点椭圆的. 在这种一般性的情况下，已有反例表明推论3.12失效. Bernstein的结果也是基于极大值原理的，但是论证十分不同，并且更多是几何的.

习　题

3.1. 设L在有界区域Ω中满足定理3.6的条件，并设在Ω中$Lu=0$.

(a) 设$\partial\Omega=S_1\cup S_2$($S_1$非空)，并设在$S_2$的每点上满足内部球条件. 假设$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\Omega\cup S_2)\cap C^0(\overline{\Omega})$满足混合边界条件

$$\text{在 } S_1 \text{ 上 } u=0,\quad \text{在 } S_2 \text{ 上 } \sum\beta_i D_i u=0,$$

其中向量$\boldsymbol{\beta}(x)=(\beta_1(x),\cdots,\beta_n(x))$在每一点$x\in S_2$有一个非零法分量(对内部球). 则$u\equiv 0$.

(b) 设$\partial\Omega$满足内部球条件，并设$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$满足正则斜导数边界条件

$$\text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } \alpha(x)u+\sum\beta_i(x)D_i u=0.$$

其中 $\alpha(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu})>0$, $\boldsymbol{\nu}=$外法向. 则 $u\equiv0$.

3.2. (a) 如果 L 是椭圆的,在区域 Ω 中 $Lu\geqslant0(\leqslant0)$ 及 $C<0$,那么 u 不能取到内部正最大值(负最小值).(关于系数 b^i 未做假设.)

(b) 如果在有界区域 Ω 中 L 是椭圆的, $c<0$, 并且 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Lu=f$, 那么

$$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|u|+\sup_{\Omega}|f/c|.$$

3.3. 设在外部区域 $r>r_0$ 中 $Lu=au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0$, L 是一致椭圆的. 证明如果 u 一方有界, 那么 u 当 $r\to\infty$ 时有极限(可能是无穷); (参看[GS]).[在扩张到无穷的适当环形区域中应用 Harnack 不等式.]使用这个结果去证明 Liouville 定理(推论 3.12).

3.4. 设 u 是

$$Lu\equiv a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu=0,\ c\leqslant0,\ i,\ j=1,\ 2$$

的非负解,其中 L 的系数满足不等式

$$\Lambda/\lambda\leqslant\mu,\ |b^i/\lambda|,\ |c/\lambda|\leqslant\nu\quad(\mu,\ \nu=\text{常数}).$$

证明 Harnack 不等式(3.21),其中 $K=K(\mu,\ \nu)$, 以及推论 3.11,其中 $K=K(\mu,\ \nu,\ \Omega,\ \Omega')$.

3.5. 假设在有孔的圆域 D_0:$0<r<r_0$ 中,习题 3.4 中关于 L 的条件都满足,并设在 D_0 中 $Lu=0$. 证明如果 u 一方有界, 那么当 $r\to0$ 时 u 有极限(可能是无穷);(参看[GS]).

3.6. 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$是

$$Lu\equiv a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu=f,\ c\leqslant0$$

在 $\mathbf{R}^n$ 的有界 C^1 区域 Ω 中的一个解, 并且在 $x_0\in\partial\Omega$ 满足 $\overline{B}_R(y)\cap\overline{\Omega}_{x_0}$ 时的外部球条件. 设 λ, Λ 是正常数使得

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\ \forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbf{R}^n\ |a^{ij}|,\ |b^j|,\ |c|\leqslant\Lambda.$$

如果 $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$并且在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 证明 u 在 x_0 满足 Lipschitz 条件

$$|u(x)-u(x_0)|\leqslant K|x-x_0|,\quad x\in\Omega,$$

其中 $K=K(\lambda,\ \Lambda,\ R,\ \sup_{\Omega}|f|,\ |\varphi|_{2;\Omega})$. 因此可断言当 $u\in C^1(\Omega)$ 并且 $\partial\Omega$ 充分光滑时 K 提供了 u 在 $\partial\Omega$ 上的梯度的界; (参看[CH], p. 343). 如果 C 的符号未加限制, 证明: 只要 K 还依赖于 $\sup_{\Omega}|u|$, 则同样的结果成立.

3.7. (a) 设前一习题中的算子 L 有在原点 Hölder 连续的系数 a^{ij}; 在 $|x|<r_0$ 中对某常数 K 有 $|a^{ij}(x)-a^{ij}(0)|\leqslant K|x|^\alpha$, $\alpha>0$. 假设在有孔球 $0<r\leqslant r_0$ 中 $Lu\geqslant0(c\equiv0)$, 并设当 $r\to0$ 时,

$$u=\begin{cases} o(\log r), & n=2, \\ o(r^{2-n}), & n>2, \end{cases}$$

试证明

(3.31) $$\limsup_{x\to 0} u(x) \leqslant \sup_{|x|=r_0} u(x),$$

等式仅当 u 是常数时成立.

(b) 如果 $n>2$，证明若系数 a^{ij} 在 $x=0$ 连续，并当 $r\to 0$ 时对某一个 $\delta>0$，$u=o(r^{2-n-\delta})$，则(a)中的同样结果成立；(参看[GS]).

3.8. 考虑方程

(3.32) $$L_n u \equiv a^{ij}D_{ij}u=0,\ a^{ij}=\delta^{ij}+g(r)\frac{x_i x_j}{r^2},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

证明 $L_n u=0$ 有一个轴对称解 $u=u(r)$，$r\neq 0$，它满足常微分方程

$$\frac{u''}{u'}=\frac{1-n}{r(1+g)}.$$

(a) 如果 $n=2$，并且 $g(r)=-2/(2+\log r)$，证明方程(3.32)在圆域 D: $0\leqslant r\leqslant r_0=e^{-3}$ 中是一致椭圆的，在原点有连续的系数，并且在有孔圆域 $D-\{0\}$ 中具有不满足(3.31)的有界解 $a+b/\log r$.

(b) 如果 $n>2$，并且 $g(r)=-[1+(n-1)\log r]^{-1}$. 证明 (3.32) 在 $0\leqslant r\leqslant r_0=e^{-1}$ 中是一致椭圆的，并且在原点有连续系数. 证明对应的解 $u=u(r)$ 满足条件：当 $r\to 0$ 时 $u=o(r^{2-n})$，但不满足(3.31).

(c) 如果 $n>2$，确定一个函数 $g(r)$ 使得(3.32)是一致椭圆的，并且有一个在 $r=0$ 连续的但不满足(3.31)的有界解.

3.9. 设 $w=z\exp[-(\log(1/|z|))^{1/2}]$，考虑关系式 $w_{\bar z}=\nu(z)w_z$，其中

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

证明 $u=\mathrm{Re}\,w=x\exp[-(\log(1/r))^{1/2}]$ 满足散度形式的一致椭圆型方程

$$(au_x+bu_y)_x+(bu_x+cu_y)_y=0,$$

其中的系数，在原点 $a\to 1$，$b\to 0$，$c\to 1$，在 $0<r<1$ 是正则的. 注意 $u(0,0)=0$，当 $x>0$ 时 $u(x,y)>0$ 并且 $u_x(0,0)=0$. 与引理 3.4 进行比较.

第四章

Poisson 方程和 Newton 位势

在第2章中我们引进了Laplace方程的基本解Γ，由下式给出：

$$(4.1)\quad \Gamma(x-y)=\Gamma(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n>2,\\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n=2.\end{cases}$$

对于区域Ω上一个可积函数f，f的 Newton 位势是由下式定义的函数w：

$$(4.2)\qquad w(x)=\int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)\,dy.$$

从 Green 表示公式(2.16)我们看到，当$\partial\Omega$充分光滑时，一个$C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$函数可以表示为一个调和函数和它的 Laplace 的 Newton 位势之和，因此毫不奇怪，通过f的 Newton 位势的研究能够充分实现 Poisson 方程$\Delta u=f$的研究. 本章主要从事 Newton 位势的导数估计，除了导致 Poisson 方程古典 Dirichlet 问题的存在定理之外，这些估计构成了第6章中讨论的线性椭圆型方程的 Schauder 方法或位势理论方法的基础.

4.1. Hölder 连续性

如果(4.2)中的函数f属于$C_0^\infty(\Omega)$，记

$$w(x)=\int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y)f(y)\,dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(z)f(x-z)\,dz,$$

我们看出函数w属于$C^\infty(\bar{\Omega})$. 另一方面，如果只假设f连续，Newton 位势w就不一定二次可微. 人们发现便于研究的一类函数f就是 Hölder 连续函数类，我们现在来介绍它.

设 x_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一点，而 f 是定义在包含 x_0 的有界区域 D 上的一个函数. 假设 $0<\alpha<1$，我们称 f 在 x_0 具有指数 α 的 Hölder 连续性，如果等式

$$[f]_{\alpha;x_0}=\sup \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{\alpha}} \tag{4.3}$$

是有限的. 我们称 $[f]_{\alpha;x_0}$ 是 f 关于 D 在 x_0 的 α-Hölder 系数. 显然，如果 f 在 x_0 Hölder 连续，那么 f 在 x_0 连续，当(4.3)对 $\alpha=1$ 为有限时，则称 f 在 x_0 Lipschitz 连续.

例　函数 f 在 $B_1(0)$ 上由 $f(x)=|x|^{\beta}, 0<\beta<1$ 给出，在 $x=0$ 具有指数 β 的 Hölder 连续性，当 $\beta=1$ 时 Lipschitz 连续.

Hölder 连续的概念不难推广到整个 D 上(不必有界). 我们称 f 在 D 中具有指数 α 的 Hölder 连续性，如果量

$$[f]_{\alpha;D}=\sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}},\ 0<\alpha\leqslant 1, \tag{4.4}$$

是有限的；称 f 是在 D 中具有指数 α 的局部 Hölder 连续性，如果 f 在 D 的紧子集上具有指数 α 的 Hölder 连续性. 如果 D 是紧的，这两个概念显然一致. 而且，请注意，局部 Hölder 连续性是比紧子集中逐点 Hölder 连续性更强的性质. 一个局部 Hölder 连续的函数，假如它也在 D 中有界，它在 D 中将是逐点 Hölder 连续的.

Hölder 连续性原来是连续性的一个定量的尺度，特别适合于偏微分方程的研究. 在某种意义下，可以把它看成是分数次可微性. 这暗示着把熟知的可微函数空间的自然放宽. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，k 是非负整数. 定义 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(C^{k,\alpha}(\Omega))$ 是 $C^k(\overline{\Omega})$ $(C^k(\Omega))$ 的一个子空间，它由 k 阶偏导数在 Ω 中具有指数 α 的 Hölder 连续性(局部 Hölder 连续性)的函数构成. 为了简单起见我们记

$$C^{0,\alpha}(\Omega)=C^{\alpha}(\Omega),\quad C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})=C^{\alpha}(\overline{\Omega}),$$

无论什么时候，用到这个记号时 α 都理解为 $0<\alpha<1$，除非另外声明.

同样，令

$$C^{k,0}(\Omega)=C^k(\Omega),\quad C^{k,0}(\bar{\Omega})=C^k(\bar{\Omega}),$$

对于 $0\leqslant\alpha\leqslant1$, 我们就可以把 $C^k(\Omega)$ $(C^k(\bar{\Omega}))$ 空间包括在 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ $(C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}))$ 空间之中. 我们也用 $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ 表示在 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ 上的在 Ω 中具有紧支集的函数的空间.

我们令

$$(4.5)\qquad \begin{aligned}&[u]_{k,0;\Omega}=|D^ku|_{0;\Omega}=\sup_{\Omega}\sup_{|\beta|=k}|D^\beta u|,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\\&[u]_{k,\alpha;\Omega}=[D^ku]_{\alpha;\Omega}=\sup_{|\beta|=k}[D^\beta u]_{\alpha;\Omega}.\end{aligned}$$

用这些拟范数能够分别定义空间 $C^k(\bar{\Omega})$ 和 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 上的有关范数

$$(4.6)\qquad \begin{aligned}&\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})}=|u|_{k;\Omega}=|u|_{k,0;\Omega}=\sum_{j=0}^{k}[u]_{j,0;\Omega}=\sum_{j=0}^{k}|D^ju|_{0;\Omega},\\&\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}=|u|_{k,\alpha;\Omega}=|u|_{k;\Omega}+[u]_{k,\alpha;\Omega}\\&\qquad=|u|_{k;\Omega}+[D^ku]_{\alpha;\Omega}.\end{aligned}$$

在 $C^k(\bar{\Omega})$, $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 上引进非量纲的范数有时是有用的, 特别在本章. 如果 Ω 有界, $d=\operatorname{diam}\Omega$, 我们令

$$(4.6)'\qquad \begin{aligned}&\|u\|'_{C^k(\bar{\Omega})}=|u|'_{k;\Omega}=\sum_{j=0}^{k}d^j[u]_{j,0;\Omega}=\sum_{j=0}^{k}d^j|D^ju|_{0;\Omega};\\&\|u\|'_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}=|u|'_{k,\alpha;\Omega}=|u|'_{k;\Omega}+d^{k+\alpha}[u]_{k,\alpha;\Omega}\\&\qquad=|u|'_{k;\Omega}+d^{k+\alpha}[D^ku]_{\alpha;\Omega}.\end{aligned}$$

空间 $C^k(\bar{\Omega})$、$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 在分别赋予相应的范数后是 Banach 空间; (见第 5 章).

这里我们指出, Hölder 连续函数之积仍然是 Hölder 连续的. 实际上, 如果 $u\in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $v\in C^\beta(\bar{\Omega})$, 我们有 $uv\in C^\gamma(\bar{\Omega})$, 其中 $\gamma=\min(\alpha,\ \beta)$, 并且

$$(4.7)\qquad \begin{aligned}&\|uv\|_{C^\gamma(\bar{\Omega})}\leqslant\max(1,\ d^{\alpha+\beta-2\gamma})\|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\|v\|_{C^\beta(\bar{\Omega})};\\&\|uv\|'_{C^\gamma(\bar{\Omega})}\leqslant\|u\|'_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\|v\|'_{C^\beta(\bar{\Omega})}.\end{aligned}$$

对于本书中感兴趣的区域 Ω, 当 $k+\alpha<k'+\alpha'$ 时包含关系 $C^{k',\alpha'}(\bar{\Omega})\subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 一定成立. 然而应当注意, 一般来说这样的关系是不真的, 例如, 考虑尖点区域

$$\Omega=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y<|x|^{1/2},\ x^2+y^2<1\};$$

并且对某个 β, $1<\beta<2$, 设 $y>0$ 时 $u(x,\ y)=(\operatorname{sgn}x)y^\beta$, $y\leqslant0$ 时

$u(x, y)=0$. 显然 $u\in C^1(\bar{\Omega})$. 然而，如果 $1>\alpha>\beta/2$, 容易看到 $u\notin C^\alpha(\bar{\Omega})$, 因此 $C^1(\bar{\Omega})\not\subset C^\alpha(\bar{\Omega})$.

4.2. Poisson 方程的 Dirichlet 问题

我们证明：如果 f 在有界区域 Ω 中有界且 Hölder 连续，则 Poisson 方程的古典 Dirichlet 问题在 Laplace 方程可解的同样边界条件下(定理 2.14)可以求解. 首先我们需要有界区域中 Newton 位势的某些可微性结果.

在下面算子 D 总是关于变量 x 的.

引理 4.1. 设 f 在 Ω 中有界可积，并设 w 是 f 的 Newton 位势. 则 $w\in C^1(\bar{\Omega})$, 并且对任何 $x\in\Omega$,

$$(4.8)\qquad D_i w(x)=\int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)dy, \quad i=1, \cdots, n.$$

证明 由对 $D\Gamma$ 的估计(2.14), 函数

$$v(x)=\int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)dy$$

有明确定义. 为证明 $v=D_i w$, 我们固定一个函数 $\eta\in C^1(\mathbb{R})$, 满足 $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $0\leqslant\eta'\leqslant 2$, 当 $t\leqslant 1$ 时 $\eta(t)=0$, 当 $t\geqslant 2$ 时 $\eta(t)=1$, 并对 $\varepsilon>0$ 定义

$$w_\varepsilon(x)=\int_\Omega \Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)f(y)dy.$$

显然 $w_\varepsilon\in C^1(\bar{\Omega})$, 并且

$$|v(x)-D_i w_\varepsilon(x)|$$
$$=\int_{|x-y|<2\varepsilon} D_i\left\{(1-\eta)\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\Gamma(x-y)\right\}f(y)dy,$$

所以

$$|v(x)-D_i w_\varepsilon(x)|$$
$$\leqslant \sup|f|\int_{|x-y|<2\varepsilon}\left(|D\Gamma(x-y)|+\frac{2}{\varepsilon}|\Gamma(x-y)|\right)dy$$
$$\leqslant \sup|f|\begin{cases}\dfrac{2n\varepsilon}{n-2}, & n>2,\\ 4\varepsilon(1+|\log 2\varepsilon|), & n=2.\end{cases}$$

从而当 $\varepsilon\to 0$ 时 w_ε 和 D_iw_ε 分别在 $\overline{\Omega}$ 中一致收敛到 w 和 v. 因此 $w\in C^1(\overline{\Omega})$ 和 $D_iw=v$. ∎

引理 4.2 设 f 在 Ω 中有界且局部 Hölder 连续(具有指标 $\alpha\leqslant 1$), 又设 w 是 f 的 Newton 位势. 则 $w\in C^2(\Omega)$, 在 Ω 中 $\Delta w=f$, 并对任何 $x\in\Omega$,

$$D_{ij}w(x)=\int_{\Omega_0}D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy \\ -f(x)\int_{\partial\Omega_0}D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n; \tag{4.9}$$

其中 Ω_0 是任一包含 Ω 的区域, 对于它, 散度定理成立, 并且 f 在 Ω 外边延拓为零.

证明 由对 $D^2\Gamma$ 的估计(2.14)和 f 在 Ω 中的逐点 Hölder 连续性, 函数

$$u(x)=\int_{\Omega_0}D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy \\ -f(x)\int_{\partial\Omega_0}D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y$$

有明确定义. 设 $v=D_iw$, 并对 $\varepsilon>0$ 定义

$$v_\varepsilon(x)=\int_\Omega D_i\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)f(y)dy,$$

其中 η 是在前面引理中引进的函数. 显然 $v_\varepsilon\in C^1(\Omega)$, 求微分, 假如 ε 充分小, 就得到

$$\begin{aligned} D_jv_\varepsilon(x)&=\int_\Omega D_j\left\{D_i\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right\}f(y)dy\\ &=\int_{\Omega_0}D_j\left\{D_i\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right\}(f(y)-f(x))dy\\ &\quad+f(x)\int_{\Omega_0}D_j\left\{D_i\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right\}dy\\ &=\int_{\Omega_0}D_j\left\{D_i\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right\}(f(y)-f(x))dy\\ &\quad-f(x)\int_{\partial\Omega_0}D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y.\end{aligned}$$

因此, 相减, 假如 $\varepsilon<\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega)$ 就得

$$|u(x)-D_jv_\varepsilon(x)|$$
$$=\left|\int_{|x-y|\leqslant 2\varepsilon}D_j\left\{\left[1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right]D_i\Gamma(x-y)\right\}(f(y)-f(x))dy\right|$$
$$\leqslant[f]_{\alpha;x}\int_{|x-y|\leqslant 2\varepsilon}\left(|D_{ij}\Gamma(x-y)|+\frac{2}{\varepsilon}|D_i\Gamma(x-y)|\right)|x-y|^\alpha dy$$
$$\leqslant\left(\frac{n}{\alpha}+4\right)[f]_{\alpha;x}(2\varepsilon)^\alpha.$$

从而 D_jv_ε 在 Ω 的紧子集上当 $\varepsilon\to 0$ 时一致收敛到 u, 并且因为在 Ω 中 v_ε 一致收敛到 $v=D_iw$, 我们就得到 $w\in C^2(\Omega)$ 并且 $u=D_{ij}w$. 最后, 在(4.9)中令 $\Omega_0=B_R(x)$, 对充分大 R 有

$$\Delta w(x)=\frac{1}{n\omega_nR^{n-1}}f(x)\int_{|x-y|=R}\nu_i(y)\nu_i(y)ds_y=f(x).\ \blacksquare$$

从引理 4.1, 4.2 和定理 2.14, 我们现在能够得出

定理 4.3 设 Ω 是一个有界区域, 并设 $\partial\Omega$ 的每点(关于 Laplace 算子)正则. 那么, 如果 f 是 Ω 中有界局部 Hölder 连续函数, 则古典 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $\Delta u=f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 对于任意连续边值 φ 都是唯一可解的.

证明 我们定义 w 是 f 的 Newton 位势, 并令 $v=u-w$. 于是问题: 在 Ω 中 $\Delta u=f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 等价于问题: 在Ω 中 $\Delta v=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $v=\varphi-w$, 根据定理 2.14 得到它的唯一可解性. $\blacksquare$

在 Ω 是一个球的情形, 例如说 $B=B_R(0)$, 从 Poisson 积分公式(定理 2.6)和引理 4.1, 4.2 可推得定理 4.3. 而且解有显式

$$u(x)=\int_{\partial B}K(x,y)\varphi(y)ds_y+\int_B G(x,y)f(y)dy, \tag{4.10}$$

其中 K 是 Poisson 核(2.29), 而 G 是 Green 函数(2.23).

4.3. 二阶导数的 Hölder 估计

下面的引理在理论的以后发展中提供了基本的估计.

引理 4.4 设 $B_1=B_R(x_0)$, $B_2=B_{2R}(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的同心球. 假设 $f\in C^\alpha(\bar{B}_2)$, $0<\alpha<1$, 并设 w 是 f 在 B_2 中的 Newton 位势. 那么 $w\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_1)$ 并且

$$|D^2w|'_{0,\alpha;B_1}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2}, \tag{4.11}$$

即， $$|D^2w|_{0;B_1}+R^\alpha[D^2w]_{\alpha;B_1}\leqslant C(|f|_{0;B_2}+R^\alpha[f]_{\alpha;B_2}),$$
其中 $C=C(n,\ \alpha)$.

证明 对任一 $x\in B_1$, 由公式(4.9)我们有

$$D_{ij}w(x)=\int_{B_2}D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy$$
$$-f(x)\int_{\partial B_2}D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y,$$

于是由(2.14),

$$(4.12)\qquad |D_{ij}w(x)|\leqslant\frac{|f(x)|}{n\omega_n}R^{1-n}\int_{\partial B_2}ds_y$$
$$+\frac{[f]_{\alpha;x}}{\omega_n}\int_{B_2}|x-y|^{\alpha-n}dy$$
$$\leqslant 2^{n-1}|f(x)|+\frac{n}{\alpha}(3R)^\alpha[f]_{\alpha;x}$$
$$\leqslant C_1(|f(x)|+R^\alpha[f]_{\alpha;x}),$$

其中 $C_1=C_1(n,\ \alpha)$.

其次，对任一其它点 $\bar{x}\in B_1$, 再次用公式(4.9)，我们有

$$D_{ij}w(\bar{x})=\int_{B_2}D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))dy$$
$$-f(\bar{x})\int_{\partial B_2}D_i\Gamma(\bar{x}-y)\nu_j(y)ds_y.$$

记 $\delta=|x-\bar{x}|$, $\xi=\frac{1}{2}(x+\bar{x})$, 从而通过相减得到

$$D_{ij}w(\bar{x})-D_{ij}w(x)=f(x)I_1+(f(x)-f(\bar{x}))I_2$$
$$+I_3+I_4+(f(x)-f(\bar{x}))I_5+I_6,$$

其中积分 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 和 I_6 为

$$I_1=\int_{\partial B_1}(D_i\Gamma(x-y)-D_i\Gamma(\bar{x}-y))\nu_j(y)ds_y,$$

$$I_2=\int_{\partial B_2}D\Gamma(\bar{x}-y)\nu_j(y)ds_y,$$

$$I_3=\int_{B_\delta(\xi)}D_{ij}\Gamma(x-y)(f(x)-f(y))dy,$$

$$I_4=\int_{B_\delta(\xi)}D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))dy,$$

$$I_5=\int_{B_2-B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(x-y)dy,$$

$$I_6=\int_{B_2-B_\delta(\xi)} (D_{ij}\Gamma(x-y)-D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y))(f(\bar{x})-f(y))dy.$$

这些积分的估计能够如下得到:

$$|I_1|\leqslant|x-\bar{x}|\int_{\partial B_2}|DD_i\Gamma(\hat{x}-y)|ds_y \text{ 对 } x \text{ 和 } \bar{x} \text{ 之间的某点 } \hat{x},$$

$$\leqslant\frac{n^2 2^{n-1}|x-\bar{x}|}{R}, \text{ 因为对 } y\in\partial B_2 \text{ 有 } |\hat{x}-y|\geqslant R,$$

$$\leqslant n^2 2^{n-\alpha}\left(\frac{\delta}{R}\right)^\alpha, \text{ 因为 } \delta=|x-\bar{x}|<2R.$$

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{n\omega_n}R^{1-n}\int_{\partial B_2}ds_y=2^{n-1}.$$

$$|I_3|\leqslant\int_{B_{3\delta/2}(x)}|D_{ij}\Gamma(x-y)||f(x)-f(y)|dy$$

$$\leqslant\frac{1}{\omega_n}[f]_{\alpha;x}\int_{B_{3\delta/2}(x)}|x-y|^{\alpha-n}dy=\frac{n}{\alpha}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^\alpha[f]_{\alpha;x}.$$

$$|I_4|\leqslant\frac{n}{\alpha}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^\alpha[f]_{\alpha;\bar{x}} \text{ 与 } I_3 \text{ 的估计相同.}$$

分部积分给出

$$|I_5|=\left|\int_{\partial(B_2-B_\delta(\xi))}D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{\partial B_2}D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y\right|+\left|\int_{\partial B_\delta(x)}D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y\right|$$

$$\leqslant 2^{n-1}+\frac{1}{n\omega_n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-n}\int_{\partial B_\delta(\xi)}ds_y=2^n.$$

$$|I_6|\leqslant|x-\bar{x}|\int_{B_2-B_\delta(\xi)}|DD_{ij}\Gamma(\hat{x}-y)||f(\bar{x})-f(y)|dy$$

对 x 和 $\bar{x}$ 之间的某点 $\hat{x}$,

$$\leqslant c\delta\int_{|y-\xi|\geqslant\delta}\frac{|f(\bar{x})-f(y)|}{|\hat{x}-y|^{n+1}}dy,\quad c=n(n+5)/\omega_n$$

$$\leqslant c\delta[f]_{\alpha;x}\int_{|y-\xi|\geqslant\delta}\frac{|\bar{x}-y|^\alpha}{|\hat{x}-y|^{n+1}}dy$$

$$\leqslant c\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha 2^{n+1}\delta[f]_{\alpha;\bar{x}}\int_{|y-\xi|\geqslant\delta}|\xi-y|^{\alpha-n-1}dy$$

因为 $|\bar{x}-y|\leqslant\frac{3}{2}|\xi-y|\leqslant3|\hat{x}-y|$,

$$\leqslant\frac{c'}{1-\alpha}\,2^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}\delta^{\alpha}[f]_{\alpha;\bar{x}},\ c'=n^2(n+5).$$

把各项集中在一起，这样我们有

$$(4.13)\quad |D_{ij}w(\bar{x})-D_{ij}w(x)|\leqslant C_2(R^{-\alpha}|f(x)|+[f]_{\alpha;x}+[f]_{\alpha;\bar{x}})|x-\bar{x}|^{\alpha},$$

其中 C_2 是仅依赖于 n 和 α 的常数. 于是结合(4.12)与(4.13)得到所要求的估计. ▌

附注 如果 Ω_1, Ω_2 是使得 $\Omega_1\subset B_1$, $\Omega_2\supset B_2$ 的区域，并且 $f\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_2)$，而 w 是 f 在 Ω_2 上的 Newton 位势，那么在(4.11)中用 Ω_1、Ω_2 分别代替 B_1、B_2 时引理 4.4 显然仍旧正确；即，

$$|D^2w|'_{0,\alpha;\Omega_1}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;\Omega_2}.$$

Poisson 方程解的 Hölder 估计可直接从引理 4.4 得到.

定理 4.5 设 $u\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $f\in C_0^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$，在 $\mathbb{R}^n$ 中满足 Poisson 方程 $\Delta u=f$. 那么 $u\in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$，并且如果 $B=B_R(x_0)$ 是包含 u 的支集的任一球，我们就有

$$(4.14)\quad \begin{gathered} |D^2u|'_{0,\alpha;B}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;B},\\ |Du|_{0;B}\leqslant CR|f|_{0;B},\\ |u|_{0;B}\leqslant\begin{cases} CR^2|f|_{0;B}, & n>2,\\ CR^2(|\log R|+1)|f|_{0;B}, & n=2,\end{cases}\end{gathered}$$

其中 $C=C(n,\alpha)$.

证明 由表示式(2.17)，

$$(4.15)\quad u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y)f(y)dy,$$

于是从引理 4.1 和 4.4 以及 f 在 B 中有紧支集的事实分别得到 Du 和 D^2u 的估计. 而 $|u|_{0;B}$ 的估计从(4.15)立即得到. ▌

为了得到 Poisson 方程解的下述内部 Hölder 估计，能够通过各种方法去掉 u 具有紧支集这个限制.（也见习题 4.4）

定理 4.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，并设 $u\in C^2(\Omega)$, $f\in C^{\alpha}(\Omega)$ 在 Ω 中满足 Poisson 方程 $\Delta u=f$. 则 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$，并对任何两个

同心球 $B_1=B_R(x_0)$, $B_2=B_{2R}(x_0)\subset\subset\Omega$, 我们有

$$(4.16)\qquad |u|'_{2,\alpha;B_1}\leqslant C(|u|_{0;B_2}+R^2|f|'_{0,\alpha;B_2}),$$

其中 $C=C(n,\alpha)$.

证明 或者用 Green 表示式(2.16), 或者用引理 4.2, 对于 $x\in B_2$, 能把 u 写成 $u(x)=v(x)+w(x)$, 其中 v 在 B_2 中调和, w 是 f 在 B_2 中的 Newton 位势. 由定理 2.10, 引理 4.1 和 4.4, 我们有

$$\begin{aligned}R|Dv|_{0;B_1}+R^2|D^2v|'_{0,\alpha;B_1}&\leqslant C|v|_{0;B_2}\\&\leqslant C(|u|_{0;B_2}+R^2|f|_{0;B_2}).\end{aligned}$$

最后的不等式当 $n>2$ 时直接从 $v=u-w$ 得到. 当 $n=2$ 时可把 u 考虑成 Poisson 方程在 $\mathbb{R}^3$ 的一个球中的解, 用同样的方法得到这个不等式. 结合这些不等式就得到所要的 u 的估计. ∎

内估计(4.16)的一个直接推论是 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 解的任何有界集的二阶导数在紧子区域上的等度连续性. 所以由 Arzela 定理我们得到紧性结果(定理 2.11)推广到 Poisson 方程解的一个扩充.

推论 4.7 当 $f\in C^\alpha(\Omega)$ 时, Poisson 方程 $\Delta u=f$ 在 Ω 中的解的任一有界序列必包含一个子序列, 在紧子区域上一致收敛到一个解.

有时更为可取的是内估计(4.16)的另一(等价的)公式, 用某种内部范数(它在后面是有用的)表出. 对于 $x, y\in\Omega$, Ω 可以是 $\mathbb{R}^n$ 的任何真开子集, 记 $d_x=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$, $d_{x,y}=\min(d_x,d_y)$. 对 $u\in C^k(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$, 定义下面的量, 它们类似于全局拟范数及范数(4.5), (4.6):

$$[u]^*_{k,0;\Omega}=[u]^*_{k;\Omega}=\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\beta|=k}}d_x^k|D^\beta u(x)|,\quad k=0,1,2,\cdots;$$

$$|u|^*_{k;\Omega}=\sum_{j=0}^{k}[u]^*_{j;\Omega};$$

$$(4.17)\qquad [u]^*_{k,\alpha;\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|\beta|=k}}d_{x,y}^{k+\alpha}\frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1;$$

$$|u|^*_{k,\alpha;\Omega}=|u|^*_{k;\Omega}+[u]^*_{k,\alpha;\Omega};$$

在这种记法下,

$$[u]^*_{0;\Omega}=|u|^*_{0;\Omega}=|u|_{0;\Omega}.$$

我们指出 $|u|^*_{k;\Omega}$ 和 $|u|^*_{k,\alpha;\Omega}$ 分别是 $C^k(\Omega)$ 和 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ 的子空间上的范数, 在这些子空间上这些范数是有限的. 如果 Ω 有界并且 $d=\operatorname{diam}\Omega$, 那么显然这些内部范数和全局范数(4.6)有关系

(4.17)′ $$|u|^*_{k,\alpha;\Omega}\leqslant\max(1,\ d^{k+\alpha})|u|_{k,\alpha;\Omega}.$$

如果 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 和 $\sigma=\operatorname{dist}(\Omega',\ \partial\Omega)$, 那么

(4.17)″ $$\min(1,\ \sigma^{k+\alpha})|u|_{k,\alpha;\Omega'}\leqslant|u|^*_{k,\alpha;\Omega}.$$

这里引进量

(4.18) $$|f|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega}=\sup_{x\in\Omega}d^k_x|f(x)|+\sup_{x,y\in\Omega}d^{k+\alpha}_{x,y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

也是方便的. 它是后面要定义的某种范数的一个特殊情形.

从定理 4.6 我们现在能对任意区域导出一个内估计, 它将在第 6 章中以非常相似的方式推广到椭圆型方程上去.

定理 4.8 设 $u\in C^2(\Omega)$, $f\in C^\alpha(\Omega)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集 Ω 中满足 $\Delta u=f$. 则

(4.19) $$|u|^*_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n,\ \alpha)$.

证明 如果或者 $|u|_{0;\Omega}$ 或者 $|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}$ 是无穷, 则估计 (4.19) 是平凡的. 否则对 $x\in\Omega$, $R=\frac{1}{3}d_x$, $B_1=B_R(x)$, $B_2=B_{2R}(x)$, 对任何一阶导数 Du 和二阶导数 D^2u, 有

$$\begin{aligned}d_x|Du(x)|+d_x^2|D^2u(x)|&\leqslant(3R)|Du|_{0;B_1}+(3R)^2|D^2u|_{0;B_1}\\&\leqslant C(|u|_{0;B_2}+R^2|f|'_{0,\alpha;B_2})\quad 由 (4.16)\\&\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).\end{aligned}$$

因此得到

(4.20) $$|u|^*_{2;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

为估计 $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$, 设 $x,\ y\in\Omega$, $d_x\leqslant d_y$. 于是

$$\begin{aligned}&d^{2+\alpha}_{x,y}\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}\\&\quad\leqslant(3R)^{2+\alpha}[D^2u]_{\alpha;B_1}+3^\alpha(3R)^2(|D^2u(x)|+|D^2u(y)|)\end{aligned}$$

$$\leqslant C(|u|_{0;B_2}+R^2|f|'_{0,\alpha;B_2})+6[u]^*_{2;\Omega}\quad 由(4.16)$$
$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega})\quad 由(4.20).$$

于是得到估计(4.19). ∎

前面的结果给出了 Du, D^2u 及 D^2u 的 Hölder 系数在紧子集中的界，用(4.19)的右端的界表出，因此它是 Poisson 方程解的紧致性结果的基础. 特别，推论 4.7 也是定理 4.8 的一个直接推论. 以后将指出后者蕴涵着解和它们的一阶导数和二阶导数在紧子集上的等度连续性.

利用紧致性结果(推论 4.7)，我们现在能够对于无界的 f，导出 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 的一个存在定理.

定理 4.9 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球，f 是一个 $C^\alpha(B)$ 函数，对某个 β, $0<\beta<1$ 有 $\sup\limits_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)|\leqslant N<\infty$. 则存在唯一的函数 $u\in C^2(B)\cap C^0(\bar{B})$ 在 B 中满足 $\Delta u=f$，在 ∂B 上 $u=0$. 而且，u 满足估计

$$\sup_{x\in B} d_x^{-\beta}|u(x)|\leqslant CN, \tag{4.21}$$

其中常数 C 仅依赖于 β.

证明 估计(4.21)可从一个简单的闸函数论证推得. 即，设 $B=B_R(x_0)$, $r=|x-x_0|$，并令

$$w(x)=(R^2-r^2)^\beta.$$

通过直接计算，当 $r<R$ 时我们有

$$\begin{aligned}\Delta w(x)&=-2\beta(R^2-r^2)^{\beta-2}[n(R^2-r^2)+2(1-\beta)r^2]\\&\leqslant -4\beta(1-\beta)R^2(R^2-r^2)^{\beta-2}\\&\leqslant -\beta(1-\beta)R^\beta(R-r)^{\beta-2}.\end{aligned}$$

现在假设在 B 中 $\Delta u=f$，在 ∂B 上 $u=0$. 因为 $d_x=R-r$，由假设我们有

$$|f(x)|\leqslant Nd_x^{\beta-2}=N(R-r)^{\beta-2}\leqslant -C_0N\Delta w,$$

其中 $C_0=[\beta(1-\beta)R^\beta]^{-1}$. 于是

在 B 中 $\qquad \Delta(C_0Nw\pm u)\leqslant 0,$

在 ∂B 上 $\qquad C_0Nw\pm u=0.$

所以，由极大值原理，对于 $x\in B$ 有

$$(4.22)\qquad |u(x)|\leqslant C_0Nw(x)\leqslant CNd_x^\beta,$$

它蕴涵着具有常数 $C=2/\beta(1-\beta)$ 的(4.21).

最后证明 u 的存在性，我们设

$$f_m=\begin{cases}m, & f\geqslant m,\\ f, & |f|\leqslant m,\\ -m, & f\leqslant -m,\end{cases}$$

并设 $\{B_k\}$ 是充满 B 的同心球序列，使得在 B_k 中 $|f|\leqslant k$. 定义 u_m 如下：在 B 中满足 $\Delta u_m=f_m$，在 ∂B 上 $u_m=0$.

由(4.21)我们有

$$\sup_{x\in B} d_x^{-\beta}|u_m(x)|\leqslant C\sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f_m(x)|\leqslant CN,$$

于是序列 $\{u_m\}$ 一致有界，当 $m\geqslant k$ 时在 B_k 中 $\Delta u_m=f$. 因此把推论 4.7 逐次应用到球 B_k 的序列上，故 $\{u_m\}$ 的一个子序列在 B 中收敛到 $C^2(B)$ 函数 u，它在 B 中满足 $\Delta u=f$. 由此可得 $|u(x)|\leqslant CNd_x^\beta$，因此在 ∂B 上 $u=0$. ∎

用反例容易证明如果 $\beta\leqslant 0$ 则定理 4.9 失效. 我们注意这个定理可以推广到比球更为一般的区域上去(见习题 4.6). 同样，对于具有正则点的任意区域，Poisson 方程 $\Delta u=f$ 的古典 Dirichlet 问题对于满足某种可积性条件的无界的 f 是可解的；(见习题 4.3).

4.4. 在边界上的估计

定理 4.8 将在第 6 章中用于线性椭圆方程内部 Hölder 估计的推导. 然而为了建立存在定理所需要的全局估计，我们需要定理 4.8 的一个能够应用到区域 Ω 和半空间的交集上的形式. 首先我们导出 Newton 位势的 Hölder 估计(引理 4.4)的一个适当的推广. 在下文中用 $\mathbb{R}_+^n$ 表示半空间 $x_n>0$，T 是超平面 $x_n=0$；$B_2=B_{2R}(x_0)$，$B_1=B_R(x_0)$ 是中心在 $x_0\in\mathbb{R}_+^n$ 的球，我们设

$$B_2^+=B_2\cap\mathbb{R}_+^n,\ B_1^+=B_1\cap\mathbb{R}_+^n.$$

引理 4.10 设 $f\in C^\alpha(\bar{B}_2^+)$，并设 w 是 B_2^+ 中 f 的 Newton

位势. 则 $w\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_1^+)$ 并且

(4.23) $$|D^2w|'_{0,\alpha;B_1^+}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+},$$

其中 $C=C(n,\alpha)$.

证明 假设 B_2 与 T 相交, 因为否则这个结果已经包含在引理 4.4 中了. 取 $\Omega_0=B_2^+$, 对于 $D_{ij}w$, 表示(4.9)成立. 如果 i 或者 $j\neq n$, 那么边界积分

$$\int_{\partial B_2^+} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y\left(=\int_{\partial B_2^+} D_j\Gamma(x-y)\nu_i(y)ds_y\right)$$

在 T 上的部分为 0, 因为在这里 ν_i 或 $\nu_j=0$. 于是在引理 4.4 中对于 $D_{ij}w$ 的估计 (i 或 $j\neq n$), 当用 B_2^+ 代替 B_2、用 $B_\delta(\xi)\cap B_2^+$ 代替 $B_\delta(\xi)$ 和用 ∂B_2^+-T 代替 ∂B_2 时确实可同前面一样地进行. 最后我们能够从方程 $\Delta w=f$ 以及当 $k=1,\cdots,n-1$ 时 $D_{kk}w$ 的估计来估计 $D_{nn}w$. ∎

定理 4.11 设 $u\in C^2(B_2^+)\cap C^0(\bar{B}_2^+)$, $f\in C^\alpha(\bar{B}_2^+)$, 在 B_2^+ 中满足 $\Delta u=f$, 在 T 上 $u=0$. 则 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_1^+)$ 并且有

(4.24) $$|u|'_{2,\alpha;B_1^+}\leqslant C(|u|_{0,B_2^+}+R^2|f|'_{0,\alpha;B_2}),$$

其中 $C=C(n,\alpha)$.

证明 设 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$, $x^*=(x',-x_n)$ 并且定义

$$f^*(x)=f^*(x',x_n)=\begin{cases}f(x',x_n), & x_n\geqslant 0,\\ f(x',-x_n), & x_n\leqslant 0.\end{cases}$$

假设 B_2 与 T 相交; 否则定理 4.6 蕴涵着(4.24). 令 $B_2^-=\{x\in\mathbb{R}^n|x^*\in B_2^+\}$ 并且 $D=B_2^+\cup B_2^-\cup(B_2\cap T)$. 则 $f^*\in C^\alpha(\bar{D})$ 并且

$$|f^*|'_{0,\alpha,D}\leqslant 2|f|'_{0,\alpha;B_2^+}.$$

现在定义

(4.25) $$w(x)=\int_{B_2^+}[\Gamma(x-y)-\Gamma(x^*-y)]f(y)dy$$
$$=\int_{B_2^+}[\Gamma(x-y)-\Gamma(x-y^*)]f(y)dy,$$

我们有 $w(x',0)=0$(见习题 2.3c) 以及在 B_2^+ 中 $\Delta w=f$. 注意到

$$\int_{B_2^+}\Gamma(x-y^*)f(y)dy=\int_{B_2^-}\Gamma(x-y)f^*(y)dy,$$

于是得到

$$w(x)=2\int_{B_2^+}\Gamma(x-y)f(y)dy-\int_D\Gamma(x-y)f^*(y)dy.$$

设 $w^*(x)=\int_D\Gamma(x-y)f^*(y)dy$, 用引理 4.4 后面的附注(在其中令 $\Omega_1=B_1^+$, $\Omega_2=D$)就有

$$|D^2w^*|'_{0,\alpha;B_1^+}\leqslant C|f^*|'_{0,\alpha;D}\leqslant 2C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}.$$

把此式与引理 4.10 结合起来, 我们得到

$$|D^2w|'_{0,\alpha,B_1^+}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}. \tag{4.26}$$

现在设 $v=u-w$. 则在 B_2^+ 中 $\Delta v=0$, 在 T 上 $v=0$. 通过反射, v 可延拓成 B_2 中的一个调和函数(习题 2.4), 因此从调和函数的内部导数估计(定理 2.10)就推得估计(4.24). ▌

附注 如果除了定理 4.11 的假设外, u 还在 $B_2^+\cup T$ 中具有紧支集, 我们从(4.26)可得到较简单的估计(推广了(4.14))

$$|D^2u|'_{0,\alpha;B_2^+}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}. \tag{4.27}$$

在这种情形下我们有表示

$$u(x)=w(x)=\int_{B_2^+}[\Gamma(x-y)-\Gamma(x^*-y)]f(y)dy. \tag{4.28}$$

得到一个与定理 4.8 相类似的结果将是有用的, 在这个结果中直到一个超平面边界块这个估计都是有效的. 为此目的我们引进与(4.17)和(4.18)相类似的某些部分内部范数和拟范数. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的真开子集, 在 $x_n=0$ 上具有开边界部分 T. 对 $x, y\in\Omega$, 我们记

$$\bar d_x=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega-T),\qquad \bar d_{x,y}=\min(\bar d_x,\ \bar d_y).$$

我们定义下面的量:

$$[u]^*_{k,0;\Omega\cup T}=[u]^*_{k;\Omega\cup T}=\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\beta|=k}}\bar d_x^k|D^\beta u(x)|,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;$$

$$|u|^*_{k;\Omega\cup T}=\sum_{j=0}^k[u]^*_{j;\Omega\cup T};$$

$$[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|\beta|=k}}\bar d_{x,y}^{k+\alpha}\frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1; \tag{4.29}$$

$$|u|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}=|u|^*_{k;\Omega\cup T}+[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T};$$

$$|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}=\sup_{x\in\Omega}\bar{d}^k_x|u(x)|+\sup_{x,y\in\Omega}\bar{d}^{k+\alpha}_{x,y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

我们现在能够叙述:

定理 4.12 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，在 $x_n=0$ 上具有边界部分 T，并设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\Omega\cup T)$，$f\in C^\alpha(\Omega\cup T)$ 在 Ω 中满足 $\Delta u=f$，在 T 上 $u=0$. 则

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}),\tag{4.30}$$

其中 $C=C(n,\alpha)$.

这个结果是从定理 4.11 用与从定理 4.6 得到定理 4.8 的同样方法得到的; 因此略去证明的细节.

定理 4.11 和 4.12 为 Poisson 方程的解在边界的超平面部分上提供了一个正则性结果. 更一般地，如果 Ω 是一个有界区域，$f\in C^\alpha(\bar{\Omega})$，$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\Omega)$，在 Ω 中 $\Delta u=f$ 并且如果 $\partial\Omega$ 和 u 的边值充分光滑，就可推出 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 这个结果实质上是 Kellogg 定理 [KE2]，在第 6 章中将作为我们讨论线性椭圆型方程的一个副产物来建立. 然而在 Ω 是一个球的情形却能够直接从定理 4.11 导出.

定理 4.13 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球，$\bar{B}$ 上的函数 u 和 f 满足 $u\in C^2(\bar{B})\cap C^0(\bar{B})$，$f\in C^\alpha(\bar{B})$，在 B 中 $\Delta u=f$，在 ∂B 上 $u=0$. 则 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{B})$.

证明 通过平移我们可以假设 ∂B 经过原点. 反演映射 $x\to x^*=x/|x|^2$ 是 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 到自身上的一个双边连续、光滑的映射，它把 B 映到半空间 B^* 上. 此外，如果 $u\in C^2(B)\cap C^0(B)$，由

$$v(x)=|x|^{2-n}u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\tag{4.31}$$

定义 u 的 Kelvin 变换，它属于 $C^2(B^*)\cap C^0(\bar{B}^*)$ 并且满足(见习题 4.7)

$$\begin{aligned}\Delta_{x^*}v(x^*)&=|x^*|^{-n-2}\Delta_x u(x),\ x^*\in B^*,\ x\in B\\&=|x^*|^{-n-2}f\left(\frac{x^*}{|x^*|^2}\right),\ x^*\in B^*.\end{aligned}\tag{4.32}$$

因此定理 4.11 能够应用于 Kelvin 变换 v，并且因为通过变换，∂B

的任一点都可以取做原点，故得到$u\in C^{2,\alpha}(\bar{B})$. ∎

推论4.14 设$\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{B})$, $f\in C^{\alpha}(\bar{B})$. 那么 Dirichlet 问题：在B中$\Delta u=f$, 在∂B上$u=\varphi$，对于函数$u\in C^{2,\alpha}(\bar{B})$是唯一可解的.

证明 记$v=u-\varphi$, 这个问题就化为问题：在B中$\Delta v=f-\Delta\varphi$，在∂B上$v=0$，由定理4.3, 这个问题对于$v\in C^2(B)\cap C^0(\bar{B})$是可解的. 所以由定理4.13, 对于$v\in C^{2,\alpha}(\bar{B})$是可解的. ∎

作为定理4.13证明的一个副产物，我们看到引理4.4在下述意义下可以改进，即，如果$f\in C^{\alpha}(\bar{B})$，则它在B中的Newton位势将属于$C^{2,\alpha}(\bar{B})$.

评注

本章的 Hölder 估计本质上属于 Korn [KR1].

在引理4.2中，Hölder 连续性能够用 Dini 连续性代替，于是如果

$$|f(x)-f(y)|\leq\varphi(|x-y|), \tag{4.33}$$

其中

$$\int_{0^+}\varphi(r)r^{-1}dr<\infty,$$

f的 Newton 位势便是 Poisson 方程$\Delta u=f$的一个C^2解；(见习题4.2). 然而，如果f仅仅连续，Newton 位势就不一定二次可微.

加权的内部范数和拟范数(4.17), (4.29)采自 Douglis 和 Nirenberg [DN]. 部分内部范数和拟范数(4.29)的主要作用是通过直接仿效内部估计的证明来简化边界估计的推导；(例如，见定理4.12和引理6.4).

习 题

4.1. (a) 证明(4.7).

(b) 如果$f\in C^{\alpha}(\mathbb{R})$及$g\in C^{\beta}(\Omega)$，证明$f\circ g\in C^{\alpha\beta}(\Omega)$.

4.2. 如果f在Ω中 Dini 连续(即f满足(4.33))，证明引理4.2.

4.3. 如果f的有界性用对某个$p>n/2$, $f\in L^p(\Omega)$代替，证明定理4.3仍然成立；(见引理7.12).

4.4. 应用表示式 (2.17) 于 $v(x)=u(x)\eta(|x-x_0|/R)$，从定理 4.5 推导定理 4.6，其中 η 是满足下列条件的截断函数：$\eta\in C^2(\mathbf{R}),0\leqslant\eta\leqslant 1$，当 $r\leqslant 1$ 时 $\eta(r)=1$，当 $r\geqslant 2$ 时 $\eta(r)=0$.

4.5. 证明 Laplace 方程的立体平均值不等式 (2.6) 到 Poisson 方程的下述推广. 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$，在 Ω 中满足 $\Delta u=(\geqslant,\ \leqslant)f$. 则对于任一球 $B=B_R(y)\subset\Omega$，我们有

$$u(y)=(\leqslant,\ \geqslant)\left\{\frac{1}{|B|}\int_B u\,dx-\frac{1}{n\omega_n}\int_B f(x)\Theta(r,\ R)\,dx\right\},\ r=|x-y|,$$

其中

$$\Theta(r,\ R)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}(r^{2-n}-R^{2-n})-(R^2-r^2)/2R^n, & n>2,\\ \log(R/r)-\dfrac{1}{2}(1-r^2/R^2), & n=2.\end{cases}$$

4.6. 如果用一个任意有界 C^2 区域代替球 B，证明定理 4.9（使用附录的引理 1 和比较函数 $d^3\eta$，其中 η 是一个适当的截断函数，而 d 是距离函数).

4.7. 设在 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中 $\Delta u=f$. 证明：对 $x/|x|^2\in\Omega$，由

$$v(x)=|x|^{2-n}u(x/|x|^2)$$

定义的 u 的 Kelvin 变换满足

$$\Delta v(x)=|x|^{-n-2}f(x/|x|^2).$$

第五章

Banach 空间和 Hilbert 空间

这一章为第 6 和第 8 章研究线性椭圆型方程解的存在性提供所需要的泛函分析材料. 这些材料是已经精通基本泛函分析的读者所熟悉的，但是，我们将只假定读者对初等线性代数及度量空间的理论有一些了解. 除非另外指出，否则本书中用到的一切线性空间都假设定义在实数域上. 可是，如果用复数域代替实数域，这一章的理论几乎可以不改变地搬用.

设 $\mathscr{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. $\mathscr{V}$ 上的范数（模）是一个映射 $p:\mathscr{V}\to\mathbb{R}$（今后我们记 $p(x)=\|x\|=\|x\|_{\mathscr{V}}$, $x\in\mathscr{V}$），满足

（i）对所有的 $x\in\mathscr{V}$, $\|x\|\geqslant 0$, $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

（ii）对所有的 $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in\mathscr{V}$, $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;

（iii）对所有的 x, $y\in\mathscr{V}$, $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$（三角不等式）.

线性空间 $\mathscr{V}$ 赋予范数后称为赋范线性空间. 当度量 ρ 定义成

$$\rho(x,\ y)=\|x-y\|,\ x,\ y\in\mathscr{V}$$

时，赋范线性空间 $\mathscr{V}$ 是度量空间. 从而，如果 $\|x_n-x\|\to 0$，则序列 $\{x_n\}\subset\mathscr{V}$ 收敛于元素 $x\in\mathscr{V}$. 还有，如果当 $m, n\to\infty$ 时 $\|x_n-x_m\|\to 0$，则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 如果 $\mathscr{V}$ 完备，也就是每一 Cauchy 序列收敛，则称 $\mathscr{V}$ 为 Banach 空间.

例 (i) 在标准范数

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\ x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

之下，Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 是 Banach 空间.

(ii) 对于有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，在第 4 章中引进的等价范数 (4.6) 或 (4.6)$'$ 之下，Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 是 Banach 空间;（见习题 5.1, 5.2）.

(iii) Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$(见第 7 章).

在偏微分方程中存在定理常常可化成适当函数空间中的方程的可解性. 对于线性椭圆型方程的 Schauder 理论, 我们将使用 Banach 空间中算子方程的两个基本存在定理, 即压缩映象原理和 Fredholm 二择一性质.

5.1. 压缩映象原理

赋范线性空间 $\mathscr{V}$ 到自身的映射 T 称为**压缩映射**, 如果存在一数 $\theta<1$ 使得

(5.1) 对所有的 $x, y\in\mathscr{V}$, $\|Tx-Ty\|\leqslant\theta\|x-y\|$.

定理 5.1 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 中的压缩映射 T 有唯一的不动点, 即方程 $Tx=x$ 存在唯一的解 $x\in\mathscr{B}$.

证明 (逐次逼近法.) 设 $x_0\in\mathscr{B}$ 并按照 $x_n=T^n x_0, n=1,2,\cdots$ 定义序列 $\{x_n\}\subset\mathscr{B}$. 如果 $n\geqslant m$, 则根据三角不等式得到

$$\begin{aligned}\|x_n-x_m\|&\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\|x_j-x_{j-1}\|\\&=\sum_{j=m+1}^{n}\|T^{j-1}x_1-T^{j-1}x_0\|\\&\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\theta^{j-1}\|x_1-x_0\|\ (\text{根据}(5.1))\\&\leqslant\frac{\|x_1-x_0\|\theta^m}{1-\theta}\to 0\quad(\text{当 } m\to\infty).\end{aligned}$$

从而序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 并且由于 $\mathscr{B}$ 完备, 它收敛于一元素 $x\in\mathscr{B}$. 显然 T 也是连续映射, 所以还有

$$Tx=\lim Tx_n=\lim x_{n+1}=x,$$

这个 x 就是 T 的不动点. x 的唯一性直接从(5.1)得出. ∎

在定理 5.1 的叙述中, 空间 $\mathscr{B}$ 显然能用任一闭子集代替.

5.2. 连续性方法

如果 $\mathscr{V}_1$ 和 $\mathscr{V}_2$ 都是赋范线性空间. 线性映射 $T:\mathscr{V}_1\to\mathscr{V}_2$ 是**有界的**, 如果量

(5.2)
$$\|T\|=\sup_{x\in\mathscr{V}_1,x\neq 0}\frac{\|Tx\|_{\mathscr{V}_2}}{\|x\|_{\mathscr{V}_1}}$$
是有限的. 容易证明映射 T 有界当且仅当它是连续的. 有界线性映射的可逆性有时可通过下述定理从一个类似映射的可逆性推知,这个定理在应用中通称连续性方法.

定理 5.2 设 $\mathscr{B}$ 是 Banach 空间, $\mathscr{V}$ 是赋范线性空间, 并设 L_0, L_1 是从 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{V}$ 中的有界线性算子. 对每一 $t\in[0, 1]$, 令

$$L_t=(1-t)L_0+tL_1,$$

并设存在一常数 C 使得对 $t\in[0, 1]$, 成立

(5.3)
$$\|x\|_{\mathscr{B}}\leqslant C\|L_tx\|_{\mathscr{V}},$$

则 L_1 把 $\mathscr{B}$ 映上 $\mathscr{V}$ 当且仅当 L_0 把 $\mathscr{B}$ 映上 $\mathscr{V}$.

证明 假设对某 $s\in[0, 1]$, L_s 是映上的. 按(5.3), L_s 是一对一的,所以逆映射 $L_s^{-1}:\mathscr{V}\to\mathscr{B}$ 存在. 对 $t\in[0, 1]$ 和 $y\in\mathscr{V}$,方程 $L_tx=y$ 等价于方程

$$L_sx=y+(L_s-L_t)x=y+(t-s)L_0x-(t-s)L_1x,$$

而后者又等价于方程

$$x=L_s^{-1}y+(t-s)L_s^{-1}(L_0-L_1)x.$$

如果
$$|s-t|<\delta=[C(\|L_0\|+\|L_1\|)]^{-1},$$
由 $Tx=L_s^{-1}y+(t-s)L_s^{-1}(L_0-L_1)x$ 给出的 $\mathscr{B}$ 到自身中的映射 T 显然是一个压缩映射, 所以映射 L_t 对所有满足 $|s-t|<\delta$ 的 $t\in[0, 1]$ 是映上的. 把 $[0, 1]$ 区间分成长度小于 δ 的子区间, 我们看出: 只要对任一固定的 $t\in[0, 1]$, 特别是对于 $t=0$ 或 $t=1$, 映射 L_t 是映上的,则对一切 $t\in[0, 1]$, L_t 也是映上的. ∎

5.3. Fredholm 二择一性质

设 $\mathscr{V}_1$ 和 $\mathscr{V}_2$ 都是赋范线性空间. 映射 $T:\mathscr{V}_1\to\mathscr{V}_2$ 称为紧的(或完全连续的), 如果 T 把 $\mathscr{V}_1$ 中有界集映为 $\mathscr{V}_2$ 中的相对紧集,或等价地: T 把 $\mathscr{V}_1$ 中有界序列映为 $\mathscr{V}_2$ 中含有收敛子序列的序列. 由此得出紧的线性映射也是连续的,但一般说来其逆不真,除非 $\mathscr{V}_2$ 是有限维的. Fredholm 二择一性质(或 Riesz-Schauder 原

理)涉及空间 $\mathscr{V}$ 到自身的紧线性算子，并且是有限维空间的线性映射理论的一个推广.

定理 5.3 设 T 是赋范线性空间 $\mathscr{V}$ 到自身中的一紧线性映射. 那么，或者(i)齐次方程

$$x-Tx=0$$

有非平凡解 $x\in\mathscr{V}$，或者(ii)对每个 $y\in\mathscr{V}$，方程

$$x-Tx=y$$

有唯一确定的解 $x\in\mathscr{V}$. 而且，在情形(ii)，已断定其存在性的算子 $(I-T)^{-1}$ 也是有界的.

定理 5.3 的证明依赖于以下 Riesz 的简单结果.

引理 5.4 设 $\mathscr{V}$ 是赋范线性空间，$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{V}$ 的真闭子空间. 则对任一 $\theta<1$，存在一个元素 $x_\theta\in\mathscr{V}$，满足 $\|x_\theta\|=1$ 且 $\operatorname{dist}(x_\theta, \mathscr{M})\geqslant\theta$.

证明 设 $x\in\mathscr{V}-\mathscr{M}$. 因 $\mathscr{M}$ 是闭的，我们得到

$$\operatorname{dist}(x, \mathscr{M})=\inf_{y\in\mathscr{M}}\|x-y\|=d>0.$$

从而存在一个元素 $y_\theta\in\mathscr{M}$ 使得

$$\|x-y_\theta\|\leqslant\frac{d}{\theta},$$

这样一来，定义

$$x_\theta=\frac{x-y_\theta}{\|x-y_\theta\|},$$

我们得到 $\|x_\theta\|=1$ 且对任一 $y\in\mathscr{M}$,

$$\|x_\theta-y\|=\frac{\|x-y_\theta-\|y_\theta-x\|y\|}{\|y_\theta-x\|}\geqslant\frac{d}{\|y_\theta-x\|}\geqslant\theta. \blacksquare$$

如果 $\mathscr{V}=\mathbb{R}^n$，显然选 x_θ 与 $\mathscr{M}$ 正交，可取 $\theta=1$. 在任一 Hilbert 空间中这也是可能的，但是一般说来，引理 5.4 虽然肯定了“接近正交”于 $\mathscr{M}$ 的元素的存在性，却不能改进到允许 $\theta=1$.

定理 5.3 的证明 把我们的证明分成四步是合适的.

(1) 设 $S=I-T$，其中 I 是恒等映射，并设

$$\mathscr{N}=S^{-1}(0)=\{x\in\mathscr{V}\mid Sx=0\}$$

是 S 的零空间. 则存在常数 K 使得对所有的 $x\in\mathscr{V}$ 有

(5.4) $$\text{dist}(x, \mathscr{N}) \leqslant K\|Sx\|.$$

证明 设结果不真．则存在一个序列$\{x_n\}\subset\mathscr{V}$满足$\|Sx_n\|=1$和$d_n=\text{dist}(x_n, \mathscr{N})\to\infty$．选一个序列$\{y_n\}\subset\mathscr{N}$使得

$$d_n\leqslant\|x_n-y_n\|\leqslant 2d_n.$$

于是如果

$$z_n=\frac{x_n-y_n}{\|x_n-y_n\|},$$

便有$\|z_n\|=1$和$\|Sz_n\|\leqslant d_n^{-1}\to 0$，因此序列$\{Sz_n\}$收敛于0．但是因为$T$紧，如有必要，通过讨论子序列，可以假定序列$\{Tz_n\}$收敛于一个元素$y_0\in\mathscr{V}$．因为$z_n=(S+T)z_n$，于是我们也得到$\{z_n\}$收敛于$y_0$，从而$y_0\in\mathscr{N}$．但是这导致矛盾，因为

$$\begin{aligned}\text{dist}(z_n, \mathscr{N}) &= \inf_{y\in\mathscr{N}}\|z_n-y\|\\ &=\|x_n-y_n\|^{-1}\inf_{y\in\mathscr{N}}\|x_n-y_n-\|x_n-y_n\|y\|\\ &=\|x_n-y_n\|^{-1}\text{dist}(x_n, \mathscr{N})\geqslant\frac{1}{2}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

(2) 设$\mathscr{R}=S(\mathscr{V})$是$S$的值域．则$\mathscr{R}$是$\mathscr{V}$的闭子空间．

证明 设$\{x_n\}$是$\mathscr{V}$中一序列，它们的象$\{Sx_n\}$收敛于元素$y\in\mathscr{V}$．为了证明$\mathscr{R}$是闭的，我们必须证明对某元素$x\in\mathscr{V}$，$y=Sx$．由我们以前的结果，序列$\{d_n\}$有界，这里$d_n=\text{dist}(x_n, \mathscr{N})$．取$y_n\in\mathscr{N}$如前，并记$w_n=x_n-y_n$，从而我们得到序列$\{w_n\}$有界，而序列$\{Sw_n\}$收敛于$y$．因为$T$是紧的，如有必要，通过讨论子序列，我们可以假定序列$\{Tw_n\}$收敛于一个元素$w_0\in\mathscr{V}$．所以序列$\{w_n\}$本身收敛于$y+w_0$，又根据S的连续性，我们得到$S(y+w_0)=y$．从而$\mathscr{R}$是闭的．$\blacksquare$

(3) 如果$\mathscr{N}=\{0\}$，则$\mathscr{R}=\mathscr{V}$．也就是说，如果定理5.3中情况(i)不发生，则情况(ii)为真．

证明 根据我们以前的结果，由$\mathscr{R}_j=S^j(\mathscr{V})$，$j=1, 2, \cdots$定义的集合$\mathscr{R}_j$构成$\mathscr{V}$的一个非增的闭子空间序列．假设这些空间中没有两个重合．那么每一个都是它前一个的真子空间．所以按照引理5.4，存在序列$\{y_n\}\subset\mathscr{V}$使得$y_n\in\mathscr{R}_n$，$\|y_n\|=1$且

$$\operatorname{dist}(y_n, \mathscr{R}_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

这样，如果 $n>m$ 就有

$$Ty_m - Ty_n = y_m + (-y_n - Sy_m + Sy_n) = y_m - y$$

对某个 $y \in \mathscr{R}_{m+1}$ 成立．所以 $\|Ty_m - Ty_n\| \geqslant \frac{1}{2}$，与 T 的紧性矛盾．从而存在一个整数 k 使得 $\mathscr{R}_j = \mathscr{R}_k$ 对所有的 $j \geqslant k$ 成立．到这时我们还没有利用条件：$\mathscr{N} = \{0\}$．现在设 y 是 $\mathscr{V}$ 的一个任意的元素．于是 $S^k y \in \mathscr{R}_k = \mathscr{R}_{k+1}$，从而对某个 $x \in \mathscr{V}$，$S^k y = S^{k+1} x$ 成立．因此 $S^k(y - Sx) = 0$，因为 $S^{-k}(0) = S^{-1}(0) = 0$，从而 $y = Sx$．所以对所有的 j，$\mathscr{R} = \mathscr{R}_j = \mathscr{V}$ 成立．】

(4) 如果 $\mathscr{R} = \mathscr{V}$，则 $\mathscr{N} = \{0\}$．从而或者情况(i)或者情况(ii)发生．

证明 这时令 $\mathscr{N}_j = S^{-j}(0)$ 来定义一个非降闭子空间序列 $\{\mathscr{N}_j\}$．$\mathscr{N}_j$ 的闭性由 S 的连续性推出．利用与第(3)步用过的基于引理 5.4 的类似论证法，我们得到对所有的 $j \geqslant$ 某个整数 l，$\mathscr{N}_j = \mathscr{N}_l$ 成立．于是，如果 $\mathscr{R} = \mathscr{V}$，任一元素 $y \in \mathscr{N}_l$ 将对某个 $x \in \mathscr{V}$ 满足 $y = S^l x$．从而 $S^{2l} x = 0$，因此 $x \in \mathscr{N}_{2l} = \mathscr{N}_l$，由此 $y = S^l x = 0$．这样第(4)步证完．】

在情况(ii)中算子 $S^{-1} = (I - T)^{-1}$ 的有界性从第(1)步与 $\mathscr{N} = \{0\}$ 推出．注意，在第(1)步和第(2)步一开头就取 $\mathscr{N} = \{0\}$ 能使证明略微简化，而且第(4)步与前面的步骤是无关的．这样，定理 5.3 完全得证．】

从定理 5.3 和引理 5.4 可推出紧线性算子谱的某些性质．如果 $\mathscr{V}$ 中存在非零元素 x（称为特征向量）满足 $Tx = \lambda x$，就称数 λ 为 T 的特征值．很明显属于不同特征值的特征向量必然是线性无关的．算子 $S_\lambda = \lambda I - T$ 的零空间的维数称为 λ 的重数．如果 $\lambda \neq 0$，$\in \mathbb{R}$ 不是 T 的特征值，从定理 5.3 推出，预解算子 $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ 是有明确定义的，把 $\mathscr{V}$ 映上自身的有界线性映射．从引理 5.4 我们可以推出下述结果．

定理 5.5 赋范线性空间到自身中的紧线性映射 T 具有特征值的一个可数集合，这些特征值没有极限点，$\lambda=0$ 可能是例外。每一非零特征值有有限的重数.

证明 假设存在特征值序列 $\{\lambda_n\}$ 满足 $\lambda_n\to\lambda\neq 0$，这些 λ_n 以及对应的线性无关的特征向量序列 $\{x_n\}$ 不一定互不相同. 设 $\mathscr{M}_n$ 是由 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 张成的闭子空间. 由引理 5.4，存在序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\in\mathscr{M}_n$, $\|y_n\|=1$ 和 $\operatorname{dist}(y_n, \mathscr{M}_{n-1})\geqslant\frac{1}{2}$, $(n=2, 3, \cdots)$.

如果 $n>m$，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_n^{-1}Ty_n-\lambda_m^{-1}Ty_m&=y_n+(-y_m-\lambda_n^{-1}S_{\lambda_n}y_n+\lambda_m^{-1}S_{\lambda_m}y_m)\\&=y_n-z,\quad \text{其中 } z\in\mathscr{M}_{n-1}.\end{aligned}$$

因为，如果 $y_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_jx_j$，则

$$y_n-\lambda_n^{-1}Ty_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_j(1-\lambda_n^{-1}\lambda_j)x_j\in\mathscr{M}_{n-1},$$

类似地，$S_{\lambda_m}y_m\in\mathscr{M}_m$. 因而我们有

$$\|\lambda_n^{-1}Ty_n-\lambda_m^{-1}Ty_m\|\geqslant\frac{1}{2},$$

和前提 $\lambda_n\to\lambda\neq0$ 结合起来，它与算子 T 的紧性矛盾. 所以我们开始的假设是错误的，这蕴涵着定理的正确性. ∎

5.4. 对偶空间和共轭

为了完整起见，我们在这里指出几个在本书中仅在 Hilbert 空间中将被证明和用到的结果. 设 $\mathscr{V}$ 是赋范线性空间. $\mathscr{V}$ 上的泛函是一个从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathbb{R}$ 中的映射. $\mathscr{V}$ 上全体有界线性泛函的空间称为 $\mathscr{V}$ 的对偶空间，并记为 $\mathscr{V}^*$. 容易证明在范数

$$\|f\|_{\mathscr{V}^*}=\sup_{x\neq0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\tag{5.5}$$

之下 $\mathscr{V}^*$ 是一个 Banach 空间.

例 $\mathbb{R}^n$ 的对偶空间同构于 $\mathbb{R}^n$ 自身.

$\mathscr{V}^*$ 的对偶空间，记为 $\mathscr{V}^{**}$，称为 $\mathscr{V}$ 的二次对偶. 很明显，对 $f\in\mathscr{V}^*$，用 $Jx(f)=f(x)$ 给出的映射 $J:\mathscr{V}\to\mathscr{V}^{**}$ 是 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{V}^{**}$ 中

的一个保范的线性一对一映射. 如果 $J\mathscr{V}=\mathscr{V}^{**}$, 则称 $\mathscr{V}$ 是自反的. 自反的 Banach 空间具有某些性质, 使得它一般说来比 Banach 空间更适用于微分方程. 在第 7 章中要引进的 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 当 $p>1$ 时是自反的, 但第 4 章的 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 是非自反的.

设 T 是两个 Banach 空间 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$ 之间的有界线性映射. T 的共轭, 记为 T^*, 是

$$(T^*g)(x)=g(Tx),\ g\in\mathscr{B}_2^*,\ x\in\mathscr{B}_1 \tag{5.6}$$

定义的 $\mathscr{B}_2^*$ 和 $\mathscr{B}_1^*$ 之间的一个有界线性映射. 设 $\mathscr{N}, \mathscr{R}, \mathscr{N}^*, \mathscr{R}^*$ 分别表示 T, T^* 的零空间和值域, 只要 $\mathscr{R}$ 是闭的, 就成立关系式

$$\mathscr{R}=\mathscr{N}^{*\perp}=\{y\in\mathscr{B}_2\,|\,g(y)=0,\text{对所有的 } g\in\mathscr{N}^*\},$$

$$\mathscr{R}^*=\mathscr{N}^{\perp}=\{f\in\mathscr{B}_1^*\,|\,f(x)=0,\text{ 对所有的 } x\in\mathscr{N}\}.$$

还有, T 的紧性蕴涵 T^* 的紧性. 这两个结果的证明, 参看, 例如 [YC]. 从而我们看出, 如果对 Banach 空间 $\mathscr{B}$ Fredholm 二择一性质的第 (i) 种情况成立, 那么方程 $x-Tx=y$ 对 $x\in\mathscr{B}$ 可解当且仅当对满足 $T^*g=g$ 的所有 $g\in\mathscr{B}^*$, 成立 $g(y)=0$. 最后的这一结果将直接在 Hilbert 空间中建立.

5.5. Hilbert 空间

我们在这里介绍第 8 章中处理线性椭圆算子所需要的 Hilbert 空间理论. 线性空间 $\mathscr{V}$ 上的数(或内)积是一个映射 q: $\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ (今后我们记 $q(x, y)=(x, y)$ 或 $(x, y)_{\mathscr{V}}$, $x, y\in\mathscr{V}$), 它满足

(i) 对所有的 $x, y\in\mathscr{V}$, $(x, y)=(y, x)$.

(ii) 对所有的 $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbb{R}$, $x_1, x_2, y\in\mathscr{V}$,

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, y)=\lambda_1(x_1, y)+\lambda_2(x_2, y).$$

(iii) 对所有的 $x\neq0$, $\in\mathscr{V}$, $(x, x)>0$.

线性空间 $\mathscr{V}$ 赋予内积后称为内积空间或准 Hilbert 空间. 对于 $x\in\mathscr{V}$, 记 $\|x\|=(x, x)^{1/2}$, 我们有下述不等式:

Schwarz 不等式

(5.7) $$|(x,\ y)|\leqslant\|x\|\|y\|;$$

三角不等式

(5.8) $$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|;$$

平行四边形定律

(5.9) $$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

特别地，内积空间 $\mathscr{V}$ 是赋范线性空间．完备的内积空间定义为 Hilbert 空间．

例 (i) 在内积

$$(x,\ y)=\sum x_i y_i,\quad x=(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)$$

之下，Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 是 Hilbert 空间．

(ii) Sobolev 空间 $W^{k,2}(\Omega)$；(见第 7 章)．

5.6. 投影定理

内积空间中的两元素 x 和 y，如果 $(x,\ y)=0$，则称为正交的(或垂直的)．给定内积空间的子集 $\mathscr{M}$，我们用 $\mathscr{M}^{\perp}$ 表示与 $\mathscr{M}$ 的每个元素都正交的元素的集合．下述定理断言在 Hilbert 空间中任一元素到一个闭子空间上的正交投影的存在性．

定理 5.6 设 $\mathscr{M}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的一个闭子空间．则对每一 $x\in\mathscr{H}$，有 $x=y+z$，其中 $y\in\mathscr{M}$，$z\in\mathscr{M}^{\perp}$．

证明 如果 $x\in\mathscr{M}$，则置 $y=x$，$z=0$．所以可假设 $\mathscr{M}\neq\mathscr{H}$，$x\notin\mathscr{M}$．定义

$$d=\operatorname{dist}(x,\ \mathscr{M})=\inf_{y\in\mathscr{M}}\|x-y\|>0$$

并设 $\{y_n\}\subset\mathscr{M}$ 是极小化序列，即 $\|x-y_n\|\to d$．运用平行四边形定律我们得到

$$4\left\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\right\|^2+\|y_m-y_n\|^2=2(\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2),$$

因为 $\frac{1}{2}(y_m+y_n)\in\mathscr{M}$，所以当 $m,n\to\infty$ 时，有 $\|y_m-y_n\|\to 0$；即序列 $\{y_n\}$ 收敛(因为 $\mathscr{H}$ 完备)．因为 $\mathscr{M}$ 是闭的，还有 $y=\lim y_n\in\mathscr{M}$ 及 $\|x-y\|=d$．

现在记 $x=y+z$, 其中 $z=x-y$. 为完成证明, 我们必须证明 $z\in\mathscr{M}^{\perp}$. 对任一 $y'\in\mathscr{M}$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$, 我们有 $y+\alpha y'\in\mathscr{M}$, 因而

$$d^2\leqslant\|x-y-\alpha y'\|^2=(z-\alpha y',\ z-\alpha y')$$
$$=\|z\|^2-2\alpha(y',\ z)+\alpha^2\|y'\|^2.$$

于是, 因为 $\|z\|=d$, 我们得到对所有的 $\alpha>0$,

$$|(y',\ z)|\leqslant\frac{\alpha}{2}\|y'\|^2,$$

从而对所有的 $y'\in\mathscr{M}$, $(y',\ z)=0$. 所以 $z\in\mathscr{M}^{\perp}$. ▌

元素 y 称为 x 在 $\mathscr{M}$ 上的正交投影. 定理5.6还证明了 $\mathscr{H}$ 的任一真闭子空间与 $\mathscr{H}$ 的某个元素正交.

5.7. Riesz 表示定理

Riesz 表示定理规定了 Hilbert 空间上的有界线性泛函作为内积的这个极为有用的特性.

定理 5.7 对 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的每一个有界线性泛函 F, 存在唯一确定的元素 $f\in\mathscr{H}$, 使得对所有的 $x\in\mathscr{H}$, 有 $F(x)=(x,\ f)$, 并且 $\|F\|=\|f\|$.

证明 设 $\mathscr{N}=\{x|F(x)=0\}$ 是 F 的零空间. 如果 $\mathscr{N}=\mathscr{H}$, 取 $f=0$, 结果得证. 否则, 因为 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{H}$ 的闭子空间, 按定理5.6, 存在一个元素 $z\neq0$, $\in\mathscr{H}$, 使得对所有的 $x\in\mathscr{N}$, $(x,\ z)=0$. 所以 $F(z)\neq0$, 此外, 对任何 $x\in\mathscr{H}$,

$$F\left(x-\frac{F(x)}{F(z)}z\right)=F(x)-\frac{F(x)}{F(z)}F(z)=0,$$

因而元素 $x-\dfrac{F(x)}{F(z)}z\in\mathscr{N}$. 这意味着

$$\left(x-\frac{F(x)}{F(z)}z,\ z\right)=0,$$

即,

$$(x,\ z)=\frac{F(x)}{F(z)}\|z\|^2,$$

所以 $F(x)=(f,\ x)$, 其中 $f=zF(z)/\|z\|^2$. f 的唯一性是容易证明的, 留给读者. 为证明 $\|F\|=\|f\|$, 根据 Schwarz 不等式, 我们首先有

$$\|F\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|(x,f)|}{\|x\|}\leqslant\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|\|f\|}{\|x\|}=\|f\|;$$

其次，$$\|f\|^2=(f,f)=F(f)\leqslant\|F\|\|f\|,$$

因而 $\|f\|\leqslant\|F\|$，所以 $\|F\|=\|f\|$. ∎

定理 5.7 表明，Hilbert 空间的对偶空间可与空间自身恒等，从而 Hilbert 空间是自反的.

5.8. Lax-Milgram 定理

Riesz 表示定理对于处理变分形式的线性椭圆型方程，即它们是某个重积分的 Euler-Lagrange 方程，是足够了. 对于一般散度结构的方程，我们需要一个属于 Lax-Milgram 的定理，它稍微推广了定理 5.7 的结果. Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的双线性形式 $\mathbf{B}$ 称为有界的，如果存在一个常数 K 使得对所有的 $x, y\in\mathscr{H}$,

$$|\mathbf{B}(x,y)|\leqslant K\|x\|\|y\|; \tag{5.10}$$

$\mathbf{B}$ 称为强迫的，如果存在一个数 $\nu>0$ 使得对所有的 $x\in\mathscr{H}$,

$$\mathbf{B}(x,x)\geqslant\nu\|x\|^2. \tag{5.11}$$

内积本身就是有界、强迫的双线性形式的一个特例.

定理 5.8 设 $\mathbf{B}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的有界强迫的双线性形式. 则对每一有界线性泛函 $F\in\mathscr{H}^*$，存在唯一的元素 $f\in\mathscr{H}$，使得对所有 $x\in\mathscr{H}$,

$$\mathbf{B}(x,f)=F(x).$$

证明 由于定理 5.7，存在一个用 $\mathbf{B}(x,f)=(x,Tf)$，对所有 $x\in\mathscr{H}$ 定义的线性映射 $T:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$. 而且根据(5.10)，$\|Tf\|\leqslant K\|f\|$，因而 T 是有界的. 由(5.11)我们得到 $\nu\|f\|^2\leqslant\mathbf{B}(f,f)=(f,Tf)\leqslant\|f\|\|Tf\|$，因而对所有的 $f\in\mathscr{H}$,

$$\nu\|f\|\leqslant\|Tf\|\leqslant K\|f\|.$$

这个估计蕴涵 T 是一对一的，有闭的值域（见习题 5.3）而且 T^{-1} 是有界的. 假设 T 不是映上 $\mathscr{H}$ 的，则存在一个元素 $z\neq 0$，对所有的 $f\in\mathscr{H}$ 满足 $(z,Tf)=0$. 选择 $f=z$，我们得到 $(z,Tz)=\mathbf{B}(z,z)=0$，按(5.11)它蕴涵 $z=0$. 从而 T^{-1} 是 $\mathscr{H}$ 上有界线性映射. 于

是对所有的 $x\in\mathscr{H}$ 和某个唯一的 $g\in\mathscr{H}$, 我们有 $F(x)=(x, g)=\mathbf{B}(x, T^{-1}g)$ 成立, 取 $f=T^{-1}g$, 结论得证. ▌

5.9. Hilbert 空间中的 Fredholm 二择一性质

定理 5.3 和定理 5.5 当然可用到 Hilbert 空间中的紧算子上去. 现在我们对 Hilbert 空间来导出先前关于 Banach 空间中共轭的附注. 借助定理 5.7, 我们用略微不同的方式来定义共轭. 如果 T 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的有界线性算子, 它的共轭 T^* 由下式定义: 对所有的 $x, y\in\mathscr{H}$,

$$(5.12)\qquad (T^*y, x)=(y, Tx),$$

T^* 也是 $\mathscr{H}$ 中的有界线性映射. 显然, $\|T^*\|=\|T\|$, 其中

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\|Tx\|/\|x\|.$$

引理 5.9 如果 T 是紧的, 则 T^* 也是紧的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中满足 $\|x_n\|\leqslant M$ 的序列. 则

$$\begin{aligned}\|T^*x_n\|^2&=(T^*x_n, T^*x_n)=(x_n, TT^*x_n)\\&\leqslant\|x_n\|\|TT^*x_n\|\leqslant M\|T\|\|T^*x_n\|,\end{aligned}$$

因而 $\|T^*x_n\|\leqslant M\|T\|$; 即是说, 序列 $\{T^*x_n\}$ 也是有界的. 所以, 因 T 是紧的, 如有必要通过讨论子序列, 我们可假定序列 $\{TT^*x_n\}$ 收敛. 但是这样, 当 $m, n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|T^*(x_n-x_m)\|^2&=(T^*(x_n-x_m), T^*(x_n-x_m))\\&=(x_n-x_m, TT^*(x_n-x_m))\\&\leqslant 2M\|TT^*(x_n-x_m)\|\to 0.\end{aligned}$$

因为 $\mathscr{H}$ 完备, 于是序列 $\{T^*x_n\}$ 收敛, 所以 T^* 是紧的. ▌

引理 5.10 T 的值域的闭包是 T^* 的零空间的正交补.

证明 设 $\mathscr{R}=T$ 的值域, $\mathscr{N}^*=T^*$ 的零空间. 如果 $y=Tx$, 则对所有的 $f\in\mathscr{N}^*$, 我们有 $(y, f)=(Tx, f)=(x, T^*f)=0$, 所以 $\mathscr{R}\subset\mathscr{N}^{*\perp}$, 又因 $\mathscr{N}^{*\perp}$ 是闭的, 于是 $\overline{\mathscr{R}}\subset\mathscr{N}^{*\perp}$. 现在假设 $y\notin\overline{\mathscr{R}}$. 根据投影定理(定理 5.6), $y=y_1+y_2$, 其中 $y_1\in\overline{\mathscr{R}}$, $y_2\in\overline{\mathscr{R}}^{\perp}-\{0\}$. 从而对所有的 $x\in\mathscr{H}$, 有 $(y_2, Tx)=(T^*y_2, x)=0$, 因此 $y_2\in\mathscr{N}^*$. 所以 $(y_2, y)=(y_2, y_1)+\|y_2\|^2=\|y_2\|^2$, 并且 $y\notin\mathscr{N}^{*\perp}$. ▌

注意引理 5.10 无论 T 是否紧的都是有效的．把引理 5.9 与引理 5.10 同定理 5.3 与定理 5.5 结合起来，就得到下面关于 Hilbert 空间中紧算子的 Fredholm 二择一性质．

定理 5.11 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间，T 是 $\mathscr{H}$ 到自身中的紧映射．则存在一个可数集 $\Lambda\subset\mathbb{R}$，它没有极限点，但 $\lambda=0$ 可能为例外，使得：如果 $\lambda\neq 0$，$\lambda\notin\Lambda$，那么方程

$$(5.13)\qquad \lambda x-Tx=y,\ \lambda x-T^*x=y$$

对每一 $y\in\mathscr{H}$ 都有唯一确定的解 $x\in\mathscr{H}$，并且逆映射 $(\lambda I-T)^{-1}$，$(\lambda I-T^*)^{-1}$ 是有界的．如果 $\lambda\in\Lambda$，映射 $\lambda I-T$，$\lambda I-T^*$ 的零空间有正的有限的维数，并且方程(5.13)可解，当且仅当在第一种情况下 y 与 $\lambda I-T^*$ 的零空间正交，而在另一种情况下 y 与 $\lambda I-T$ 的零空间正交．

5.10. 弱紧性

设 $\mathscr{V}$ 是一赋范线性空间．如果 $f(x_n)\to f(x)$ 对于对偶空间 $\mathscr{V}^*$ 中所有的 f 成立，则称序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于元素 $x\in\mathscr{V}$．根据 Riesz 表示定理(定理 5.7)，Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中一序列 $\{x_n\}$ 如果对所有的 $y\in\mathscr{H}$，成立 $(x_n, y)\to(x, y)$，就弱收敛于 $x\in\mathscr{H}$．下面的结果在 Hilbert 空间中研究微分方程时是有用的．

定理 5.12 Hilbert 空间中的有界序列包含弱收敛的子序列．

证明 我们首先假设 $\mathscr{H}$ 是可分的，并设序列 $\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ 满足 $\|x_n\|\leqslant M$．设 $\{y_m\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的稠密子集．通过 Cantor 对角线手续，我们得到初始序列的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $(x_{n_k}, y_m)\to\alpha_m\in\mathbb{R}$ $(k\to\infty)$．从而用 $f(y_m)=\alpha_m$ 定义的映射 $f:\{y_m\}\to\mathbb{R}$ 可延拓为 $\mathscr{H}$ 上的有界线性泛函 f，所以，根据 Riesz 表示定理，存在一个元素 $x\in\mathscr{H}$，对所有的 $y\in\mathscr{H}$，当 $k\to\infty$ 时满足 $(x_{n_k}, y)\to f(y)=(x, y)$．所以子序列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 x．

为把结论推广到任意的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$，我们设 $\mathscr{H}_0$ 是序列 $\{x_n\}$ 的线性包的闭包．那么，根据我们前面的论证，存在一个子序

列 $\{x_{n_k}\}\subset\mathscr{H}_0$ 和一个元素 $x\in\mathscr{H}_0$, 对所有的 $y\in\mathscr{H}_0$, 满足 $(x_{n_k}, y)\to(x, y)$. 但是按照定理 5.5, 我们对任意的 $y\in\mathscr{H}$, 有 $y=y_0+y_1$, 其中 $y_0\in\mathscr{H}_0$, $y_1\in\mathscr{H}_0^{\perp}$. 所以对所有的 $y\in\mathscr{H}$, 有 $(x_{n_k}, y)=(x_{n_k}, y_0)\to(x, y_0)=(x, y)$, 因而象要求的一样 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 x. ∎

定理 5.12 证明的第一部分能自动地推广到具有可分对偶空间的自反 Banach 空间上去(见习题 5.4). 然而对任意自反 Banach 空间, 这个结论也是成立的(见[YO]).

评注

本章的材料是标准的, 能够在诸如[DS], [EW]和[YO]等泛函分析教科书中找到.

习　题

5.1. 证明: 第 4 章引入的 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 在等价范数(4.6)或(4.6)′下是 Banach 空间.

5.2. 证明: 按照

$$C_*^{k,\alpha}(\Omega)=\{u\in C^{k,\alpha}(\Omega)\mid |u|_{k,\alpha;\Omega}^*<\infty\}$$

定义的内部 Hölder 空间 $C_*^{k,\alpha}(\Omega)$ 在(4.17)给出的内部范数下是 Banach 空间.

5.3. 设 $\mathscr{B}$ 是 Banach 空间, 对某个 $K\subset\mathbf{R}$, T 是对所有 $x\in\mathscr{B}$ 满足

$$\|x\|\leqslant K\|Tx\|$$

的 $\mathscr{B}$ 到自身中的有界线性映射. 证明 T 的值域是闭的.

5.4. 证明可分自反 Banach 空间中的有界序列包含弱收敛子序列.

第六章

古典解；Schauder 方法

这一章讨论二阶线性椭圆型方程的理论，它本质上是位势理论的一个推广. 它基于下面的基本见解：即具有 Hölder 连续系数的方程在局部上可以作为常系数方程的扰动来处理. 根据这个事实，Schauder [SC4, 5] 得以创立全局的理论，我们在这里介绍它的一个推广. 这个方法的基础是把位势理论中的解的先验估计，推广到具有 Hölder 连续系数的方程上去.

整个这一章中，我们把方程

(6.1) $$Lu=a^{ij}(x)D_{ij}u+b^i(x)D_iu+c(x)u=f(x),\ a^{ij}=a^{ji}$$

记成 $Lu=f$，其中系数和 f 都定义在开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中，除非另外声明，否则算子 L 总是严格椭圆的；即，对某个正常数 λ，成立

(6.2) $$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\ \forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

在进行之前，我们回忆在(4.17)，(4.18)和(4.29)中定义的内部范数，部分内部范数和拟范数. 它们将在下面的结果以及本章后面部分中出现. 如无另外声明，总假设本章中所有的 Hölder 指数都在(0, 1)之间.

首先考虑定理 **4.8** 和定理 **4.12** 对常系数椭圆型方程的推广. 我们在下面的引理中叙述这两个结果.

引理 6.1 在方程

(6.3) $$L_0u=A^{ij}D_{ij}u=f(x),\ A^{ij}=A^{ji}$$

中，设 $[A^{ij}]$ 是常数矩阵，对正常数 λ, Λ, 满足

$$\lambda|\xi|^2\leqslant A^{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

(a) 设 $u\in C^2(\Omega)$, $f\in C^\alpha(\Omega)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 Ω 中满足 $L_0u=f$. 则

(6.4) $$|u|^*_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

(b) 设 Ω 是 $\mathbb{R}_+^n$ 中的开子集，在 $x_n=0$ 上有边界部分 T，并设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\Omega\cup T)$，$f\in C^\alpha(\Omega\cup T)$ 在 Ω 中满足 $L_0u=f$，在 T 上 $u=0$. 则

$$(6.5)\qquad |u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}),$$

其中 $C=C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

证明 设 $\mathbf{P}$ 是一常数矩阵，它定义一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上的非奇异线性变换 $y=x\mathbf{P}$. 设在这个变换下 $u(x)\to\tilde{u}(y)$，容易验证

$$A^{ij}D_{ij}u(x)=\tilde{A}^{ij}D_{ij}\tilde{u}(y),$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}^t=\mathbf{P}$ 的转置). 对一适当的正交矩阵 $\mathbf{P}$，$\tilde{\mathbf{A}}$ 是一对角阵，其对角线元素是 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 进一步，如果 $\mathbf{Q}=\mathbf{P}\mathbf{D}$，其中 $\mathbf{D}$ 是对角矩阵 $[\lambda_i^{-\frac{1}{2}}\delta_{ij}]$，那么变换 $y=x\mathbf{Q}$ 把 $L_0u=f(x)$ 变为 Poisson 方程 $\Delta\tilde{u}(y)=\tilde{f}(y)$，这里在变换下 $u(x)\to\tilde{u}(y)$，$f(x)\to\tilde{f}(y)$. 通过进一步的旋转可假设 $\mathbf{Q}$ 把半空间 $x_n>0$ 变成半空间 $y_n>0$.

因为正交矩阵 $\mathbf{P}$ 保持长度不变，我们有

$$\Lambda^{-\frac{1}{2}}|x|\leqslant|x\mathbf{Q}|\leqslant\lambda^{-\frac{1}{2}}|x|.$$

由此推得，如果在变换 $y=x\mathbf{Q}$ 之下，$\Omega\to\tilde{\Omega}$，$v(x)\to\tilde{v}(y)$，则在 Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 上定义的范数(4.17)和(4.18)有下面不等式关系：

$$(6.6)\quad \begin{aligned} c^{-1}|v|^*_{k,\alpha;\Omega}&\leqslant|\tilde{v}|^*_{k,\alpha;\tilde{\Omega}}\leqslant c|v|^*_{k,\alpha;\Omega},\\ c^{-1}|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega}&\leqslant|\tilde{v}|^{(k)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}}\leqslant c|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega},\end{aligned}\quad k=0,1,2,\cdots,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

其中 $c=c(k, n, \lambda, \Lambda)$.

类似地，如果 Ω 是 $\mathbb{R}_+^n$ 中的开子集，在 $x_n=0$ 上有边界部分 T，它被 $y=x\mathbf{Q}$ 变到 $\mathbb{R}_+^n$ 中有边界部分 $\tilde{T}$ 的集合 $\tilde{\Omega}$ 中，在 Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 中的范数(4.29)满足不等式

$$(6.7)\quad \begin{aligned} c^{-1}|v|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}&\leqslant|\tilde{v}|^*_{k,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}}\leqslant c|v|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T},\\ c^{-1}|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}&\leqslant|\tilde{v}|^{(k)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}}\leqslant c|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T},\end{aligned}$$

其中的 c 是(6.6)中的同一常数.

为了证明引理的(a)部分，我们在 $\tilde{\Omega}$ 中应用定理 4.8 及不等

式(6.6)得到

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C|\tilde{u}|^*_{2,\alpha;\tilde{\Omega}}\leqslant C(|\tilde{u}|_{0;\tilde{\Omega}}+|\tilde{f}|^{(2)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}})$$
$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

这就是所要的结论(6.4).（这里我们用了同一个字母 C 表示依赖于 $n, \alpha, \lambda, \Lambda$ 的常数.）

利用定理 4.12 和不等式(6.7)，通过同样的方法可证引理的(b)部分. ∎

引理 6.1 提供了把定理 4.6 和定理 4.11 中的球上的估计从 Poisson 方程到更一般的常系数方程(6.3)的一个直接推广. 当然，在后一种情况下常数 C 除了依赖于 n, α 外还依赖于 λ, Λ.

6.1. Schauder 内估计

在方程 $Lu=f$ 的研究中，我们的第一个目标是 Schauder 内估计的推导，这个估计在以后的存在性和正则性理论的论述中起着本质的作用. 这些估计是以对 $L_0u=f$ 的解已在(6.4)中得到的结果的同类结果为根据的.

为了得到 $Lu=f$ 的解在 Ω 中的内部范数 $|u|^*_{2,\alpha;\Omega}$ 的估计，只要得出 $|u|_{0;\Omega}$ 和(在(4.17)中定义的)拟范数 $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$ 的界就够了. 这正是下述内插不等式的推论.

设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集. 则对任一 $\varepsilon>0$，存在常数 $C=C(\varepsilon)$，使得

(6.8) $\quad [u]^*_{j,\beta;\Omega}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega}, \quad j=0,1,2;\ 0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1,$

(6.9) $\quad |u|^*_{j,\beta;\Omega}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega}. \quad j+\beta<2+\alpha;$

这些不等式将在这一章附录 1 的引理 6.32 中证明.

为了以强的形式叙述 Schauder 估计，也为了以后的应用，我们在空间 $C^k(\Omega)$，$C^{k,\alpha}(\Omega)$ 上引进以下附加的内部拟范数和范数. 对实数 σ 及非负整数 k，我们定义

$$[f]^{(\sigma)}_{k,0;\Omega}=[f]^{(\sigma)}_{k;\Omega}=\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\beta|=k}}d_x^{k+\sigma}|D^\beta f(x)|;$$

$$(6.10)\qquad [f]^{(\sigma)}_{k,\alpha;\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|\beta|=k}} d^{k+\alpha+\sigma}_{x,y}\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1;$$

$$|f|^{(\sigma)}_{k;\Omega}=\sum_{j=0}^{k}[f]^{(\sigma)}_{j;\Omega};$$

$$|f|^{(\sigma)}_{k,\alpha;\Omega}=|f|^{(\sigma)}_{k;\Omega}+[f]^{(\sigma)}_{k,\alpha;\Omega}.$$

按这一记法，当 $\sigma=0$ 时这些量与(4.17)中定义的那些量恒等，所以 $[\cdot]^{(0)}=[\cdot]^*$ 和 $|\cdot|^{(0)}=|\cdot|^*$.

容易验证，对于 $\sigma+\tau\geqslant 0$,

$$(6.11)\qquad |fg|^{(\sigma+\tau)}_{0,\alpha;\Omega}\leqslant|f|^{(\sigma)}_{0,\alpha;\Omega}|g|^{(\tau)}_{0,\alpha;\Omega}.$$

我们现在来建立基本的 Schauder 内估计.

定理 6.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，又设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ 是方程

$$Lu=a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu=f$$

在 Ω 中的有界解，其中 f 和系数满足下述条件. 存在正常数 λ,Λ，使得

$$(6.12)\qquad a^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\ \forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

和

$$(6.13)\qquad |a^{ij}|^{(0)}_{\sigma,\alpha;\Omega},\ |b^i|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega},\ |c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}\leqslant\Lambda;\ |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}<\infty.$$

那么

$$(6.14)\qquad |u|^*_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)$.

证明 根据(6.9)，只要对 $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$ 证明不等式(6.14)就够了，并且只要对 Ω 的紧子集证明后者就够了. 即. 设 $\{\Omega_i\}$ 是 Ω 的开子集序列，使得 $\Omega_i\subset\Omega_{i+1}\subset\subset\Omega$ 和 $\cup\Omega_i=\Omega$. 对每个 i, $[u]^*_{2,\alpha;\Omega_i}$ 是有限的，如果(6.14)在 Ω_i 中成立，我们可以断言：对于任何一对点 $x,y\in\Omega$，和所有充分大的 i，以及任何一个二阶导数 D^2u，有

$$(d^{(i)}_{x,y})^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant[u]^*_{2,\alpha;\Omega_i}$$
$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega_i}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega_i})$$
$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $d^{(i)}_{x,y}=\min[\mathrm{dist}(x,\partial\Omega_i),\ \mathrm{dist}(y,\partial\Omega_i)]$. 令 $i\to\infty$，得到不等式

$$d_{x,y}^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)})\quad\forall x,\ y\in\Omega,$$

这蕴涵$[u]_{2,\alpha;\Omega}^*$有同一个界. 因而在下面可以假设$[u]_{2,\alpha;\Omega}^*$是有限的.

为了记法方便起见用同一个字母C表示依赖于n, α, λ, Λ的常数.

设x_0, y_0是Ω中任二不同的点, 并设$d_{x_0}=d_{x_0,y_0}=\min(d_{x_0}, d_{y_0})$. 设$\mu\leqslant\frac{1}{2}$是后面再规定其大小的一个正常数, 并令$d=\mu d_{x_0}$, $B=B_d(x_0)$. 我们把$Lu=f$改写成形式

$$(6.15)\quad a^{ij}(x_0)D_{ij}u=(a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D_{ij}u-b^iD_iu-cu+f\equiv F(x),$$

我们把它考虑成B中具有常系数$a^{ij}(x_0)$的方程. 对这个方程应用引理6.1(a), 它断言如果$y_0\in B_{d/2}(x_0)$, 则对任何一个二阶导数D^2u, 有

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x_0)-D^2u(y_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha}\leqslant C(|u|_{0;B}+|F|_{0,\alpha;B}^{(2)});$$

于是 $$d_{x_0}^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x_0)-D^2u(y_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha}\leqslant\frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0;B}+|F|_{0,\alpha;B}^{(2)}).$$

另一方面, 如果$|x_0-y_0|\geqslant d/2$,

$$d_{x_0}^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x_0)-D^2u(y_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha}\leqslant\left(\frac{2}{\mu}\right)^\alpha[d_{x_0}^2|D^2u(x_0)|+d_{y_0}^2|D^2u(y_0)|]\leqslant\frac{4}{\mu^\alpha}[u]_{2;\Omega}^*.$$

所以, 合并这两个不等式, 我们得到

$$(6.16)\quad d_{x_0}^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x_0)-D^2u(y_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha}\leqslant\frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0;\Omega}+|F|_{0,\alpha;B}^{2})+\frac{4}{\mu^\alpha}[u]_{2;\Omega}^*.$$

我们着手用$|u|_{0;\Omega}$及$[u]_{2,\alpha;\Omega}^*$来估计$|F|_{0,\alpha;B}^{2}$. 我们有

$$(6.17)\quad |F|_{0,\alpha;B}^{(2)}\leqslant\sum_{i,j}|(a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D_{ij}u|_{0,\alpha;B}^{(2)}+\sum_i|b^iD_iu|_{0,\alpha;B}^{(2)}+|cu|_{0,\alpha;B}^{(2)}+|f|_{0,\alpha;B}^{(2)}.$$

在估计这些项时下面的不等式是有用的. 我们记得对所有的 $x\in B$, $d_x(=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega))>(1-\mu)d_{x_0}\geqslant\frac{1}{2}d_{x_0}$, 因此对 $g\in C^\alpha(\Omega)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
(6.18)\qquad |g|^{(2)}_{0,\alpha;B}&\leqslant d^2|g|_{0;B}+d^{2+\alpha}[g]_{\alpha;B}\\
&\leqslant\frac{\mu^2}{(1-\mu)^2}[g]^{(2)}_{0;\Omega}+\frac{\mu^{2+\alpha}}{(1-\mu)^{2+\alpha}}[g]^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}\\
&\leqslant 4\mu^2[g]^{(2)}_{0;\Omega}+8\mu^{2+\alpha}[g]^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}\leqslant 8\mu^2|g|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}.
\end{aligned}
$$

对每一对 $i,\ j$, 记 $(a(x_0)-a(x))D^2u=(a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D_{ij}u$, 从(6.11)和(6.18)得到

$$
\begin{aligned}
|(a(x_0)-a(x))D^2u|^{(2)}_{0,\alpha;B}&\leqslant|a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha;B}|D^2u|^{(2)}_{0,\alpha;B}\\
&\leqslant|a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha;B}(4\mu^2[u]^*_{2;\Omega}\\
&\qquad+8\mu^{2+\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}).
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
|a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha;B}&\leqslant\sup_{x\in B}|a(x_0)-a(x)|+d^\alpha[a]_{\alpha;B}\\
&\leqslant 2d^\alpha[a]_{\alpha;B}\leqslant 2^{1+\alpha}\mu^\alpha[a]^*_{0,\alpha;\Omega}\leqslant 4\Lambda\mu^\alpha,
\end{aligned}
$$

对于(6.17)中的主项, 我们就得到下面的估计:

$$
\begin{aligned}
(6.19)\qquad &\sum_{i,j}|(a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D_{ij}u|^{(2)}_{0,\alpha;B}\\
&\leqslant 32n^2\Lambda\mu^{2+\alpha}([u]^*_{2;\Omega}+\mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha;\Omega})\\
&\leqslant 32n^2\Lambda\mu^{2+\alpha}(C(\mu)|u|_{0;\Omega}+2\mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha;\Omega}).
\end{aligned}
$$

最后的不等式是在内插不等式(6.8)中令 $\varepsilon=\mu^\alpha$ 而得到的.

对每个 i, 设 $bDu=b^iD_iu$, 从(6.18)和(6.13)得到

$$
\begin{aligned}
|bDu|^{(2)}_{0,\alpha;B}&\leqslant 8\mu^2|bDu|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}\leqslant 8\mu^2|b|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega}|Du|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega}\\
&\leqslant 8\mu^2\Lambda|u|^*_{1,\alpha;\Omega}\leqslant 8\mu^2\Lambda(C(\mu)|u|_{0;\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}).
\end{aligned}
$$

最后的不等式是在(6.9)中令 $\varepsilon=\mu^{2\alpha}$ 而得到的. 这样我们有

$$
(6.20)\qquad |b^iD_iu|^{(2)}_{0,\alpha;B}\leqslant 8n\Lambda\mu^2(C(\mu)|u|_{0;\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}).
$$

类似地, 从(6.18), (6.11)和(6.9), 我们得到

$$
\begin{aligned}
(6.21)\qquad |cu|^{(2)}_{0,\alpha;B}&\leqslant 8\mu^2|c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}|u|^{(0)}_{0,\alpha;\Omega}\\
&\leqslant 8\Lambda\mu^2(C(\mu)|u|_{0;\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}).
\end{aligned}
$$

最后，

$$(6.22)\qquad |f|^{2}_{0,\alpha;B}\leqslant 8\mu^{2}|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}.$$

设 C 表示仅依赖于 n, α, λ, Λ 的常数，$C(\mu)$ 表示还依赖于 μ 的常数，合并(6.19)～(6.22)后就得到

$$|F|^{(2)}_{0,\alpha;B}\leqslant C\mu^{2+2\alpha}[u]^{*}_{2,\alpha;\Omega}+C(\mu)(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

把它代入(6.16)右端，并利用 $s=\mu^{2\alpha}$ 的(6.8)来估计 $[u]^{*}_{2;\Omega}$，从(6.16)我们就得到

$$d^{2+\alpha}_{x_0,y_0}\frac{|D^2u(x_0)-D^2u(y_0)|}{|x_0-y_0|^{\alpha}}$$

$$\leqslant C\mu^{\alpha}[u]^{*}_{2,\alpha;\Omega}+C(\mu)(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

这个不等式的右端不依赖于 x_0, y_0. 对所有的 x_0, $y_0\in\Omega$ 取上确界，得到

$$[u]^{*}_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C\mu^{\alpha}[u]^{*}_{2,\alpha;\Omega}+C(\mu)(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

现在选取并固定 $\mu=\mu_0$，使 $C\mu_0^{\alpha}\leqslant\frac{1}{2}$. 即得所要的估计

$$[u]^{*}_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).\ \blacksquare$$

$Lu=f$ 的上述形状的内估计允许遵从条件(6.13)的系数和 f 是无界的. 在内估计对收敛性结果的典型应用中，知道解和它的一、二阶导数在紧子集上的等度连续性就够了. 对于这一目的，下述的推论通常是够用的.

推论 6.3 设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $f\in C^{\alpha}(\Omega)$ 满足 $Lu=f$，其中 L 在 Ω 中是严格椭圆的(满足(6.2))，并且 L 的系数在 Ω 中具有指数为 α 的 Hölder 连续性. 那么如果 $\Omega'\subset\subset\Omega$, $\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)\geqslant d$，就存在常数 C，使得

$$(6.23)\qquad d|Du|_{0;\Omega'}+d^2|D^2u|_{0;\Omega'}+d^{2+\alpha}[D^2u]_{\alpha;\Omega'}$$

$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 C 仅依赖于椭圆性常数 λ 和 L 的系数的 $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 界(以及 n, α).

附注 这个结果的一个直接推论是：具有局部 Hölder 连续系数和局部 Hölder 连续的 f 的椭圆型方程 $Lu=f$ 的一致有界解及其一、二阶导数在紧子集上是等度连续的. 对于具有在紧子集

$\Omega'\subset\subset\Omega$中有一致正下界的椭圆性常数$\lambda$和有一致有界的$C^{\alpha}(\overline{\Omega'})$范数的系数和非齐次项$f$的任一族这类方程的解，这个结论也同样是正确的.

6.2. 边界估计和全局估计

为了把前面的内估计延拓到整个区域上去，必须建立起在边界附近有意义的估计. 只要解的边值以及边界本身充分光滑，这是能够得到的. 在很多方面这些边界估计的证明是完全遵循着内估计的证明的.

作为本节的主要目标的全局估计将在$C^{2,\alpha}$类的区域中建立.

定义 $\mathbb{R}^n$中有界区域Ω及其边界是$C^{k,\alpha}$类的, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, 如果在每一点$x_0\in\partial\Omega$, 存在一个球$B=B(x_0)$及一个把$B$映上$D\subset\mathbb{R}^n$的一对一映射$\psi$, 使得:

(i) $\psi(B\cap\Omega)\subset\mathbb{R}^n_+$;

(ii) $\psi(B\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbb{R}^n_+$;

(iii) $\psi\in C^{k,\alpha}(B)$, $\psi^{-1}\in C^{k,\alpha}(D)$.

区域Ω称为有$C^{k,\alpha}$类的边界部分$T\subset\partial\Omega$, 如果在每一点$x_0\in T$, 存在一个球$B=B(x_0)$, 在其中上述的条件满足, 并使得$B\cap\partial\Omega\subset T$. 我们将说微分同胚$\psi$在$x_0$附近拉直边界.

我们特别要指出：如果$\partial\Omega$的每一点有一个邻域, 在其中$\partial\Omega$是坐标$x_1, \cdots, x_n$的$n-1$维$C^{k,\alpha}$函数的图象, 那么Ω是$C^{k,\alpha}$区域. 如果$k\geqslant1$, 其逆也是正确的.

从上面定义得出：只要$j+\beta<k+\alpha$, $0\leqslant\alpha, \beta\leqslant1$, $C^{k,\alpha}$类区域也是$C^{j,\beta}$类区域.

定义在区域Ω的$C^{k,\alpha}$边界部分T上的函数φ, 如果对每一$x_0\in T$, 有$\varphi\circ\psi^{-1}\in C^{k,\alpha}(D\cap\partial\mathbb{R}^n_+)$, 就称为属于$C^{k,\alpha}(T)$类. 指出下述事实也是重要的：如果$\partial\Omega$是$C^{k,\alpha}(k\geqslant1)$的，则一个函数$\varphi\in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$能够延拓成$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$中的函数，反之，$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$中函数有$C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$中的边界值(见引理6.38). 所以，在下文中无论我们把边值φ看作是属于$C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$还是属于$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$都是无关重要的.

用不同的方式来定义 $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ 上的边界范数也是可能的. 例如, 如果 $\varphi\in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$, 设 Φ 表示 φ 在 $\overline{\Omega}$ 的一个延拓, 并定义 $\|\varphi\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}=\inf\limits_{\Phi}\|\Phi\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$, 其中下确界是取遍所有全局延拓 Φ 的集合. 赋予这个范数后 $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ 变成一个 Banach 空间. 在本书中我们将不使用弯曲边界上的函数的边界范数, 作为代替, 我们通常把一个边界函数看作是具有适当范数的在全局有定义的函数的限制.

在具有 $C^{2,\alpha}(\alpha>0)$ 边界部分的区域中, 求 $Lu=f$ 的边界估计时, 我们首先在具有超平面边界部分的区域中建立这样一个估计. 为了这个目的, 我们利用下面的类似于(6.8)、(6.9)的内插不等式. 为了它的陈述, 我们要回忆(4.29)中定义的部分内部范数和拟范数.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n_+$ 的一个开子集, 在 $x_n=0$ 上有边界部分 T, 并设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup T)$. 那么, 对于任何 $\varepsilon>0$ 和某个常数 $C(\varepsilon)$, 我们有

(6.24) $[u]^*_{j,\beta;\Omega\cup T}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega\cup T},\quad j=0,1,2;\ 0\leqslant\alpha,\beta\leqslant1,$

(6.25) $|u|^*_{j,\beta;\Omega\cup T}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}.\quad j+\beta<2+\alpha;$

这些不等式在这一章附录 1 的引理 6.33 中证明.

我们现在能够断言下述本质的局部边界估计.

引理 6.4 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n_+$ 的一个开子集, 在 $x_n=0$ 上有边界部分 T. 假设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup T)$ 是在 T 上满足边界条件 $u=0$ 的 $Lu=f$ 在 Ω 中的有界解. 除(6.2)外又假设

(6.26) $|a^{ij}|^{(0)}_{0,\alpha;\Omega\cup T},\ |b^i|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega\cup T},\ |c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}\leqslant\Lambda;\ |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}<\infty.$

那么

(6.27) $$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}),$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ \lambda,\ \Lambda)$.

证明 如果用字母 $\bar{d}_x$ 代替 d_x, 并且在必要时用引理 6.1(b) 和不等式(6.24), (6.25)代替引理 6.1(a) 和不等式(6.8), (6.9), 那么这个定理的证明与定理 6.2 的证明是完全相同的. ▌

这个引理在任何一个满足 dist $(\Omega',\partial\Omega-T)>0$ 的子集

$\Omega'\subset\Omega$ 中对 u 的一、二阶导数和它的二阶导数的 Hölder 系数提供了一个界. 特别, $\partial\Omega'$ 可以包含 T 的与 $\partial\Omega-T$ 有非零距离的任何一个部分.

为了把上述引理推广到具有弯曲边界部分的区域, 我们引进作为(4.29)的明显推广的相应的拟范数和范数. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有 $C^{k,\alpha}$ 边界部分 T 的开集. 对于 $x, y\in\Omega$, 我们令

$$\bar{d}_x=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega-T),\quad \bar{d}_{x,y}=\min(\bar{d}_x,\ \bar{d}_y),$$

并对函数 $u\in C^{k,\alpha}(\Omega\cup T)$, 定义下列各量:

$$[u]^*_{k,0;\Omega\cup T}=[u]^*_{k,\Omega\cup T}=\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\beta|=k}}\bar{d}^k_x|D^\beta u(x)|,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;$$

(6.28) $$[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|\beta|=k}}\bar{d}^{k+\alpha}_{x,y}\frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$0<\alpha\leqslant 1;$$

$$|u|^*_{k,0;\Omega\cup T}=|u|^*_{k;\Omega\cup T}=\sum_{j=0}^{k}[u]^*_{j;\Omega\cup T};$$

$$|u|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}=|u|^*_{k;\Omega\cup T}+[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T};$$

$$|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}=\sup_{x\in\Omega}\bar{d}^k_x|u(x)|+\sup_{x,y\in\Omega}\bar{d}^{k+\alpha}_{x,y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

当 $T=\phi$ 及 $\Omega\cup T=\Omega$ 时, 这些量归结为已在(4.17)和(4.18)中定义的内部拟范数和范数.

设 Ω 是具有 $C^{k,\alpha}(k\geqslant 1, 0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ 边界部分 T 的有界区域. 假设 $\Omega\subset\subset D$, 其中 D 是一个区域, 它被 $C^{k,\alpha}$ 微分同胚 ψ 映上到 D'. 设 $\psi(\Omega)=\Omega'$ 及 $\psi(T)=T'$, 我们能够对 Ω' 和 T' 定义(6.28)中的那些量. 如果 $x'=\psi(x)$, $y'=\psi(y)$, 我们看到对所有的点 x, $y\in\Omega$,

(6.29) $$K^{-1}|x-y|\leqslant|x'-y'|\leqslant K|x-y|,$$

其中 K 是依赖于 ψ 和 Ω 的常数. 设在映射 $x\to x'$ 之下 $u(x)\to\tilde{u}(x')$, 我们用(6.29)在计算后发现: 对于 $0\leqslant j\leqslant k$, $0\leqslant\beta\leqslant 1$, $j+\beta\leqslant k+\alpha$,

$$K^{-1}|u(x)|_{j,\beta;\Omega}\leqslant|\tilde{u}(x')|_{j,\beta;\Omega'}\leqslant K|u(x)|_{j,\beta;\Omega};$$

$$(6.30)\qquad K^{-1}|u(x)|^*_{j,\beta;\Omega\cup T}\leqslant|\tilde{u}(x')|^*_{j,\beta;\Omega'\cup T'}\leqslant K|u(x)|^*_{j,\beta;\Omega\cup T};$$

$$K^{-1}|u(x)|^{(\sigma)}_{0,\beta;\Omega\cup T}\leqslant|\tilde{u}(x')|^{(\sigma)}_{0,\beta;\Omega'\cup T'}\leqslant K|u(x)|^{(\sigma)}_{0,\beta;\Omega\cup T}.$$

在这些不等式中 K 表示依赖于映射 ψ 及区域 Ω 的常数.

引理 6.4 以及(6.30)现在能够用来得到弯曲边界的局部边界估计. 为此利用全局范数(4.6)是合适的.

引理 6.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $C^{2,\alpha}$ 区域, 又设 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是在 Ω 中 $Lu=f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$ 的解, 其中 $f\in C^\alpha(\bar{\Omega})$. 假设 L 的系数满足(6.2)及

$$(6.31)\qquad |a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega},\quad |b^i|_{0,\alpha;\Omega},\quad |c|_{0,\alpha;\Omega}\leqslant\Lambda.$$

那么对于某个 δ, 在每一点 $x_0\in\partial\Omega$ 存在一个球 $B=B_\delta(x_0)$ 使得

$$(6.32)\qquad |u|_{2,\alpha;B\cap\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ \lambda,\ \Lambda,\ \Omega)$.

证明 按照 $C^{2,\alpha}$ 区域的定义, 在每一点 $x_0\in\partial\Omega$, 存在 x_0 的一个邻域 N 及一个 $C^{2,\alpha}$ 微分同胚, 它把 N 中的边界拉直. 设 $B_\rho(x_0)\subset\subset N$, 并令 $B'=B_\rho(x_0)\cap\Omega$, $D'=\psi(B')$, $T=B_\rho(x_0)\cap\partial\Omega\subset\partial B'$ 及 $T'=\psi(T)\subset\partial D'$ (T' 是 $\partial D'$ 的超平面部分). 在映射 $y=\psi(x)=(\psi_1(x),\ \cdots,\ \psi_n(x))$ 之下, 设 $\tilde{u}(y)=u(x)$ 及 $\tilde{L}\tilde{u}(y)=Lu(x)$, 其中

$$\tilde{L}\tilde{u}\equiv\tilde{a}^{ij}D_{ij}\tilde{u}+\tilde{b}^iD_i\tilde{u}+\tilde{c}\tilde{u}=\tilde{f}(y),$$

$$\tilde{a}^{ij}(y)=\frac{\partial\psi_i}{\partial x_r}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x_s}a^{rs}(x),$$

$$\tilde{b}^i(y)=\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_r\partial x_s}a^{rs}(x)+\frac{\partial\psi_i}{\partial x_r}b^r(x),$$

$$\tilde{c}(y)=c(x),\ \tilde{f}(y)=f(x).$$

我们注意到在 D' 内

$$\tilde{\lambda}|\xi|^2\leqslant\tilde{a}^{ij}\xi_i\xi_j\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

其中

$$(6.33)\qquad \tilde{\lambda}=\lambda/K,$$

而 K 是仅依赖于 B' 上映射 ψ 的一个适当的正常数. 由于(6.30), 我们也有(对于(6.33)中适当选择的 K)

$$(6.34)\qquad |\tilde{a}^{ij}|_{0,\alpha;D'},\ |\tilde{b}^i|_{0,\alpha;D'},\ |\tilde{c}|_{0,\alpha;D'}\leqslant\tilde{\Lambda}=K\Lambda;\ |\tilde{f}|_{0,\alpha;D'}<\infty.$$

这样，引理 6.4 的条件对于具有超平面边界部分 T' 的区域 D' 中的方程 $\tilde{L}\tilde{u}=\tilde{f}$ 是满足的．因此我们能够断言

$$|\tilde{u}|^*_{2,\alpha;D'\cup T'}\leqslant C(|\tilde{u}|_{0;D'}+|\tilde{f}|^{(2)}_{\alpha;D'\cup T'}),$$

其中常数 $C=C(n, \alpha, \tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$．从(6.30)推出

$$|u|^*_{2,\alpha;B'\cup T}\leqslant C(|u|_{0,B'}+|f|^{(2)}_{0,\alpha;B'\cup T})\leqslant C(|u|_{0;B'}+|f|_{0,\alpha;B'})$$
$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 C 现在依赖于 n, α, λ, Λ 和 B'．令 $B''=B_{\rho/2}(x_0)\cap\Omega$ 并注意

$$\min(1,\ (\rho/2)^{2+\alpha})|u|_{2,\alpha;B''}\leqslant|u|^*_{2,\alpha;B'\cup T},$$

我们得到

$$|u|_{2,\alpha;B''}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}). \tag{6.35}$$

出现在以上估计中的半径 ρ 一般说来依赖于点 $x_0\in\partial\Omega$. 现在考虑对于所有的 $x\in\partial\Omega$ 的球 $B_{\rho/4}(x)$ 的集合．这个集合的一个有限子集 $B_{\rho_i/4}(x_i)$ $(i=1, 2, \cdots, N)$ 覆盖了 $\partial\Omega$．令 $\delta=\min\rho_i/4$ 是这有限个覆盖球的最小半径．我们断言对这个 δ 引理的结论为真．就是说，设 C_i 是(6.35)中对应于 x_i 的常数，并设 $C=\max C_i$．考虑任一点 $x_0\in\partial\Omega$ 及球 $B_\delta(x_0)$．对某个 i, 我们必有 $x_0\in B_{\rho_i/4}(x_i)$, 所以 $B=B_\delta(x_0)\subset B_{\rho_i/2}(x_i)=B_i$．从(6.35)我们得到需要的结论

$$|u|_{2,\alpha;B\cap\Omega}\leqslant|u|_{2,\alpha;B_i\cap\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 C 依赖于 n, α, λ, Λ, 及 Ω. ∎

我们注意前面引理中常数 C 是通过(6.30), (6.33)和(6.34)中的常数 K 而依赖于区域 Ω 的，而 K 又仅依赖于定义边界 $\partial\Omega$ 的局部表示式的映射 ψ 的 $C^{2,\alpha}$ 界．如果映射 ψ 的界在边界上能够一致地表述(对 $C^{2,\alpha}$ 区域这总是可能的)，那么在估计(6.32)的叙述中 K 就能够代替 Ω, 并且区域 Ω 也可以是无界的.

本节的主要结果是下面的定义在 $C^{2,\alpha}$ 区域上有 $C^{2,\alpha}$ 边值的解的先验全局估计.

定理 6.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $C^{2,\alpha}$ 区域，又设 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $Lu=f$ 在 Ω 中的解，其中 $f\in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 并且 L 的系数对于正常数 λ, Λ, 满足

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

及

$$|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega},\ |b^i|_{0,\alpha;\Omega},\ |c|_{0,\alpha;\Omega}\leqslant\Lambda.$$

设 $\varphi(x)\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 又设在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 那么

(6.36) $$|u|_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|\varphi|_{2,\alpha;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ \lambda,\ \Lambda,\ \Omega)$.

证明 只要对于在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$ 和 $\varphi=0$ 的情形证明定理就够了. 也就是说, 如果令 $v=u-\varphi$, 则在 $\partial\Omega$ 上 $v=0$ 并且 $Lv=f-L\varphi\equiv f'\in C^\alpha(\overline{\Omega})$. 把结论(6.36)用于具有 $\varphi=0$ 的 v 上, 它断言

$$|v|_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|v|_{0;\Omega}+|f'|_{0,\alpha;\Omega}).$$

因为 $|L\varphi|_{0,\alpha;\Omega}\leqslant C|\varphi|_{2,\alpha;\Omega}$, 就得出

$$\begin{aligned}|u|_{2,\alpha;\Omega}&\leqslant|v|_{2,\alpha;\Omega}+|\varphi|_{2,\alpha;\Omega}\\&\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|\varphi|_{2,\alpha;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),\end{aligned}$$

这和定理中断言的一样. 在下面我们假设在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$.

设 $x\in\Omega$. 我们考察两种可能性: (i) 对某个 $x_0\in\partial\Omega$, $x\in B_0=B_{2\sigma}(x_0)\cap\Omega$, 其中 $\delta=2\sigma$ 是引理 6.5 中的半径; (ii) $x\in\Omega_\sigma=\{x\in\Omega\ |\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega)>\sigma\}$. 在情况(i)中引理 6.5 蕴涵

(6.37) $$|Du(x)|+|D^2u(x)|\leqslant C(|u|_0+|f|_{0,\alpha}).$$

(在这里和下面我们在无二义之处略去下标 Ω.) 在情况(ii)中, 在(6.23)中令 $d=\sigma$ 之后, 从推论 6.3 我们得到带有不同常数 C 的同样的不等式. 选取两个常数 C 的较大者, 我们可以假设对 Ω 中任一点 x, (6.37)成立, 所以关于 $|u|_2$ 的不等式也成立.

现在设 x, y 是 Ω 中两个不同的点并考虑三种可能性: (i)对某个 x_0, 有 $x,\ y\in B_0$; (ii) $x,\ y\in\Omega_\sigma$; (iii) x 或 y 在 $\Omega-\Omega_\sigma$ 中, 但不是 x 和 y 两者都在任一 x_0 的同一个球 B_0 中. 这些就详尽无遗地记述了所有的可能性. 我们来考察 Hölder 商 $|D^2u(x)-D^2u(y)|/|x-y|^\alpha$. 在情况(i), 引理 6.5 给出不等式

$$\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant C_1(|u|_0+|f|_{0,\alpha}).$$

在情况(ii), 从推论 6.3 我们得到带有不同常数 C_2 的同样的不等

式. 在情况(iii), $\operatorname{dist}(x, y)>\sigma$, 因而

$$\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant\sigma^{-\alpha}(|D^2u(x)|+|D^2u(y)|)$$

$$\leqslant C_3(|u|_0+|f|_{0,\alpha})\quad 根据(6.37).$$

设 $C=\max(C_1, C_2, C_3)$, 并对所有的 $x, y\in\Omega$ 取上确界, 得到

$$[D^2u]_\alpha\leqslant C(|u|_0+|f|_{0,\alpha}).$$

把这个结果与由(6.37)给出的 $|u|_2$ 的界合并起来, 即得

$$|u|_{2,\alpha}\leqslant C(|u|_0+|f|_{0,\alpha}),$$

这就证明了定理.▌

附注 定理6.6的典型应用涉及一个方程或方程族的解的集合,它的每个解满足一致估计(6.36). 于是这个解的集合在 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的有界性保证了它们在 $C^2(\overline{\Omega})$ 中的准紧性; (见引理6.36).

简单修改定理6.6中的论证可得出下面的具有 $C^{2,\alpha}$ 边界部分的区域中的局部估计.

推论6.7 设 $\Omega\subset\mathbb{R}_n$ 是具有 $C^{2,\alpha}$ 边界部分 $T\subset\partial\Omega$ 的区域. 设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup T)$ 是在 Ω 中 $Lu=f$, 在 T 上 $u=\varphi$ 的一个解, 其中 L 和 f 满足定理6.6中的条件, 又 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. 那么, 如果 $x_0\in T$ 且 $B=B_\rho(x_0)$ 是半径 $\rho<\operatorname{dist}(x_0. \partial\Omega-T)$ 的球, 我们就有

$$(6.38)\qquad |u|_{2,\alpha;B\cap\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|\varphi|_{2,\alpha;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, B\cap\Omega)$.

容易直接把这一节和上一节的估计推广到系数和非齐次项属于 $C^{k,\alpha}(k>0)$ 的方程上去; (见习题6.1, 6.2). ▌

6.3. Dirichlet 问题

我们现在考虑 $\mathbb{R}^n$ 的有界区域 Ω 中的 $Lu=f$ 的 Dirichlet 问题. 我们解这个变系数方程的传统作法是通过连续性方法(定理5.2)把它化归到常系数的情形. 简要地概括起来, 这个方法在这里是这样应用的: 从 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 的解出发, 通过联结 $\Delta u=f$ 和 $Lu=f$ 的连续方程族的解, 然后达到 $Lu=f$ 的解.

我们先处理充分光滑的区域和边值的 Dirichlet 问题. 在这种

情况下，Poisson 方程和 $Lu=f$ 当 $c\leqslant 0$ 时的可解性之间的联系包含在下面的定理中.

定理6.8 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $C^{2,\alpha}$ 区域，并设算子 L 在 Ω 中是严格椭圆的，具有 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 系数和 $c\leqslant 0$. 那么，如果 Poisson 方程的 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $\Delta u=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，对所有的 $f\in C^\alpha(\bar{\Omega})$ 及所有的 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$，有一个 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 的解，则问题

$$(6.39)\qquad \text{在 }\Omega\text{ 中 } Lu=f,\ \text{在 }\partial\Omega\text{ 上 } u=\varphi,$$

也对所有这样的 f 和 φ 有一个(唯一的)$C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 的解.

证明 按照假设条件我们可以假定 L 的系数满足条件

$$(6.40)\qquad \lambda|\xi|^2\leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j,\quad \forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$|a^{ij}|_{0,\alpha},\ |b^i|_{0,\alpha},\ |c|_{0,\alpha}\leqslant\Lambda,$$

其中 λ, Λ 是两个正常数. (在范数的写法中，我们省略了下标 Ω，它是不言自明的.)限于考虑零边值就够了，因为问题(6.39)等价于：在 Ω 中 $Lv=f-L\varphi\equiv f'$，在 $\partial\Omega$ 上 $v=0$.

我们考虑方程族

$$(6.41)\qquad L_tu\equiv tLu+(1-t)\Delta u=f,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

我们注意 $L_0=\Delta$, $L_1=L$，并且 L_t 的系数满足(6.40)，这里

$$\lambda_t=\min(1,\ \lambda),\ \Lambda_t=\max(1,\ \Lambda).$$

算子 L_t 可考虑成从 Banach 空间 $\mathfrak{B}_1=\{u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\,|\,u=0$ 在 $\partial\Omega$ 上$\}$ 到 Banach 空间 $\mathfrak{B}_2=C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的有界线性算子. 于是，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $L_tu=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$，对于任意 $f\in C^\alpha(\bar{\Omega})$ 的可解性等价于映射 L_t 的可逆性. 设 u_t 表示这个问题的解. 由定理 3.7，我们得到它的界

$$|u_t|_0\leqslant C\sup_\Omega|f|\leqslant C|f|_{0,\alpha},$$

其中 C 只依赖于 λ, Λ 和 Ω 的直径. 所以从(6.36)，我们有

$$(6.42)\qquad |u_t|_{2,\alpha}\leqslant C|f|_{0,\alpha},$$

也就是，
$$\|u\|_{\mathfrak{B}_1}\leqslant C\|L_tu\|_{\mathfrak{B}_2},$$

常数 C 与 t 无关. 因为，根据假设条件，$L_0=\Delta$ 把 $\mathfrak{B}_1$ 映上 $\mathfrak{B}_2$，连续性方法(定理 5.2)是能够运用的，就得到了定理. ∎

上面定理预先假设了 Poisson 方程的 Dirichlet 问题当 Ω 及边值属于 $C^{2,\alpha}$ 类时在 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的可解性. 虽然这个结果——Kellogg 定理——能够用位势理论的方法独立地建立起来, 但我们在这里将不假定它或者证明它, 宁可在晚些时候把它作为椭圆型理论的一个推论来导出. 可是, 在 Ω 是球的特殊情形, Kellogg 定理已经在推论 4.14 中被证明. 这就提供了球的下述存在定理.

推论 6.9 在定理 6.8 中, 设 Ω 是球 B, 并设算子 L 满足定理中相同的条件, 那么, 如果 $f\in C^{\alpha}(\overline{B})$ 和 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\overline{B})$, 则 Dirichlet 问题: 在 B 中 $Lu=f$, 在 ∂B 上 $u=\varphi$ 就有(唯一)解 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B})$.

关于边界数据的条件可以减弱, 而给出如下的一个推广, 这在以后是有用的.

引理 6.10 设 T 是 $\mathbb{R}^n$ 中球 B 的边界部分(可能是空的), 又设 $\varphi\in C^0(\partial B)\cap C^{2,\alpha}(T)$. 那么, 如果 L 在 B 中满足定理 6.8 的条件, 并且 $f\in C^{\alpha}(\overline{B})$, 则 Dirichlet 问题: 在 B 中 $Lu=f$, 在 ∂B 上 $u=\varphi$ 就有(唯一)解 $u\in C^{2,\alpha}(B\cup T)\cap C^0(\overline{B})$.

证明 如果 T 非空, 设 $x_0\in T$. 我们可以假设通过径向延拓把边界函数 φ 连续地延拓成函数 $\varphi\in C^0(B')\cap C^{2,\alpha}(\overline{G})$, 其中 B' 是包含 $\overline{B}$ 的一个球而 $G=B_\rho(x_0)\subset\subset B'$; (见引理 6.38 后面的附注 2.) 设 $\{\varphi_k\}$ 是 B' 中充分光滑(例如说, C^3) 的函数序列, 使得当 $k\to\infty$ 时

$$(6.43)\qquad |\varphi_k-\varphi|_{0;B}\to 0 \quad 且 \quad |\varphi_k|_{2,\alpha;G}\leqslant C|\varphi|_{2,\alpha;G},$$

其中 C 是与 k 无关的常数. (这样一个逼近的存在性可见引理 7.1 后面的讨论.) 对每个 k, 设 u_k 是 Dirichlet 问题: 在 B 中 $Lu=f$, 在 ∂B 上 $u=\varphi_k$ 的对应的解. 根据推论 6.9, 在 $C^{2,\alpha}(\overline{B})$ 中已知存在函数 u_k. 由极大值原理推得序列 $\{u_k\}$ 一致收敛于 $u\in C^0(\overline{B})$, 使得在 $\partial\overline{B}$ 上 $u=\varphi$. 由推论 6.3 提供的 $\{u_k\}$ 的紧性保证了这个序列在 B 的紧子集上收敛于 $Lu=f$ 的解, 所以极限函数 u 是 B 中的属于 $C^0(\overline{B})$ 的一个解. 此外, 根据推论 6.7, 在 $D=B_{\rho/2}(x_0)\cap B$ 中函数 u_k 满足估计

$$|u_k|_{2,\alpha;D}\leqslant C(|u_k|_0+|\varphi_k|_{2,\alpha;G}+|f|_{0,\alpha;B}).$$

从(6.43)和 Arzela 定理得出 u 在 D 中满足同一估计(用 φ 代替 φ_k),特别地 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{D})$. 于是, $u\in C^{2,\alpha}(B\cup T)$,引理得证. ▌

我们特别指出，上面的引理当边值仅仅连续时给球中的 Dirichlet 问题提供了一个解;而且这个解在 $C^0(\bar{B})\cap C^{2,\alpha}(B)$ 类之中.

现在可以摹仿第二章里下调和函数的 Perron 方法并把那里对调和函数得到的结果推广到 $Lu=f$ 的 Dirichlet 问题上去. 首先，我们假设 L 在区域 Ω 中是椭圆的, $c\leqslant 0$, 它的系数和 f 属于 $C^\alpha(\Omega)$. (因而在紧子区域中 L 是一致严格椭圆的，它的系数和 f 在其中也是有界及 Hölder 连续的.)函数 $u\in C^0(\Omega)$ 称为 $Lu=f$ 在 Ω 中的下解(上解)，如果对于每一个球 $B\subset\subset\Omega$ 和每一个在 B 中适合 $Lv=f$ 的解 v, 在 ∂B 上的不等式 $u\leqslant v\,(u\geqslant v)$ 蕴涵着在 B 中也有 $u\leqslant v\,(u\geqslant v)$ 成立. 我们看到下解的概念和下调和函数是十分类似的,这些函数有很多共同的性质. 特别是,我们能断言如下的命题,不予证明,它的细节实质上与下调和函数的这个命题是相同的.只需注意在证明中要用定理 3.5 和引理 6.10 来分别代替定理 2.2 和 2.6.

(i) 函数 $u\in C^2(\Omega)$ 是下解当且仅当 $Lu\geqslant f$.

(ii) 如果 u 是有界区域 Ω 中的下解, v 是使 $v\geqslant u$ 在 $\partial\Omega$ 上成立的上解,那么或者在整个 Ω 中 $v>u$, 或者 $v\equiv u$.

(iii) 设 u 是 Ω 中的下解, B 是使 $\bar{B}\subset\Omega$ 的球. 我们用 $\bar{u}$ 来记在 B 中 $Lu=f$, 在 ∂B 上满足条件 $\bar{u}=u$ 的解. 那么,

$$U(x)=\begin{cases}\bar{u}(x), & x\in B,\\ u(x), & x\in\Omega-B\end{cases}$$

定义的函数 U 是 Ω 中的下解.

(iv) 设 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 是 Ω 中的下解,那么函数

$$u(x)=\max\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_N(x)\}$$

也是 Ω 中的一个下解.

对于上解显然也能够作出与(i), (iii)和(iv)中相对应的陈述.

现在设 Ω 是有界区域，φ 是 $\partial\Omega$ 上的有界函数．如果函数 $u\in C^0(\bar{\Omega})$ 是 Ω 中的下解(上解)，并且在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant\varphi(u\geqslant\varphi)$，则称 u 为相对于 φ 的下函数(上函数)．按照上面的(ii)，每个下函数小于或等于每个上函数．我们用 S_φ 来表示 Ω 中相对于 φ 的下函数的集合．并设 S_φ 非空且上有界．例如，当 L 在 Ω 中是严格椭圆的，并且它的系数和 f 有界时就是这种情形．也就是说，如果 Ω 位于板形区域 $0<x_1<d$ 之中，那么函数

$$
\begin{aligned}
v^+ &= \sup|\varphi| + (e^{\gamma d}-e^{\gamma x_1})\frac{\sup|f|}{\lambda}, \\
v^- &= -\sup|\varphi| - (e^{\gamma d}-e^{\gamma x_1})\frac{\sup|f|}{\lambda}
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

当正常数 γ 充分大时分别是上函数和下函数；(见定理 3.7)．上函数 v^+ 给 S_φ 的函数提供了一个上界，而下函数 v^- 的存在性保证 S_φ 非空．

现在我们可以断言 $Lu=f$ 的 Perron 方法的基本存在性结果了．

定理 6.11 函数 $u(x)=\sup\limits_{v\in S_\varphi}v(x)$ 属于 $C^{2,\alpha}(\Omega)$，并且只要 u 有界，它就在 Ω 中满足 $Lu=f$.

证明与定理 2.12 的证明同，仅在少数细节上有差别，把它留给读者．我们请读者注意以下事实：在证明中所需要的解的紧性由推论 6.3 的内估计提供，在论证中极大值原理的适当形式由定理 3.5 给出．

现在我们要确定在定理 6.11 中定义的解连续地取边值 φ 的条件．与调和函数的情况一样，这个问题能够用我们在有界区域 Ω 中对 $c\leqslant 0$ 的 $Lu=f$ 定义的闸函数概念来处理．设 φ 是 $\partial\Omega$ 上的有界函数，在 $x_0\in\partial\Omega$ 连续．那么 $C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 中的函数序列 $\{w_i^+(x)\}$ ($\{w_i^-(x)\}$) 是 Ω 中相对于 L, f 和 φ 在点 x_0 的一个上(下)闸函数，如果它满足：

(i) 在 Ω 中 $Lw_i^+\leqslant f\,(Lw_i^-\geqslant f)$；

(ii) 在 $\partial\Omega$ 上 $w_i^+\geqslant\varphi\,(w_i^-\leqslant\varphi)$；

(iii) 当 $i\to\infty$ 时 $w_i^\pm(x_0)\to\varphi(x_0)$.

如果在一点处上、下闸函数都存在，那么简单地以这点的闸函数相称是方便的.

闸函数的基本性质包含在下面的引理中.

引理 6.12 设 u 是按定理 6.11 定义的 Ω 中 $Lu=f$ 的解，其中 φ 是 $\partial\Omega$ 上的有界函数，在 x_0 连续. 如果在 x_0 存在闸函数，则当 $x\to x_0$ 时 $u(x)\to\varphi(x_0)$.

证明 从 u 的定义和每个下函数被每个上函数界住的事实，对所有的 i，在 Ω 中有

$$w_i^-(x)\leqslant u(x)\leqslant w_i^+(x). \tag{6.45}$$

对任一 $\varepsilon>0$ 及所有充分大的 i，上面的条件(iii)蕴涵

$$\lim_{x\to x_0} w_i^-(x)>\varphi(x_0)-\varepsilon,\quad \lim_{x\to x_0} w_i^+(x)<\varphi(x_0)+\varepsilon.$$

从(6.45)推出

$$\lim_{x\to x_0}\sup|u(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon,$$

所以我们断定当 $x\to x_0$ 时 $u(x)\to\varphi(x_0)$. ∎

我们通过下列附注来进一步阐述闸函数的概念.

附注 1 在很多有意义的情况下方程的特殊结构简化了闸函数的确定. 例如，如果在方程 $Lu=f$ 中 $c\equiv0$, $f\equiv0$，这种情况和 Laplace 方程相同之处在于：在 x_0 的闸函数可以用单独一个上解 $w\in C^0(\overline{\Omega})$ 来确定，w 具有性质：在 $\partial\Omega-x_0$ 上 $w>0$，而 $w(x_0)=0$. 为了看出这一点，设 $\varepsilon>0$；于是由 φ 的有界性和它在 x_0 的连续性，存在正常数 k_ε，使得

$$w_\varepsilon^+\equiv\varphi(x_0)+\varepsilon+k_\varepsilon w,\quad w_\varepsilon^-\equiv\varphi(x_0)-\varepsilon-k_\varepsilon w$$

分别是 Ω 中相对于 φ 的上函数和下函数，并且显然当 $\varepsilon\to0$ 时 $w_\varepsilon^\pm(x_0)\to\varphi(x_0)$. 这样一来函数族 $w_\varepsilon^\pm(x)$ 确定一个闸函数.

考虑另一类方程，设 f 和 L 的系数在 Ω 中有界. 如果函数 $w\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 满足条件：(a) 在 Ω 中 $Lw\leqslant-1$；(b) 在 $\partial\Omega-x_0$ 上 $w>0$, $w(x_0)=0$，这一个函数也确定 x_0 处的一个闸函数. 也就是说，给定 $\varepsilon>0$，则与上面一样存在正常数 k_ε，使得在 $\partial\Omega$ 上

$$\varphi(x_0)+\varepsilon+k_\varepsilon w(x)\geqslant\varphi(x),\quad \varphi(x_0)-\varepsilon-k_\varepsilon w(x)\leqslant\varphi(x).$$

如果现在令 $k'_\varepsilon=\max(k_\varepsilon,\ \sup\limits_{\Omega}|f-c\varphi(x_0)|)$，函数

$$w_\varepsilon^+\equiv\varphi(x_0)+\varepsilon+k'_\varepsilon w,\quad w_\varepsilon^-\equiv\varphi(x_0)-\varepsilon-k'_\varepsilon w$$

就分别是上函数和下函数，并定义了 x_0 处的一个闸函数. 事实上，在 $\partial\Omega$ 上 $w_\varepsilon^+\geqslant\varphi$, $w_\varepsilon^-\leqslant\varphi$，并且因为 $Lw\leqslant-1$，故

$$L[\varphi(x_0)+\varepsilon+k'_\varepsilon w]\leqslant c(\varphi(x_0)+\varepsilon)-k'_\varepsilon\leqslant c\varphi(x_0)-k'_\varepsilon\leqslant f;$$

类似地，$L[\varphi(x_0)-\varepsilon-k'_\varepsilon w]\geqslant f$，所以，函数族 $w_\varepsilon^\pm$ 确定了在 x_0 关于 φ 的闸函数.

与上面的情况一样，当 x_0 处的闸函数是由 $Lu=0$ 的一个仅依赖于 L 及区域的固定上解 w 来构造时，我们就说 w *确定* x_0 *处的闸函数*.

附注 2 闸函数的上面的定义常常难于应用，因为它需要构造定义在整个 Ω 上的全局的下解和上解. 于是寻求能得到所需结果的*局部闸函数*就变得必要了. 为诱导出这个概念的定义，设 M^+ (M^-) 是解在 Ω 中的一个上(下)界，这个解在 $x_0\in\partial\Omega$ 的边界性质正是要研究的. 那么，函数序列 $\{w_i^+(x)\}$ ($\{w_i^-(x)\}$) 是在 x_0 的相对于 L, f, φ 和 M^+(M^-) 的一个*局部上(下)闸函数*，如果存在 x_0 的开邻域 $\mathscr{N}$，使得

(i) 在 $\mathscr{N}\cap\Omega$ 中 $Lw_i^+\leqslant f$ ($Lw_i^-\geqslant f$);

(ii) 在 $\mathscr{N}\cap\partial\Omega$ 上 $w_i^+\geqslant\varphi$ ($w_i^-\leqslant\varphi$);

(iii) 在 $\Omega\cap\partial\mathscr{N}$ 上 $w_i^+\geqslant M^+$ ($w_i^-\leqslant M^-$);

(iv) 当 $i\to\infty$ 时 $w_i^\pm(x_0)\to\varphi(x_0)$.

(特别地，如果 $\overline{\Omega}\subset\mathscr{N}$，函数 $w_i^\pm$ 就定义了上述全局意义下的 x_0 处的闸函数，并且条件(iii)能被去掉.) 我们直接看出：如果定理 6.11 中定义的解 u 在 Ω 中满足 $|u|\leqslant M$，则只要存在 x_0 相对于界 $\pm M$ 的局部闸函数，引理 6.12 仍然有效. 在本书的后面，局部闸函数将在解的边界性质的研究中起重要的作用.

附注 3 与引理 6.12 中相同的论证表明：闸函数确定了任一解在边界的连续性的模，如果假设这个解的边值连续的话. 这样，

在附注1所考察的情况下，如果 u 是 $Lu=f$ 的有界解，使得当 $x\to x_0$ 时 $u(x)\to\varphi(x_0)$，则对于任一 $\varepsilon>0$ 和一个适当的正常数 k_ε，在 Ω 中就有

$$|u(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\varepsilon+k_\varepsilon w(x).$$

如果 w 确定在 x_0 处的一个局部闸函数，则同样的不等式在 x_0 的一个固定的(与 ε 无关的)邻域中成立.

对于方程 $Lu=f$，与对于 Laplace 方程一样，闸函数的存在和构造是与边界的局部性质紧密相关的. 我们用一个在以后应用中感兴趣的例子来说明，设 L 在有界区域 Ω 内是严格椭圆的，$c\leqslant 0$，又设 f 和 L 的系数有界并属于 $C^\alpha(\Omega)$. 我们假设 Ω 在 $x_0\in\partial\Omega$ 满足外部球条件，所以对某个球 $B=B_R(y)$，有 $\bar{B}\cap\bar{\Omega}=x_0$. 我们证明函数

$$w(x)=\tau(R^{-\sigma}-r^{-\sigma}),\ r=|x-y|,$$

对于适当的正常数 τ 和 σ，在 Ω 中满足 $Lw\leqslant-1$，因而(根据上面的附注1) w 确定在 x_0 处的一个闸函数. 为方便起见取 $y=0$，从(6.40)和 $c\leqslant 0$ 的事实，我们得到对于 $x\in\Omega$，

$$\begin{aligned}L(R^{-\sigma}-r^{-\sigma})&\leqslant\sigma r^{-\sigma-4}[-(\sigma+2)a^{ij}x_ix_j+r^2(\Sigma a^{ii}+b^ix_i)]\\&\leqslant\sigma r^{-\sigma-2}[-(\sigma+2)\lambda+(\Sigma a^{ii}+b^ix_i)].\end{aligned}$$

因为 Ω 及 L 的系数有界，只要 σ 充分大，上式右端就是负的，并有负的上界. 所以，对适当大的 τ 和 σ，有 $Lw\leqslant-1$，这正和断言的一样.

这样，在方程 $Lu=f$ 的上述假设之下，在每一点 $x_0\in\partial\Omega$ 处满足外部球条件的有界区域 Ω(例如，任何 C^2 区域)，就在每一边界点有一个闸函数，每当规定的边值是连续的时候，引理 6.12 就能应用. 这个事实与定理 6.11 结合起来，我们就导出下面的一般的存在定理.

定理 6.13 设 L 在有界区域 Ω 中是严格椭圆的，$c\leqslant 0$，又设 f 及 L 的系数有界并属于 $C^\alpha(\Omega)$. 假设 Ω 在每一边界点上满足外部球条件. 那么，如果 φ 在 $\partial\Omega$ 上连续，Dirichlet 问题:

$$\text{在 }\Omega\text{ 中 }Lu=f,\ \text{在 }\partial\Omega\text{ 上 }u=\varphi,$$

就有(唯一)解 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

如果这个定理的假设条件加强到 f 及 L 的系数属于 $C^\alpha(\bar{\Omega})$，就能证明：使得 Dirichlet 问题对于连续边值可解的区域，对 Laplace 算子和 L 两者恰恰是同样的(见评注).

我们现在转向当边界数据充分光滑时上述解的全局正则性问题. 我们看出，在定理 6.8 的假设下，只要同样的结论(Kellogg 定理)对于 Poisson 方程成立，则 $Lu=f$ 的 Dirichlet 问题的解属于 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 我们现在直接从本节的结果来证明这个正则性定理.

定理 6.14 设 L 在有界区域 Ω 中是严格椭圆的，$c\leqslant 0$，又设 f 及 L 的系数属于 $C^\alpha(\bar{\Omega})$. 假设 Ω 是 $C^{2,\alpha}$ 区域，并设 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 那么 Dirichlet 问题：

$$\text{在 } \Omega \text{ 中 } Lu=f, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } u=\varphi,$$

有(唯一)解属于 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

证明 因为定理 6.13 的假设条件得到满足，可设 u 是 Dirichlet 问题的对应的解. 我们从定理 6.13 知道 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$，所以剩下的仅仅是证明在每点 $x_0\in\partial\Omega$，我们有 $u\in C^{2,\alpha}(D\cap\bar{\Omega})$，其中 D 是 x_0 的某个邻域. 因为 Ω 是 $C^{2,\alpha}$ 区域，于是存在 x_0 的这样一个邻域 N，它能够通过一个具有 $C^{2,\alpha}$ 逆的 $C^{2,\alpha}$ 映射 $y=\psi(x)$ 以这样的方式映到邻域 $\tilde{N}$ 之中：$\psi(N\cap\bar{\Omega})$ 包含球 B 的闭包，$N\cap\partial\Omega$ 的包含 x_0 的部分 T 被 ψ 映到 B 的边界部分 $\tilde{T}$ 中. 在这个映射之下方程 $Lu(x)=f(x)$ 变成定义在 B 中的方程 $\tilde{L}\tilde{u}(y)=\tilde{f}(y)$. 因为映射的 $C^{2,\alpha}$ 特性，我们有 $\varphi\to\tilde{\varphi}\in C^{2,\alpha}(\bar{B})$，并且 $\tilde{L}$ 和 $\tilde{f}$ 在 B 中满足 L 和 f 在 Ω 中满足的同样的假设；即，$\tilde{L}$ 在 B 中是严格椭圆的，$\tilde{c}\leqslant 0$，并且 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{L}$ 的系数属于 $C^\alpha(\bar{B})$；(见引理 6.5). 然后考虑 Dirichlet 问题：在 B 中 $\tilde{L}v=\tilde{f}$，在 ∂B 上 $v=\tilde{u}$ 的解 v. 因为在 $\tilde{T}\subset\partial B$ 上 $\tilde{u}=\tilde{\varphi}$，在 ∂B 上我们就有 $\tilde{u}\in C^0(\partial B)\cap C^{2,\alpha}(\tilde{T})$. 所以，由 Dirichlet 问题的唯一性和引理 6.10 得出 $\tilde{u}=v\in C^0(\bar{B})\cap C^{2,\alpha}(B\cup\tilde{T})$. 回到 Ω，设 $D'=\psi^{-1}(B)$. 我们看出 $u\in C^{2,\alpha}(D'\cup T)$，又因 x_0 在 $\partial\Omega$ 上是任意的，我们就得到结论 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. ▌

在上述定理中，如果 Ω 是 $C^{1,\alpha}$ 区域，而 $\varphi\in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$，则存在一个 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 中的解. 在[WI1]中从全局正则性结果推出了定理 6.14 的这一推广以及另外的推广.

如果算子 L 不满足 $c\leqslant 0$ 的条件，则从简单例子熟知，$Lu=f$ 的 Dirichlet 问题一般说来不再有解. 但是，断言 Fredholm 二择一性质还是可能的，我们确切地叙述如下.

定理 6.15 设 $L\equiv a^{ij}D_{ij}+b^iD_i+c$ 在 $C^{2,\alpha}$ 区域 Ω 中是具有 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 系数的严格椭圆算子. 那么，或者(a)齐次问题：在 Ω 中 $Lu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$ 仅有平凡解，在这种情形下非齐次问题：在 Ω 中 $Lu=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 对所有的 $f\in C^\alpha(\bar{\Omega})$，$\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 有唯一的 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 解；或者(b)齐次问题有非平凡解，这些解形成 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 的一个有限维子空间.

证明 我们看出在所说关于 f 和 φ 的假设之下，非齐次问题：在 Ω 中 $Lu=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 等价于问题：$Lv=f-L\varphi$，在 $\partial\Omega$ 上 $v=0$. 因而我们将只考虑具有齐次边界条件：在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$ 的 Dirichlet 问题，并把算子 L 限制在线性空间

$$\mathfrak{B}=\{u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\mid \text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } u=0\}$$

上就够了.

设 σ 是适合 $\sigma\geqslant\sup\limits_{\Omega} c$ 的任一常数，定义算子 $L_\sigma\equiv L-\sigma$. 于是，按定理 6.14，映射

$$L_\sigma:\mathfrak{B}\to C^\alpha(\bar{\Omega})$$

是可逆的. 此外，根据估计(6.36)及定理 3.7，逆映射 L_σ^{-1} 是从 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 到 $C^2(\bar{\Omega})$ 中的紧映射，所以作为从 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 到 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的映射也是紧的. 然后，考虑方程

$$u+\sigma L_\sigma^{-1}u=L_\sigma^{-1}f,\quad f\in C^\alpha(\bar{\Omega}), \tag{6.46}$$

在其中 $L_\sigma^{-1}:C^\alpha(\bar{\Omega})\to C^\alpha(\bar{\Omega})$ 是紧的. 根据定理 5.3，在 Banach 空间中紧算子上应用二择一性质，只要齐次方程 $u+\sigma L_\sigma^{-1}u=0$ 仅有平凡解 $u=0$，(6.46)就总有解 $u\in C^\alpha(\bar{\Omega})$. 当这个条件不满足时，算子 $I+\sigma L_\sigma^{-1}$ 的零空间($I=$ 恒等算子)是 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 的一个有限维子空间(定理 5.5).

用 $Lu=f$ 的 Dirichlet 问题的术语来翻译这些叙述. 首先注意因为 L_σ^{-1} 把 $C^\alpha(\overline{\Omega})$ 映上 $\mathfrak{B}$, (6.46) 的任一解 $u\in C^\alpha(\overline{\Omega})$ 必然也属于 $\mathfrak{B}$. 所以, 用 L_σ 作用于 (6.46), 我们得到

$$Lu=L_\sigma(u+\sigma L_\sigma^{-1}u)=f,\quad u\in\mathfrak{B}. \tag{6.47}$$

这样一来, (6.46) 的解与边值问题 (6.47) 的解之间有一对一的对应, 因而我们能够得出定理中叙述的二择一性质. ∎

Dirichlet 问题的二择一性质的重要性在于: 它证明了唯一性是存在性的一个充分条件. 我们注意由于引理 6.16(在下一节中证明), $Lu=f$ 的 $C^2(\overline{\Omega})$ 解也是 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 解, 所以 L 在 $C^2(\overline{\Omega})$ 中的零空间也是有限维的. 我们还要指出定理 5.5 蕴涵这样的事实: 那些使齐次问题 $Lu-\sigma u=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$ 有非平凡解的实数值 σ 的集合 Σ 是可数无穷集和离散的. 而且(按定理 5.3), 如果 $\sigma\notin\Sigma$, Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $L_\sigma u=f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 的任一解都满足估计

$$|u|_{2,\alpha}\leqslant C(|\varphi|_{2,\alpha}+|f|_{0,\alpha}),$$

其中常数 C 与 u, f, φ 无关.

6.4. 内部正则性和边界正则性

在前几节中非齐次项 f 和 L 的系数被假设成 C^α 函数, 方程 $Lu=f$ 的对应的解就在 $C^{2,\alpha}$ 类中. 我们现在研究这样的解的更高的正则性性质对于 f 及 L 的系数的光滑性的依赖性. 解的全局正则性将同样地依赖于边界和边值的光滑性.

首先我们证明: 如果 f 和 L 的系数是 C^α 的, 则 $Lu=f$ 的任一 C^2 解必然也属于类 $C^{2,\alpha}$.

引理 6.16 设 u 是方程 $Lu=f$ 在一开集 Ω 中的 $C^2(\Omega)$ 解, 其中 f 和椭圆型算子 L 的系数是 $C^\alpha(\Omega)$ 的. 那么 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

证明 显然, 只要对任意球 $B\subset\subset\Omega$ 证明 $u\in C^{2,\alpha}(B)$ 就够了. 设 B 就是这样一个球, 在 B 中考虑 v 的 Dirichlet 问题:

$$L_0v=a^{ij}D_{ij}v+b^iD_iv=f'\equiv f-cu,\quad 在\ \partial B\ 上\ v=u. \tag{6.48}$$

因为, 根据假设条件, $u\in C^2(\overline{B})$, 我们有 f' 及 L_0 的系数也在

$C^{\alpha}(\bar{B})$ 中．所以，按引理 6.10，(6.48) 在 $C^{2,\alpha}(B)\cap C^0(\bar{B})$ 中存在一解 v．由唯一性，我们推断解 u 和(6.48)的解 v 在 B 中恒等，这样就有 $u\in C^{2,\alpha}(B)$． ∎

我们注意上面的结果和本节中得到的那些结果不需要对系数 c 的符号作假定．

上面的引理与 Schauder 内估计产生出下述的内部正则性定理．

定理 6.17 设 u 是方程 $Lu=f$ 在开集 Ω 中的 $C^2(\Omega)$ 解，其中 f 及椭圆型算子 L 的系数属于 $C^{k,\alpha}(\Omega)$．则 $u\in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$．如果 f 及 L 的系数属于 $C^{\infty}(\Omega)$，则 $u\in C^{\infty}(\Omega)$．

证明 根据引理 6.16，定理对 $k=0$ 已被证明．我们现在对于 $k=1$ 来证明它．设 v 是 Ω 上的一个函数，用 $e_l(l=1,\cdots,n)$ 表示 x_l 方向的单位坐标向量．我们用

$$\Delta^h v(x)=\Delta_l^h v(x)=\frac{v(x+he_l)-v(x)}{h}$$

来定义 v 在 x 点处沿 e_l 方向的差商．对方程

$$Lu=a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu=f$$

的两端取差商，我们得到

$$\begin{aligned}(6.49)\qquad L(\Delta^h u)&=a^{ij}D_{ij}\Delta^h u+b^iD_i\Delta^h u+c\Delta^h u=F_h(x)\\&\equiv\Delta^h f-(\Delta^h a^{ij})D_{ij}\bar{u}-(\Delta^h b^i)D_i\bar{u}-(\Delta^h c)\bar{u},\\&\qquad\bar{u}=u(x+he_l).\end{aligned}$$

这个方程中的全部差商假设都是在 $x\in\Omega$ 处对某个 $l=1,\cdots,n$ 沿方向 e_l 取的．因为 $f\in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 及

$$\Delta^h f(x)=\frac{1}{h}\int_0^1\frac{d}{dt}f(x+the_l)\,dt=\int_0^1 D_lf(x+the_l)\,dt,$$

我们看出在任何子集 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 中对于满足 $|h|<\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ 的 h，$\Delta^h f\in C^{\alpha}(\Omega')$．特别地，如果 B 和 B' 是 Ω 中的球，使得 $B'\subset B\subset\subset\Omega$ 并且 $\mathrm{dist}(B',\partial B)=h_0>0$，那么对于 $0<|h|<h_0$，有 $\Delta^h f\in C^{\alpha}(\bar{B}')$，并且存在一个一致的界：$|\Delta^h f|_{0,\alpha;B'}\leqslant$ 与 h 无关的常数．对于差商 $\Delta^h a^{ij}$, $\Delta^h b^i$, $\Delta^h c$ 也能得到类似的界，它们也都属于 $C^{\alpha}(\bar{B}')$．因

为 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$(按引理 6.16),对于 $|h|<h_0$ 可推出 $F_h\in C^{\alpha}(\bar{B}')$,而且,$|F_h|_{0,\alpha;B'}\leqslant$ 与 h 无关的常数. 再注意到界 $\sup\limits_{B'}|\Delta^h u|\leqslant\sup\limits_{B}|Du|$,我们就能够从推论 6.3 的内估计论断函数 $\Delta^h u$ 及它的一、二阶导数 $D_i\Delta^h u$, $D_{ij}\Delta^h u$, $(i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$ 的集合在任何球 $B''\subset\subset B'$ 上有界且等度连续,所以这些集合中的每个序列包含着在 B'' 上一致收敛的子序列. 因为当 $h\to 0$ 时 $\Delta_l^h u\to D_l u$, 因而我们可以断言当 $h\to 0$ 时 $D_{ij}\Delta_l^h u\to D_{ijl}u$ 及 $u\in C^{3,\alpha}(B'')$. 因为 B'' 可以是其闭包也在 Ω 中的任意球,我们就断定 $u\in C^{3,\alpha}(\Omega)$,从而对于 $k=1$ 证明了定理.

为了对 $k>1$ 证明定理,我们用对 k 的归纳法进行. 在 L 和 f 的所说假设条件下,我们可以相应地假设 $u\in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$,我们希望证明 $u\in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. 因为 f 及 L 的系数属于 $C^{k,\alpha}(\Omega)$,方程 $Lu=f$ 可微分 $k-1$ 次, 这样就得出一个方程 $L\hat{u}=\hat{f}$, 其中 $\hat{u}=D^{\beta}u$, β 是某个使 $|\beta|=k-1$ 的指标, 还有这里的 $\hat{f}$ 等于 $D^{\beta}f$ 加上系数的阶数 $\leqslant k-1$ 的导数与 u 的阶数 $\leqslant k$ 的导数的各个乘积的和. 因而 $\hat{f}\in C^{1,\alpha}(\Omega)$. 按照上面对 $k=1$ 的同样的论证, 我们看出 $\hat{u}\in C^{3,\alpha}(\Omega)$, 所以象定理中宣称的一样, $u\in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. 最后关于解属于$C^{\infty}(\Omega)$的断言可立即推出. ∎

还有一种情况:如果 f 和 L 的系数是实的解析函数,则 $Lu=f$ 的任何解同样是解析的. 其证明可参阅文献(例如: [HO3]).

还能够断言一直到边界的类似的正则性, 这时边界本身和解的边值充分光滑显然是必要的. 为了建立直到边界的适当的正则性结论,我们先证与引理 6.16 类似的一个引理.

引理 6.18 设 Ω 是具有 $C^{2,\alpha}$ 边界部分 T 的区域, 又设 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 假设 u 是 $C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 函数并在 Ω 中满足 $Lu=f$, 在 T 上 $u=\varphi$, 其中 f 及严格椭圆算子 L 的系数属于 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. 那么 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup T)$.

证明 因为 T 是 $\partial\Omega$ 的 $C^{2,\alpha}$ 部分, 于是在 T 的每一点 x_0 可以求得一个边界邻域 $T'\subset\subset T$ 及 Ω 中的一个 $C^{2,\alpha}$ 区域 D, 使得 $x_0\in T'\subset\partial D$. 此外,$D$ 可选得这样小使得推论 3.8 能够应用,所以

在 D 中 $Lu=f$ 的 Dirichlet 问题至多有一个 $C^0(\overline{D})\cap C^2(D)$ 的解.

现在，论证与引理 6.10 中的非常类似. 因为 $u\in C^0(\partial D)\cap C^{2,\alpha}(T')$，我们可以把 ∂D 上 u 的边值延拓成一个函数 $v\in C^0(D')\cap C^{2,\alpha}(\overline{B})$，其中 $D\subset\subset D'$ 及 $B=B_\rho(x_0)\subset\subset D'$. (见关于 v 的构造的引理 6.38 后面的附注 1.) 设 $\{v_k\}$ 是 $C^3(D')$ 中的函数序列，使得当 $k\to\infty$ 时，

$$|v_k-v|_{0;D}\to 0 \quad 及 \quad |v_k|_{2,\alpha;B}\leqslant C|v|_{2,\alpha;B}.$$

由于 Fredholm 二择一性质(定理 6.15)，Dirichlet 问题: 在 D 中 $Lu=f$，在 ∂D 上 $u=v_k$ 对每个 k 在 $C^{2,\alpha}(\overline{D})$ 中有唯一解 u_k. 作为推论 6.3 及 3.8 的一个推论，序列 $\{u_k\}$ 在 D 内收敛于解 u; 又按照推论 6.7 我们有 $u\in C^{2,\alpha}(B'\cap\overline{D})$，其中 $B'=B_{\rho/2}(x_0)$. 因为 x_0 是 T 上任意的点，就推出 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup T)$. ▌

如果 $c\leqslant 0$，上面的结果实质上包含在定理 6.14 的证明中. 但是，当对系数 c 的符号不加限制时，定理 6.14 中的论证要作适当修改，象上面证明中一样. 在评注中还包含有沿着不同路子的别的证明.

如果在假设和结论中用 $C^{1,\alpha}$ 来代替 $C^{2,\alpha}$，引理 6.18 仍然有效(见[WI1]).

把引理 6.18 作为一个出发点，我们能够建立如下的全局正则性定理.

定理 6.19 设 Ω 是 $C^{k+2,\alpha}$ 区域($k\geqslant 0$)，又设 $\varphi\in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. 假设 u 是在 Ω 中满足 $Lu=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 的 $C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 函数，其中 f 和严格椭圆算子 L 的系数属于 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. 那么，$u\in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

证明 当 $k=0$ 时，定理蕴涵在引理 6.18 中. 现在对 $k=1$ 来证明这个结论. 设 x_0 是 Ω 的一个任意的边界点，考虑一个在 x_0 附近把边界拉直的适当的 $C^{3,\alpha}$ 微分同胚 ψ. 作为这个映射的结果，我们可以把方程 $Lu=f$ 看成为定义在一个区域 G 中的方程，G 在 $x_n=0$ 上具有超平面部分 T，而定理的其余假设条件不变(见第 94 页). 用函数 $u-\varphi$ 代替 u，并注意到 $L\varphi\in C^{1,\alpha}(\overline{G})$，我们可

以在定理的叙述中假设 $\varphi=0$.

与定理 6.17 一样，我们对任一 $l=1, \cdots, n-1$, 在 e_l 方向上对方程 $Lu=f$ 取差商，因而得到一个(6.49)形状的方程，差商 $\Delta^h u$ $(=\Delta_l^h u)$ 满足这方程：如果 $0<|h|<h_0$, 那么这个方程在具有超平面边界部分 $T'\subset T$ 的集合 $G'=\{x\in G \mid \operatorname{dist}(x, \partial G-T)>h_0\}$ 中成立. 在关于 L 及 f 的假设之下，因为在 T 上 $u=0$ 及 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{G})$, 引理 6.4 的条件在 G' 中被方程(6.49)和它的解 $\Delta^h u$ 所满足. 从引理 6.4 就推出函数族 $\Delta^h u$, $D_i\Delta^h u$, $D_{ij}\Delta^h u(i, j=1, \cdots, n)$ 在 $G'\cup T'$ 的紧子集上有界并且等度连续. 因为当 $h\to 0$ 时 $\Delta_l^h u\to D_l u$, 我们就能够断言，对于 $i, j=1, \cdots, n$ 及 $l=1, \cdots, n-1$, 有 $D_{ij}\Delta_l^h u\to D_{ijl}u$, 此外，对于 $l=1, \cdots, n-1$, 还有 $D_l u\in C^{2,\alpha}(G'\cup T')$. 剩下仅仅要证明 $D_n u\in C^{2,\alpha}(G'\cup T')$ 也同样成立. 记

$$D_{nn}u=(1/a^{nn})(f-(L-a^{nn}D_{nn})u),$$

从上面结果可看出右端属于 $C^{1,\alpha}(G'\cup T')$ 就可立刻推出这一点. 因为 x_0 是 $\partial\Omega$ 上一个任意点，我们就得到了 $u\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ 的结论.

与定理 6.17 一样，用对 k 的归纳法对 $k>1$ 证明定理：考虑任一 $k-1$ 阶导数满足的方程，从而就化归上面处理过的 $k=1$ 的情况. ∎

从前面实质上是局部的论证法显然可得：只要解 u 一直连续到任一 $C^{k+2,\alpha}$ 边界部分 T, 并在 T 上取 $C^{k+2,\alpha}$ 边值，则正则性结果就一直到 T 都仍然正确.

6.5. 另一种方法

对定理 6.13 的证明的考察表明：这个存在定理是通过 Perron 方法从球上的 Dirichlet 问题对于任意连续边值的可解性得出来的. 而后一结论(包含在引理 6.10 中)，其证明本质上是依赖于 Schauder 理论的边界估计的. 但是，如同下面我们将要看到的，有可能发展一种连续边值的 Dirichlet 问题的理论，它完全基于 Schauder 内估计，而根本不用边界估计.

这一节的讨论将根据定理 6.2 中内估计的如下的推广. 为了它的叙述, 我们要用到(6.10)中定义的拟范数和范数.

引理 6.20 设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 Ω 中满足方程 $Lu=f$, 其中 L 的系数满足(6.12)和(6.13). 假设对于某个 $\beta\in\mathbb{R}$, $|u|_{0;\Omega}^{(-\beta)}<\infty$ 和 $|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2-\beta)}<\infty$. 那么我们有

$$(6.50)\qquad |u|_{2,\alpha;\Omega}^{(-\beta)}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}^{(-\beta)}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2-\beta)}),$$

其中 $C=C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,\beta)$.

证明 设 x 是 Ω 中任一点, d_x 是它到 $\partial\Omega$ 的距离, 且 $d=d_x/2$. 那么, 将(6.14)应用于球 $B=B_d(x)$, 就有

$$\begin{aligned}
&d^{1-\beta}|Du(x)|+d^{2-\beta}|D^2u(x)|\leqslant Cd^{-\beta}(|u|_{0;B}+|f|_{0,\alpha;B}^{(2)})\\
&\quad\leqslant C\Big[\sup_{y\in B}d_y^{-\beta}|u(y)|+\sup_{y\in B}d_y^{2-\beta}|f(y)|\\
&\qquad+\sup_{y\in B}d_{x,y}^{2+\alpha-\beta}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\Big]\leqslant C(|u|_{0;\Omega}^{(-\beta)}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2-\beta)}).
\end{aligned}$$

所以

$$(6.51)\qquad |u|_{2;\Omega}^{(-\beta)}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}^{(-\beta)}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2-\beta)}).$$

再来估计 $[u]_{2,\alpha;\Omega}^{(-\beta)}$, 设 x, y 是 Ω 中使 $d_x\leqslant d_y$ 的不同的点, 并且 $B=B_d(x)$ 如上. 那么, 考虑 $|x-y|\leqslant d/2$ 和 $|x-y|>d/2$ 两种情形, 对于任何一个二阶导数 D^2u 我们有

$$\begin{aligned}
&d_{x,y}^{2+\alpha-\beta}\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}\\
&\quad\leqslant Cd^{-\beta}(|u|_{0;B}+|f|_{0,\alpha;B}^{(2)})+d_x^{2+\alpha-\beta}\frac{(|D^2u(x)|+|D^2u(y)|)}{(d/2)^\alpha}\\
&\quad\leqslant C(|u|_{0;\Omega}^{(-\beta)}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2-\beta)})+8[u]_{2;\Omega}^{(-\beta)}.
\end{aligned}$$

对于 x, y 取上确界, 并应用(6.51), 我们得到

$$[u]_{2,\alpha;\Omega}^{(-\beta)}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}^{(-\beta)}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2-\beta)}).$$

把这个公式与(6.51)合并, 就得到要求的估计(6.50). ▌

我们注意到对于 $\beta=0$, 上述结果归结为以前的估计(6.14). 当 $\beta>0$ 时, 关于 $|u|_{0;\Omega}^{(-\beta)}$ 有限的这个假设显然要求在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$.

在这一节里我们将要应用连续性方法来求解 $Lu=f$ 在球中的 Dirichlet 问题. 这就需要下面引理中给出的在适当无界的 f 下

解的先验估计. Poisson 方程的对应结果包含在定理 4.9 中.

引理 6.21 设 L 是严格椭圆的(满足(6.2)), $c\leqslant 0$, 并且系数的绝对值在球 $B=B_R(x_0)$ 中以量 Λ 为界. 假设 $u\in C^0(\bar{B})\cap C^2(B)$ 是 B 中 $Lu=f$, 在 ∂B 上 $u=0$ 的解. 那么, 对于任何 $\beta\in(0,1)$ 我们有

$$\sup_{x\in B} d_x^{-\beta}|u(x)|\leqslant C\sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)|, \tag{6.52}$$

其中 $C=C(\beta, n, R, \lambda, \Lambda)$.

证明 设 β 是固定的, 并设 $\sup\limits_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)|=N<\infty$. 构造一个界住 u 的适当的比较函数即可得到需要的估计(6.52). 为了方便起见我们取 $x_0=0$, 令

$$w_1(x)=(R^2-r^2)^\beta,\ r=|x|.$$

于是

$$\begin{aligned}Lw_1(x)=&\beta(R^2-r^2)^{\beta-2}[4(\beta-1)a^{ij}x_ix_j\\&-2(R^2-r^2)(\Sigma a^{ii}+b^ix_i)+(c/\beta)(R^2-r^2)^2]\\\leqslant&-\beta(R^2-r^2)^{\beta-2}[4(1-\beta)\lambda r^2\\&+2(R^2-r^2)(n\lambda-\sqrt{n}\Lambda r)].\end{aligned}$$

显然, 对于某 R_0, $0\leqslant R_0<R$, 如果 $R_0\leqslant r\leqslant R$, 方括号中的表达式就是正的. 所以

$$\begin{aligned}Lw_1(x)&\leqslant -c_1(R-r)^{\beta-2}\quad (R_0\leqslant r<R)\\&\leqslant c_2(R-r)^{\beta-2}\quad (0\leqslant r<R_0),\end{aligned}$$

其中 c_1 和 c_2 是仅依赖于 β, n, R, λ 及 Λ 的正常数. (如果 $R_0=0$, 第二个不等式当然是多余的.)

现在设 $w_2(x)=e^{\alpha R}-e^{\alpha x_1}$, 其中 $\alpha\geqslant 1+\sup\limits_B|\mathbf{b}|/\lambda$. 那么, 与定理 3.7 中一样, 在 B 中有 $Lw_2(x)\leqslant -\lambda e^{-\alpha R}$, 所以

$$Lw_2(x)\leqslant -c_3(R-r)^{\beta-2}\ (0\leqslant r<R_0)\leqslant 0\ (R_0\leqslant r<R),$$

其中 $c_3=\lambda e^{-\alpha R}(R-R_0)^{2-\beta}$. 因为, 按照假设, $|f(x)|\leqslant Nd_x^{\beta-2}$ 及 $d_x=R-r$, 就推出对于正常数 $\gamma_1=1/c_1$ 及 $\gamma_2=(1+c_2/c_1)/c_3$,

$$L(\gamma_1w_1+\gamma_2w_2)\leqslant -(R-r)^{\beta-2}\leqslant -|f(x)|/N\ (0\leqslant|x|<R).$$

设 $w=\gamma_1w_1+\gamma_2w_2$, 我们看到在 ∂B 上 $w(x)\geqslant 0$, 在 $x=(R, 0, \cdots,$

0) 处 $w(x)=0$, 而且

$$\text{在 } B \text{ 中 } L(Nw\pm u)\leqslant 0,\quad \text{在 } \partial B \text{ 上 } Nw\pm u\geqslant 0.$$

从极大值原理(推论 3.2)我们推断在 B 中

$$|u(x)|\leqslant Nw(x). \tag{6.53}$$

现在考虑任一点 $x\in B$, 不失一般性我们假设它处于 x_1 轴上. 那么(6.53)蕴涵不等式

$$|u(x)|\leqslant CN(R-r)^{\beta}=CNd_x^{\beta}$$

对于某常数 $C=C(\beta, n, \lambda, \Lambda)$ 成立, 引理证完. ∎

能够用类似的方法把上面的结果推广到更一般的区域, 例如 C^2 区域(见习题 6.5).

借助于前面的两个引理, 现在能够证明将定理 4.9 推广到方程 $Lu=f$ 的下述定理. 我们注意这个证明的得出并不用边界估计.

定理 6.22 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个球, f 是 $C^{\alpha}(B)$ 中函数, 对某 $\beta\in(0, 1)$ 使得 $|f|_{0,\alpha;B}^{(2-\beta)}<\infty$. 假设 L 在 B 中是严格椭圆的, $c\leqslant 0$, 并且系数满足(6.2)和(6.31). 那么, Dirichlet 问题: 在 B 中 $Lu=f$, 在 ∂B 上 $u=0$ 存在(唯一)解 $u\in C^0(\bar{B})\cap C^{2,\alpha}(B)$. 另外, $|u|_{0;B}^{(-\beta)}<\infty$, 所以 u 在 B 中满足估计(6.50).

证明 证明的论证基于连续性方法. 象在定理 6.8 中一样, 考虑方程族

$$L_t u\equiv tLu+(1-t)\Delta u=f,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

注意到 L_t 的系数也在 B 中满足(6.2)及(6.31), 其中 $\lambda_t=\min(1, \lambda)$, $\Lambda_t=\max(1, \Lambda)$ 分别代替了 λ 和 Λ. 由(6.11)我们有

$$|a^{ij}D_{ij}u|_{0,\alpha}^{(2-\beta)},\ |b^iD_iu|_{0,\alpha}^{(2-\beta)},\ |cu|_{0,\alpha}^{(2-\beta)}\leqslant C|u|_{2,\alpha}^{(-\beta)},$$

所以, 对于每个 t, 算子 L_t 是从 Banach 空间

$$\mathfrak{B}_1=\{u\in C^{2,\alpha}(B)\ |\ |u|_{2,\alpha;B}^{(-\beta)}<\infty\}$$

到 Banach 空间

$$\mathfrak{B}_2=\{f\in C^{\alpha}(B)\ |\ |f|_{0,\alpha;B}^{(2-\beta)}<\infty\}$$

中的有界线性算子. Dirichlet 问题: 在 B 中 $L_tu=f$, 在 ∂B 上 $u=0$, 对于任意 $f\in\mathfrak{B}_2$ 的可解性等价于用 $u\to L_tu$ 定义的 $\mathfrak{B}_1\to\mathfrak{B}_2$ 映射的可逆性. 设 u_t 表示对某 $t\in[0, 1]$ 这个问题的解. 那

么，从(6.52)我们有

$$|u_t|_0^{(-\beta)} \leqslant C|f|_0^{(2-\beta)} \leqslant C|f|_{0,\alpha}^{(2-\beta)}.$$

从(6.50)推出

$$|u_t|_{2,\alpha}^{(-\beta)} \leqslant C|f|_{0,\alpha}^{(2-\beta)},$$

或，等价地，

$$\|u\|_{\mathfrak{B}_1} \leqslant C\|L_t u\|_{\mathfrak{B}_2},$$

常数 C 与 t 无关. L_0 是映上的这一事实已经包含在定理 4.9 中. 现在能够应用连续性方法(定理 5.2)，定理证完. ▌

上面的定理能够推广到连续边值的情况得出引理 6.10 的下述推论.

推论 6.23 在定理 6.22 的假设条件之下，如果 $\varphi \in C^0(\overline{B})$，那么，Dirichlet 问题：在 B 中 $Lu=f$，在 ∂B 上 $u=\varphi$ 有(唯一)解 $u \in C^0(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$.

证明 设 $\{\varphi_k\}$ 是在 $\overline{B}$ 上一致收敛于 φ 的 $C^3(\overline{B})$ 函数序列. 按定理 6.22, Dirichlet 问题：在 B 中 $Lv_k=f-L\varphi_k$，在 ∂B 上 $v_k=0$ 对于每个 k 是唯一可解的，并且定义了具有非齐次边值的对应问题：在 B 中 $Lu_k=f$，在 ∂B 上 $u_k=\varphi_k$ 的解 $u_k=v_k+\varphi_k$. 从极大值原理用通常的方法推出 u_k 在 $\overline{B}$ 上一致收敛于一个函数 $u \in C^0(\overline{B})$，使得在 ∂B 上 $u=\varphi$. 从内估计(推论 6.3)提供的紧性还推出在 B 中 $Lu=f$，所以 u 是要求的解. ▌

从球上的这个存在定理出发，我们能够象前面一样在更一般的区域中应用 Perron 方法接着做下去，特别是得到定理 6.13.

6.6. 非一致椭圆型方程

上几节中在任意光滑有界区域中有效的存在性结果，是在微分算子 L 的一致椭圆性的假设下得出的. 当方程不再是一致椭圆型时，可解性的条件要受到很大的局限，一般说来，将需要对区域的几何形状或者微分算子和几何形状之间的联系加以限制.

考虑一个 Dirichlet 问题不可解的例子是有益的. 考察方程

$$u_{xx}+y^2u_{yy}=0 \tag{6.54}$$

在矩形 R: $0<x<\pi$, $0<y<Y$ 中的解 $u(x, y)$，使得 $u \in C^0(\overline{R}) \cap$

$C^2(R)$，满足边界条件 $u(0, y)=u(\pi, y)=0(0\leqslant y\leqslant Y)$. 任一这样的解 $u(x, y)$ 有 Fourier 级数展开式 $\sum f_n(y)\sin nx$, 其中系数 $f_n(y)$ 满足常微分方程 $y^2f_n''-n^2f_n=0$. 这个方程有线性无关的解 $y^{\beta_n}, y^{\gamma_n}$, 其中 $\beta_n=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4n^2})>0, \gamma_n=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1+4n^2})<0$. $u(x,y)$ 在 $y=0$ 有界的事实要求 $f_n(y)=\text{const}\cdot y^{\beta_n}$, 所以 $f_n(0)=0$. 这样推出了 $u(x, 0)=0$, 因此在 $\overline{R}$ 上满足指定边界条件的唯有的连续解在 $y=0$ 上必有零边值，所以不能取指定的非零边界数据.

导出定理 6.13 的论证在系数和区域的适当假设条件下能够推广到非一致椭圆型方程. 我们首先注意，如果方程 $Lu=f(c\leqslant 0)$ 中 f 及 L 的系数在区域 Ω 中是局部 Hölder 连续的，并且相对于指定边值函数 φ 的 Dirichlet 问题的下函数集合非空，上有界，那么，Perron 方法就定义了 $Lu=f$ 在 Ω 中的一个有界解(定理 6.11). 特别，如果 $|\mathbf{b}|/\lambda, f/\lambda$ 及区域 Ω 有界(其中 $\lambda(x)$ 是系数矩阵 $\mathbf{A}(x)=[a^{ij}(x)]$ 的最小特征值)就是这种情形；(见定理 3.7). 在下面的考察中这个假设将被省略.

为了研究在一指定的边界点 $x_0\in\partial\Omega$ 处是否 $u(x)\to\varphi(x_0)$, 其中 φ 是连续的，与前面定理 6.13 的讨论一样，我们假设 Ω 在 x_0 满足外部球条件，并设 $B=B_R(y)$ 是一个球，使得 $\overline{B}\cap\overline{\Omega}=x_0$. 当不再假设 L 在 x_0 附近一致椭圆时，我们作附加的(但是较少限制的)假设：$|\mathbf{A}(x)\cdot(x-y)|\geqslant\delta>0$ 对于 Ω 与 x_0 的某邻域 N 的交集 $N\cap\Omega$ 中所有的 x 成立. (特别地，如果系数矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 在 x_0 连续，当 $\mathbf{A}(x_0)\cdot(x_0-y)\neq 0$ 时，也就是说，当球 B 的半径向量 x_0-y 不在点 x_0 处 $\mathbf{A}$ 的零空间中时，这个条件将被满足.) 于是推出

$$a^{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\geqslant\lambda'|x-y|^2$$

对于所有的 $x\in N\cap\Omega$ 成立，其中 λ' 是一个适当的正常数，虽然最小特征值 λ 在 x_0 可以趋于零. 我们还假设 L 的所有系数有界. 前面定理 6.13 的闸函数论证现在可与以前同样进行，我们可得结论：在第 104 页上定义的函数 $w(x)=\tau(R^{-\sigma}-r^{-\sigma})$ 对于适当选择的 τ 和 σ 确定了在 x_0 的一个局部闸函数，所以 $u(x)\to\varphi(x_0)$. 我

们指明：在对方程(6.54)考虑的边值问题中，在边界线段 $y=0$, $0<x<\pi$ 上每一点处的法向量都处于系数矩阵[1, 0/0, 0]的零空间中，这样，上面的假设不满足.

另外，设 $[a^{ij}(x)]$ 是一个任意的正定矩阵并假设函数 $|\mathbf{b}|/\lambda$, c/λ, f/λ 有界. 除以最小特征值 λ, 不失一般性，我们可假设算子 L 在区域 Ω 中是严格椭圆的，并有 $\lambda=1$. 如果 Ω 在 x_0 处满足严格外部平面条件，这时极限行为 $u(x)\to\varphi(x_0)$ 就得到保证. 所谓严格外部平面条件，我们理解成：在 x_0 的某邻域内存在一个与 $\bar{\Omega}$ 仅切于一点 x_0 的超平面. 例如，若 $\partial\Omega$ 在 x_0 附近严格凸，这个条件将被满足. 为证明断言 $u(x)\to\varphi(x_0)$, 为了方便起见我们选 x_0 为原点，并设在 x_0 处假设的外部平面的法线是 x_1 轴，在 x_0 附近的 Ω 中有 $x_1>0$. 在所说的条件下存在一个板形区域 $0<x_1<d$, 它与 Ω 在 x_0 附近的交集 D 满足：在 $\bar{D}-x_0$ 上 $x_1>0$. 与定理 3.7 证明中一样，我们知道只要 $\gamma\geqslant 1+\sup\limits_D\ (|\mathbf{b}|/\lambda)$, 函数

$$w(x)=e^{\gamma d}-e^{\gamma x_1} {}^{*)},$$

就在 D 中满足 $Lw\leqslant-\lambda$, 如果我们取 $\lambda=1$, 于是就有 $Lw\leqslant-1$. 与第 102 页附注 1 一样可推出：对于一个适当的常数 $k=k(\varepsilon)$, 函数

$$w_\varepsilon^+\equiv\varphi(x_0)+\varepsilon+kw,\ w_\varepsilon^-\equiv\varphi(x_0)-\varepsilon-kw$$

确定一个关于 u 在 Ω 中的上界和下界的 x_0 处的局部闸函数.

我们注意：如果边界函数 φ 在 x_0 附近是常数，那么甚至当 Ω 在 x_0 处满足非严格外部平面条件时也能推出 $u(x)\to\varphi(x_0)$. 就此而论应当指明在以前对(6.54)考虑的边值问题中，边界线段，$y=0$, $0<x<\pi$, 是凸的但不是严格凸的，因而所说的边值问题仅仅对于该区间上的零数据可解.

从上面的讨论可直接得出定理 6.13 到非一致椭圆型方程的下述简单推广.

定理 6.24 设 L 在有界区域 Ω 中是严格椭圆的(满足(6.2)),

---

*) 应改为

$$w(x)=e^{\gamma d}(1-e^{-\gamma x_1})$$

才满足在 x_0(原点)处 $w(x_0)=0$ 的要求. ——译者注

$c\leqslant 0$, a^{ij}, b^i, c, $f\in C^\alpha(\Omega)$, 并设 b^i, c, f 是有界的. 假如 Ω 满足外部球条件，除此之外，在使任一系数 a^{ij} 无界的那些边界点上满足严格外部平面条件. 那么，如果 φ 在 $\partial\Omega$ 上连续，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Lu=f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 就有(唯一)解 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

显然，从上面的论证可看出这个结果能在不同的方面加以修改(例如，见习题 6.4). 当方程是齐次的并且 L 的低阶项不出现时，我们得到下面的

推论 6.25 设椭圆型方程 $a^{ij}D_{ij}u=0$ 的系数 a^{ij} 属于 $C^\alpha(\Omega)$, 其中 Ω 是有界严格凸区域. 那么，对于任意连续边值，Dirichlet 问题在 $C^0(\overline{\Omega})\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ 中可解.

虽然这个结果是定理 6.24 的一个直接推论，但是，注意到由于 Ω 的严格凸性及方程的特殊形式，可以用一个线性函数确定每个边界点上的闸函数来更直接地证明它.

比较仔细地考察 L 的系数与边界的局部曲率性质之间的关系使我们有可能推出存在闸函数的另外一些一般的充分条件. 设 f 及 L 的系数($c\leqslant 0$)有界并设 Ω 是 C^2 区域. 主系数矩阵 $[a^{ij}(x)]$ 的最小特征值可在 $\partial\Omega$ 上趋向零. 我们将寻求关于连续边界函数 φ 及界 M 的在 $x_0\in\partial\Omega$ 处的局部闸函数存在的条件.

设 B 表示中心在 x_0 的球，令 $G=B\cap\Omega$; B 将在后面来规定. 设 $\psi\in C^2(\overline{G})$ 是一个固定的函数，使得在 $\overline{G}-x_0$ 上 $\psi(x)>0$, 且 $\psi(x_0)=0$. 对每个 $\varepsilon>0$ 及适当的常数 $k=k(\varepsilon)$, 我们可满足不等式

$$\begin{aligned}&\text{在 }\partial\Omega\cap B\text{ 上}\quad \varepsilon+k\psi(x)\geqslant|\varphi(x)|,\\&\text{在 }\partial B\cap\Omega\text{ 上}\qquad\qquad\quad\ \geqslant M.\end{aligned}$$

现在我们定义距离函数(见附录),

$$d(x)=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega),\ x\in\Omega,$$

它在某邻域 $\qquad \mathcal{N}=\{x\in\Omega\,|\,d(x)<d_0\}$

中是 C^2 类的，并可假设 $G\subset\mathcal{N}$. 我们打算寻求形状为

$$w^+=\varphi(x_0)+\varepsilon+k\psi+Kd,\quad w^-=\varphi(x_0)-\varepsilon-k\psi-Kd$$

的函数 $w^\pm(x)$ (其中 $K=K(\varepsilon)$ 是一个适当的正常数)在 G 中定义

一个 x_0 处的闸函数的条件. 如果 $Lw^+\leqslant f$ 及 $Lw^-\geqslant f$ 在 G 中成立就是这种情形. 这样一来, 如果对于某个 K, 不等式

(6.55) $$K(a^{ij}D_{ij}d+b^iD_id)\leqslant -k|L\psi|-|f-c\varphi(x_0)|$$

在 G 中成立, 函数 $w^\pm$ 就定义一个闸函数. 这规定了闸函数存在性的一个充分条件, 原则上说, 通过对给定的方程及区域的检查是能够验证这个条件的.

为更具体地实现条件(6.55), 例如, 我们假设系数 $a^{ij}(x)$ 在 x_0 连续. 选择坐标系使 x_0 为原点, x_n 轴与 x_0 处内法线 Dd 一致. 将此坐标系绕 x_n 轴作一旋转 $\mathbf{P}$, 使得新的坐标轴是 x_0 处 $\partial\Omega$ 的主方向, Hesse 矩阵 $[D_{ij}d(x_0)]$ 就被对角化, 因此

$$\mathbf{P}^t[D_{ij}d(x_0)]\mathbf{P}=\operatorname{diag}[-\varkappa_1,\ -\varkappa_2,\ \cdots,\ -\varkappa_{n-1},\ 0],$$

其中 $\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \cdots,\ \varkappa_{n-1}$ 是 $\partial\Omega$ 关于 x_0 处内法线的主曲率; (见附录). 如果 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 表示矩阵 $\mathbf{P}^t[a^{ij}(x_0)]\mathbf{P}$ 对应的对角线元素, 我们知道

(6.56) $$(a^{ij}D_{ij}d)_{x=x_0}=-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\varkappa_i.$$

所以, 如果

(6.57) $$\sum_{i=1}^{n-1}a_i\varkappa_i>\sup_\Omega|\mathbf{b}|,$$

只要 K 选得足够大, 由连续性就得出对于某个包围 x_0 的球 B, 在 $G=B\cap\Omega$ 中不等式(6.55)满足. 此外如果还有系数 b^i 在 x_0 连续, 又若 b_ν 表示向量 $\mathbf{b}(x_0)=(b^1(x_0),\ \cdots,\ b^n(x_0))$ 关于内法线的法分量, 只要

(6.58) $$\sum_{i=1}^{n-1}a_i\varkappa_i-b_\nu>0,$$

则在适当的 G 中条件(6.55)就满足. 因而, 在所说的假设条件之下, (6.57)和(6.58)是在 x_0 处局部闸函数存在的充分条件. 如果 $\mathbf{b}(x_0)=0$, (6.58)变成更简单的条件

(6.59) $$\sum_{i=1}^{n=1}a_i\varkappa_i>0,$$

式中只包含首项系数和边界的主曲率与主方向. 不难去掉在边界

上系数连续性的假设而适当地改写公式(6.57)和(6.58).

作为前述事实的一个简单的例证，考虑非一致椭圆型方程

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i}+\lambda(x) u_{x_n x_n}=0,$$

其中 $x\neq 0$ 时 $\lambda(x)>0$, $\lambda(0)=0$, 又 λ 在 $x=0$ 连续. 如果 Ω 是一个区域, 以 $x_n=0$ 作为 $\partial\Omega$ 在原点的切平面, 那么条件(6.59)变为 $\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_i>0$, 即, $\partial\Omega$ 在 $x=0$ 处(关于内法线)的平均曲率是正的. 所以, 只要 $\partial\Omega$ 在 $x=0$ 处平均曲率为正, 在这里闸函数就存在. 在 $\mathbb{R}^3$ 中这类区域的一个例子是

$$\Omega=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_3>2x_1^2-x_2^2,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}.$$

我们注意, 若 $\partial\Omega$ 不是 C^2 的, 只要能找到一个 C^2 区域 $\tilde{\Omega}$ 使得 $x_0\in\partial\Omega\cap\partial\tilde{\Omega}$, 并且对包含 x_0 的某球 B, 有 $B\cap\Omega\subset B\cap\tilde{\Omega}$, 则前面的考虑仍然能够应用. 如果距离函数 $d(x)$ 被 $\tilde{d}(x)=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega)$ 代替, 那么, 在 x_0 处闸函数存在性的上述条件保持有效.

6.7. 其它边界条件; 斜导数问题

直到这时我们只涉及到 Dirichlet 边界条件. 现在, 我们要为正则斜导数问题推导类似的 Schauder 理论. 尽管某些方法特别适用于 Dirichlet 问题, 例如 Perron 方法, 但它们却不能用于这种边界条件, 不过, 其思想的基本发展本质上还是相同的.

Poisson 方程

在把 Schauder 理论推广到别的线性边值问题时, 我们的出发点是在半空间 $\mathbb{R}_+^n=\{x\,|\,x_n>0\}$ 中具有斜导数边界条件

$$Bu\equiv au+\sum_{i=1}^{n} b_i D_i u=\varphi\quad (x_n=0\ 上) \tag{6.60}$$

的 Poisson 方程的理论, 其中系数 a, b_i 是常数. 我们也把边界算子 B 写成等价形式

$$Bu\equiv au+\mathbf{b}\cdot Du=au+b_t D_t u+b_n D_n u,$$

其中 $\mathbf{b}=(b_1,\ \cdots,\ b_n)=(b_t,\ b_n)$ 及 $D=(D_1,\ \cdots,\ D_n)=(D_t,\ D_n)$, D_t 表示切向梯度. 我们假设处处有正则斜导数条件 $b_n\neq 0$, 为使

我们的想法固定起见，首先取

(6.61) $$b_n>0,\quad |\mathbf{b}|=(|b_t|^2+b_n^2)^{1/2}=1.$$

后一条件是非本质的规范化，这允许我们记

$$Bu=au+D_s u,$$

其中 $D_s u=\partial u/\partial s$ 是向量 $\mathbf{b}$ 方向上的方向导数.

我们最先考察齐次边界条件：在 $x_n=0$ 上 $Bu=0$，并构造满足这个边界条件的 $\mathbb{R}_+^n$ 中的调和 Green 函数. 设 Γ 表示 Laplace 方程的基本解(4.1)，对 $n\geqslant 3$ 和 $a\leqslant 0$，记

(6.62) $$G(x,y)=\Gamma(x-y)-\Gamma(x-y^*)-2b_n\int_0^\infty e^{as}D_n\Gamma(x-y^*+\mathbf{b}s)\,ds,$$

其中 $x, y\in\mathbb{R}_+^n$, $D_n=\partial/\partial x_n$, $y^*=(y_1,\cdots,y_{n-1},-y_n)=(y',-y_n)$. 显然，$G$ 关于 x 及 $y\,(x\neq y)$ 是调和的，由直接计算得出，在 $x_n=0$ 上，

(6.63) $$BG(x,y)=0.$$

(这里，G 对固定的 y 作为 x 的函数而被算子 B 作用.) 于是 G 具有适合边界条件(6.63)的 Green 函数所需要的性质.

(6.62)中 G 的选择受到如下考虑的启发. 如果

$$G(x,y)=\Gamma(x-y)+h(x,y)$$

是满足(6.63)的所求调和 Green 函数，那么 BG 关于 x (对 $y\neq x$) 也是调和的，并在 $x_n=0$ 上变为零. 从 Schwarz 反射原理(习题 2.4)得到，除去奇点

$$a\Gamma(x-y)+b_tD_t\Gamma(x-y)+b_nD_n\Gamma(x-y)-a\Gamma(x-y^*)-b_tD_t\Gamma(x-y^*)+b_nD_n\Gamma(x-y^*)$$

外，BG 在 $\mathbb{R}^n$ 中是正则的. 这里我们用了这样的事实：对于 $i=1,\cdots,n-1$, $D_i\Gamma(x^*-y^*)=D_i\Gamma(x-y)$，而

$$D_n\Gamma(x^*-y^*)=-D_n\Gamma(x-y).$$

这样一来，如果我们加上 G 在无穷远处变为零的条件，则从 Liouville 定理推出

$$D_s h+ah=-a\Gamma(x-y^*)-b_t D_t\Gamma(x-y^*)+b_n D_n(x-y^*)$$
$$=-a\Gamma(x-y^*)-D_s\Gamma(x-y^*)+2b_n D_n\Gamma(x-y^*).$$

这蕴涵着

$$D_s[e^{as}h(x+\mathbf{b}s,\ y)]=-[a\Gamma(x-y^*+\mathbf{b}s)+D_s\Gamma(x-y^*+\mathbf{b}s)]e^{as}$$
$$+2b_n D_n\Gamma(x-y^*+\mathbf{b}s)e^{as}.$$

关于 s 从 $s=0$ 到 $s=\infty$ 求积分，然后分部积分，就得到

$$h(x,\ y)=-\Gamma(x-y^*)-2b_n\int_0^\infty e^{as}D_n\Gamma(x-y^*+\mathbf{b}s)ds.$$

这个 h 的表达式给了我们(6.62).

我们现在更仔细地检查 $G(x,\ y)$，目的是推出与第 4 章中关于 Newton 位势及 Poisson 方程的解的那些估计相类似的估计.

设 $\xi=(x-y^*)/|x-y^*|$，我们有

$$G(x,\ y)=\Gamma(x-y)-\Gamma(x-y^*)+\Theta(x,\ y),$$

其中

$$\Theta(x,\ y)\equiv-2b_n\int_0^\infty e^{as}D_n\Gamma(x-y^*+\mathbf{b}s)ds,\quad a\leqslant 0,$$
$$=-|x-y^*|^{2-n}\left[\frac{2b_n}{n\omega_n}\int_0^\infty e^{a|x-y^*|s}\frac{(\xi_n+b_n s)ds}{(1+2(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{b})s+s^2)^{n/2}}\right]$$
$$=|x-y^*|^{2-n}g(\boldsymbol{\xi},\ |x-y^*|).$$

因为(按(6.61)) $\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{b}>-|b_t|>-1$ 对于所有的 $x,\ y\in\mathbb{R}_+^n$ 成立，所以被积函数的分母有正下界，我们知道 g 关于它的自变量是正则的. 函数 $\Theta(x,\ y)=\Theta(x,\ -y^*)$ 满足关系式

$$
\begin{aligned}
&D_{x_i}\Theta(x,\ y)=-D_{y_i}\Theta(x,\ y),\quad i=1,\ \cdots,\ n-1;\\
&D_{x_n}\Theta(x,\ y)=D_{y_n}\Theta(x,\ y);\\
&|D_i\Theta(x,\ y)|\leqslant C|x-y^*|^{1-n},\\
&|D_{ij}\Theta(x,\ y)|\leqslant C|x-y^*|^{-n},\\
&\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ n,\ C=C(n,\ b_n).
\end{aligned}
\tag{6.64}
$$

在把 Newton 位势的引理 4.10 的细节推广到类似的积分

$$\int\Theta(x,\ y)f(y)dy$$

时，这些关系式就足够了. 如果 $|\mathbf{b}|\neq 1$，我们在前面可用 $a/|\mathbf{b}|$

代替 a, 用 $b_n/|\mathbf{b}|$ 代替 b_n. 注意, 因为 $a\leqslant 0$, 能够取(6.64)中的常数 C 与 a 无关.

定理 6.26 设 $B_1=B_R(x_0)$, $B_2=B_{2R}(x_0)$ 表示中心为 $x_0\in\overline{\mathbb{R}}^n_+$ 的球, 又设 $B_1^+=B_1\cap\mathbb{R}^n_+$, $B_2^+=B_2\cap\mathbb{R}^n_+$, $T=B_2\cap\{x_n=0\}$. 假设 $u\in C^2(B_2^+)\cap C^1(B_2^+\cup T)$ 在 B_2^+ 中满足 $\Delta u=f$, $f\in C^\alpha(\overline{B}_2^+)$, 在 T 上满足边界条件 (6.60) $Bu=\varphi$, 其中 $a\leqslant 0$, $b_n>0$ 及 $\varphi\in C^{1,\alpha}(T)$. 那么 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$, 并且

(6.65) $$|u|'_{2,\alpha;B_1^+}\leqslant C(|u|_{0;B_2^+}+R|\varphi|'_{1,\alpha;T}+R^2|f|'_{0,\alpha;B_2^+}),$$

其中 $C=C(n,\alpha,b_n/|\mathbf{b}|)$. (这里 $|\ |'$ 表示关于 R 定义的加权范数(4.6)$'$.)

证明 假设 T 是非空的, 否则所说的结论已经包含在定理 4.6 中了. 先假设 $\varphi=0$, $|\mathbf{b}|=1$ 及 $n>2$. 考虑函数

$$w(x)=\int_{B_2^+}G(x,y)f(y)dy=w_1(x)+w_2(x),$$

其中 $$w_1(x)=\int_{B_2^+}[\Gamma(x-y)-\Gamma(x-y^*)]f(y)dy,$$

$$w_2(x)=\int_{B_2^+}\Theta(x,y)f(y)dy.$$

我们在(4.26)中已经看出 w_1 满足估计

(6.66) $$|D^2w_1|'_{0,\alpha;B_1^+}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+},\quad C=C(n,\alpha).$$

w_2 的估计本质上与引理(4.10)中对 Newton 位势的估计是相同的. 设 $f(x)$ 是用关于 x_n 的偶反射来定义, 因而 $f(x',-x_n)=f(x',x_n)$. 于是, 对于 w_2 的二阶导数, 类似于(4.9)的表示式有效; 也就是说, 对于 $x\in B_2^+$ 及 $i,j=1,\cdots,n$, 我们有

$$D_{ij}w_2(x)=\int_{B_2^+}D_{ij}\Theta(x-y^*)(f(y^*)-f(x))dy$$
$$-f(x)\int_{\partial B_2^+}D_i\Theta(x-y^*)\nu_j(y)ds_y,$$

其中 $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 是 ∂B_2^+ 的单位外法向量. 由于 (6.64), 引理 4.4 和 4.10 的论证无需本质的改变就可搬用而给出估计

$$|D^2w_2|'_{0,\alpha;B_1^+}\leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+},\quad C=C(n,\alpha,b_n).$$

这个不等式与(6.66)合并，就得到

(6.67) $$|D^2w|'_{0,\alpha;B_1^+}\leqslant C|f'|_{0,\alpha;B_1^+},\quad C=C(n,\ \alpha,\ b_n).$$

如果 $|\mathbf{b}|\neq 1$，我们就在这个估计中用 $b_n/|\mathbf{b}|$ 代替 b_n.

现在象定理 4.11 中一样进行. 设 $v=u-w$. 因为在 B_2^+ 中 $\Delta w=f$，在 T 上 $Bw=0$(按照 G 的定义)，我们就有在 B_2^+ 中 $\Delta v=0$ 及 $\Delta(Bv)=0$，在 T 上 $Bv=0$. 于是按 Schwarz 反射法，Bv 能延拓成在整个 B_2 中的调和函数. 所以在 B_2 中 $B(\Delta v)=\Delta(Bv)=0$，就推出 v 在整个 B_2 中也是调和函数. 从 $u=v+w$，估计式(6.67)及 v 的导数的内估计(定理 2.10)，我们就得到当 $\varphi=0$ 时要求的估计(6.65). 至于 $n=2$ 的结果，能够作为 $n=3$ 的特殊情形推导出来；(参阅定理 4.6).

我们现在去掉 $\varphi=0$ 的限制. 为此目的，我们寻求一个在 T 上满足 $B\psi=\varphi$ 的函数 $\psi\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_2^+)$. 可假设 φ 能适当地延拓到 T 的外部使得在 $x_n=0$ 上 $\varphi\in C_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$；(见引理 6.38). 选择非负函数 $\eta\in C_0^2(\mathbb{R}^{n-1})$ 使得 $\int\eta(y')dy'=1$，$y'=(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1})$，我们定义

(6.68) $$\psi(x)=\psi(x',\ x_n)=b_n^{-1}x_n\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(x'-x_ny')\eta(y')dy'.$$

容易验证 $\psi(x',\ 0)=0$，$D_n\psi(x',\ 0)=b_n^{-1}\varphi(x')$，所以在 $x_n=0$ 上

(6.69) $$B\psi=\varphi.$$

从关系式

$$b_nD_{ij}\psi(x)=\int D_i\varphi(x'-x_ny')D_j\eta(y')dy',\quad i,\ j\neq n;$$

$$b_nD_{in}\psi(x)=-\int y'\cdot D\varphi(x'-x_ny')D_i\eta(y')dy',\quad i\neq n;$$

$$b_nD_{nn}\psi(x)=\int y'\cdot D\varphi(x'-x_ny')[(n-2)\eta(y')+y'\cdot D\eta(y')]dy',$$

看出 $\psi\in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$. 我们还注意到

(6.70) $$\begin{aligned}b_n|\psi|'_{2,\alpha;B_2^+}&\leqslant C(R|\varphi|_{0;T}+R^2|D\varphi|_{0;T}+R^{2+\alpha}[D\varphi]_{\alpha;T})\\&=CR|\varphi|'_{1,\alpha;T},\end{aligned}$$

其中常数 C 仅依赖于 n 及 η 的选法.

这时我们能够化归到 $\varphi=0$ 的情形．设 $v=u-\psi$，这就推出 $\Delta v=f-\Delta\psi\in C^{\alpha}(\overline{B}_2^+)$，又由于(6.69)，我们在 T 上有 $Bv=0$．从(6.70)以及对 v 已经证明的估计，就得到了(6.65)．∎

我们注意一般说来(6.65)中的常数 C 随 $b_n\to 0$ 而变得无界．

下面的估计是前面定理的一个推论，我们只叙述而不加证明．其细节与定理 4.8 的证明相类似．

引理 6.27 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n_+$ 中的有界开集，在 $x_n=0$ 上具有边界部分 T．又设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\Omega\cup T)$ 在 Ω 中满足 $\Delta u=f$，$f\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$，并且在 T 上满足边界条件(6.60) $Bu=\varphi$，其中 $a\leqslant 0$，$b_n>0$ 及 $\varphi\in C^{1,\alpha}(T)$．那么

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|\varphi|_{1,\alpha;T}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ b_n/|\mathbf{b}|,\ \operatorname{diam}\Omega)$．

与引理 6.1 中一样进行论证可给出对斜导数问题的下述推广．

引理 6.28 在引理 6.27 的同样假设条件下，设 u 满足 $L_0u=f$（代替 $\Delta u=f$），其中 L_0 是引理 6.1 中定义的常系数算子．那么

$$(6.71)\qquad |u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|\varphi|_{1,\alpha;T}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ \lambda,\ \Lambda,\ b_n/|\mathbf{b}|,\ \operatorname{diam}\Omega)$．

变系数

现在我们考虑变系数的方程和在弯曲边界的区域中对应的斜导数问题．把 Schauder 估计的理论推广到这类边界条件是严格地遵循着 6.1 和 **6.2** 节中的思想的．我们先推导一个与引理 6.4 相类似的

引理 6.29 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n_+$ 中有界开集，在 $x_n=0$ 上具有边界部分 T．假设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup T)$ 是 Ω 中 $Lu=f$（方程(6.1)）的满足边界条件

$$(6.72)\qquad B(x')u\equiv\gamma(x')u+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x')D_iu=\varphi(x'),\quad x'\in T$$

的解，其中 $|\beta_n|\geqslant\varkappa>0$，$\varkappa$ 是某常数．假设 L 满足(6.2)，并设 $f\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$，$\varphi\in C^{1,\alpha}(\overline{T})$，$a^{ij}$，$b^i$，$c\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 及 γ，$\beta_i\in C^{1,\alpha}(\overline{T})$，其

中

$$|a^{ij},\ b^i,\ c|_{0,\alpha;\Omega},\ |\gamma,\ \beta_i|_{1,\alpha;T}\leqslant\Lambda,\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

那么

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|\varphi|_{1,\alpha;T}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),\tag{6.73}$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ \lambda,\ \Lambda,\ \varkappa,\ \operatorname{diam}\Omega)$.

证明 我们首先注意可以假设 $\gamma\leqslant 0$ 及 $\beta_n\geqslant 0$. 因为令 $v=ue^{kx_n}$, 其中 $k\geqslant\sup|\gamma|/\varkappa$, 边界条件(6.72)变成在 T 上

$$B'v=(\gamma-k\beta_n)v+\sum\beta_i D_i v=\varphi,$$

其中 $\beta_n(\gamma-k\beta_n)\leqslant 0$. 同时方程 $Lu=f$ 变成满足定理中同样假设条件的方程 $L'v=f'$. 所要的估计(6.73)显然等价于对 v 的对应的估计.

在定理 6.2 和引理 6.4 中使系数"凝固"的技巧经过某些修改(由于边界条件(6.72))后可以再用一次. 这样, 设 x_0, y_0 是 Ω 中任意两个不同的点, 假设 $\bar{d}_{x_0}=\min(\bar{d}_{x_0},\ \bar{d}_{y_0})$, 其中 $\bar{d}_x=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega-T)$. 设 $\mu\leqslant\frac{1}{4}$ 是一个正常数(将在后面规定), 并令 $d=\mu\bar{d}_{x_0}$, $B_d=B_d(x_0)$. 如果 $B_d\cap T\neq\emptyset$, 令 x_0' 表示 x_0 在 T 上的投影. 与定理 6.2 中一样, 把方程 $Lu=f$ 改写成(6.15)的形式, 把边界条件(6.72)写成

$$B(x_0')u=[B(x_0')-B(x')]u(x')+\varphi(x')\equiv\Phi(x'),\quad x'\in T,\tag{6.74}$$

我们把(6.15), (6.74)看成 $B_d\cap\Omega$ 中一个常系数问题, 如果 $B_d\cap T=\emptyset$, 就不考虑(6.74). 定理 6.2 中的论证和引理 6.4 中指出的类似论证, 这时除了用引理 6.28 代替引理 6.1 等细节之外, 本质上可同样进行下去. 这样一来, 代替(6.16)我们现在得到

$$\begin{aligned}\bar{d}_{x_0}^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x_0)-D^2u(y_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha}&\leqslant\frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0;\Omega}+|\Phi|_{1,\alpha;B\cap T}+|F|_{0,\alpha;B\cap\Omega})\\&\quad+\frac{4}{\mu^\alpha}[u]^*_{2;\Omega\cup T}.\end{aligned}\tag{6.75}$$

右端各数的估计，除了追加的项 $|\Phi|_{1,\alpha;B\cup T}$ 之外，本质上与定理 6.2 中的一样. 关于这一项，我们知道

$$|[B(x_0')-B(x')]u(x')|_{1,\alpha;B\cap T}$$
$$\leqslant C\mu^{2+\alpha}(C(\mu)|u|_{0;\Omega}+\mu^{\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}).$$

细节与导出(6.19)的那些计算相类似，就不在这里进行了. 把这个估计与(6.75)中其它项的估计合并起来，就得要求的估计(6.73). ∎

前面的引理现在能够推广到具有弯曲边界的区域. 重复引理 6.5 和定理 6.6 中的论证就导出斜导数问题解的下述全局估计.

定理 6.30 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $C^{2,\alpha}$ 区域，又设 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 是 $Lu=f$ 在 Ω 中的解，它满足边界条件

$$B(x)u\equiv\gamma(x)u+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)D_iu=\varphi(x),\ x\in\partial\Omega,$$

其中向量 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 的法分量 β_ν 非零，并且在 $\partial\Omega$ 上

(6.76) $$|\beta_\nu|\geqslant\varkappa>0\quad(\varkappa=\text{常数}).$$

假设 L 满足 (6.2), $f\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, a^{ij}, b^i, $c\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 以及 γ, $\beta_i\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$，还有

$$|a^{ij},b^i,c|_{0,\alpha;\Omega},\ |\gamma,\beta_i|_{1,\alpha;\Omega}\leqslant\Lambda,\quad i,j=1,\cdots,n.$$

那么，

(6.77) $$|u|_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|\varphi|_{1,\alpha;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,\varkappa,\Omega)$.

附注 1) 条件(6.76)蕴涵方向导数 $\boldsymbol{\beta}\cdot Du$ 在任何地方都不是 $\partial\Omega$ 的切向导数. 这个假设条件在现在的考虑中是本质的. 2) 在定理的叙述中假设 φ, γ 及 β_i 都是对全局(而不是在 $\partial\Omega$ 上)定义的，这比较方便，而且不失一般性，因而对于这些函数，范数 $|\ |_{1,\alpha;\Omega}$ 是有明确定义的. 在定理 6.26 及引理 6.27～6.29 中 T 是超平面边界部分，因为范数 $|\ |_{1,\alpha;T}$ 自然地有定义，φ 就不用全局延拓(在引理 6.29 中 γ 和 β_i 也一样). 3) 因为 Bu 包含着 $C^{2,\alpha}$ 函数 u 的一阶微分，因而预料到在估计(6.77)中会出现 $|\varphi|_{1,\alpha}$. 这与要求 $\varphi\in C^{2,\alpha}$ 的 Dirichlet 边界条件的对应全局估计(6.36)是大

不相同的.

迄今我们只讨论了斜导数问题的估计. $Lu=f$ 问题的实际的解能够通过连续性方法化归为 Poisson 方程问题的解(和定理 6.8 中一样), 但是这个方法现在包含着微分算子和边界算子两者的连续族. 在关于算子 L 及 B 的适当的补充限制下, 斜导数问题的唯一可解性给出在下面的定理中.

定理 6.31 设 L 是 $C^{2,\alpha}$ 区域 Ω 中具有 $c\leqslant 0$ 及 $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 系数的严格椭圆算子. 设 $Bu\equiv\gamma u+\boldsymbol{\beta}\cdot Du$ 定义 $\partial\Omega$ 上的一个边界算子, 如果 $\boldsymbol{\nu}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向, 在 $\partial\Omega$ 上边界算子满足 $\gamma(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu})>0$. 假设 γ, $\boldsymbol{\beta}\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. 那么斜导数问题

(6.78) 在 Ω 中 $Lu=f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $Bu=\varphi$

对于所有的 $f\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 及 $\varphi\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ 有唯一的 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 解.

证明 不失一般性我们假设在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma>0$ 及 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu}>0$, 还假设 φ 及 $\boldsymbol{\beta}$ 被延拓到整个 $\overline{\Omega}$ 上并属于 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$, 考虑问题族:

(6.79)
$$\text{在 }\Omega\text{ 中}\quad L_t u\equiv tLu+(1-t)\Delta u=f,$$
$$\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}\quad B_t u\equiv tBu+(1-t)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+u\right)=\varphi.$$

我们注意到 $L_1=L$, $L_0=\Delta$, $B_1=B$, $B_0=\partial/\partial\nu+$ 恒等算子, 并且对于适当的正常数 λ, Λ, L_t 的系数 a_t^{ij}, b_t^i, c_t 满足

$$a_t^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda_t|\xi|^2=\min(1,\ \lambda)|\xi|^2\quad\forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

及
$$|a_t^{ij},\ b_t^i,\ c_t|_{0,\alpha}\leqslant\Lambda_t=\max(1,\ \Lambda).$$

还有, 因为对于某两个常数 β', γ' 有 $\boldsymbol{\beta}\cdot\nu\geqslant\beta'>0$ 及 $\gamma\geqslant\gamma'>0$, 我们在 $\partial\Omega$ 上就有

$$\gamma_t=(1-t)+t\gamma\geqslant\min(1,\ \gamma')>0,$$
$$\boldsymbol{\beta}_t\cdot\boldsymbol{\nu}=(1-t)+t\boldsymbol{\beta}\cdot\nu\geqslant\min(1,\ \beta')>0,$$

这时 $|\boldsymbol{\beta}_t|_{1,\alpha}$ 也有与 t 无关的界.

考虑问题(6.79)(对某 t)的任一解 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. $|u|_{2,\alpha}$ 满足带有与 t 无关的常数 C 的估计(6.77). 此外, 用 φ 及 f 估计 $|u|_0$, 我们将得到一个界

(6.80) $$|u|_{2,\alpha}\leqslant C(|\varphi|_{1,\alpha}+|f|_{0,\alpha})$$
对于(6.79)的所有 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 解有效.

为估计 $|u|_0$, 我们先作代换 $v=u/\omega$, 其中 ω 是一个固定的 $C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 函数(与 t 无关), 它满足条件: (i) $\omega\geqslant\overline{\omega}>0$; (ii) $L_t\omega\leqslant\overline{c}<0$; (iii) 在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma_t+\boldsymbol{\beta}_t\cdot D\omega/\omega\geqslant\overline{\gamma}>0$, 其中 $\overline{\omega}$, $\overline{c}$, $\overline{\gamma}$ 都是常数. 如果 μ 充分大而 c_1, c_2 是适当的正常数, 我们能够把这样的函数 ω 取为 $\omega(x)=c_1-c_2e^{\mu x_1}$ 的形状. 代换 $v=u/\omega$ 把(6.79)变成另一个问题: 在 Ω 中 $\widetilde{L}_tv=\widetilde{f}=f/\omega$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\widetilde{B}_tv=\widetilde{\varphi}=\varphi/\omega$, 在这里 $\widetilde{L}_tv$ 中 v 的系数 $L_t\omega/\omega$ 满足 $L_t\omega/\omega\leqslant\overline{c}/\omega<0$, $\widetilde{B}_tv$ 中 v 的系数 $\overline{\gamma}_t$ 满足 $\overline{\gamma}_t=\gamma_t+\boldsymbol{\beta}_t\cdot D\omega/\omega\geqslant\overline{\gamma}>0$. 如果现在在某 $x_0\in\Omega$ 有

$$\sup_\Omega|v|=|v(x_0)|,$$

则
$$\sup_\Omega|v|=|v(x_0)|\leqslant|f(x_0)/\overline{c}|\leqslant\sup_\Omega|f|/|\overline{c}|,$$

所以
$$|u|_0\leqslant\sup_\Omega\omega\sup_\Omega|v|\leqslant C|f|_0,$$

其中 C 是与 t 无关的常数. 另一方面, 如果对某 $x_0\in\partial\Omega$, 有

$$\sup_\Omega|v|=|v(x_0)|,$$

那么或者

$$\sup_\Omega|v|=v(x_0)\leqslant\overline{\gamma}^{-1}(\widetilde{\varphi}-\boldsymbol{\beta}_t\cdot Dv)_{x=x_0}\leqslant\widetilde{\varphi}(x_0)/\overline{\gamma},$$

或者
$$\sup_\Omega|v|=-v(x_0)\leqslant\overline{\gamma}^{-1}(-\widetilde{\varphi}+\boldsymbol{\beta}_t\cdot Dv)_{x=x_0}\leqslant-\widetilde{\varphi}(x_0)/\overline{\gamma},$$

于是 $|u|_0\leqslant C\sup_{\partial\Omega}|\varphi|$. 估计式(6.80)立即从(6.77)推出.

这时论证实质上与定理6.8中一样地进行. 我们先假设 $\varphi=0$. 设

$$\mathfrak{B}_1=\{u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\,|\,在\ \partial\Omega\ 上 B_tu=0\},\ \mathfrak{B}_2=C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

并且考虑算子 $L_t:\mathfrak{B}_1\to\mathfrak{B}_2$. 在 Ω 中 $L_tu=f$, 在 $\partial\Omega$ 上 $B_tu=0$ 这个问题对任意 $f\in C^\alpha(\overline{\Omega})$ 的可解性等价于算子 L_t 的可逆性. 设 u_t 表示这个问题对给定的 f 的一个解. 它是唯一的(见习题3.1), 并从 $\varphi=0$ 的(6.80)我们得到界

$$|u_t|_{2,\alpha}\leqslant C|f|_{0,\alpha},$$

或, 等价地,

(6.81) $$\|u\|_{\mathfrak{B}_1}\leqslant C\|L_t u\|_{\mathfrak{B}_2},$$
常数 C 是与 t 无关的. L_0 可逆这一事实是第三边值问题

$$在\ \Omega\ 中\ \Delta u=f, \quad 在\ \partial\Omega\ 上\ u+\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$$

在 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中可解性的推论. 我们可参阅有关这个结果的位势理论的文献;(例如,见[GU]). 假设有这一结果,我们就能从(6.81)及连续性方法(定理 5.2)得出齐次边界条件 $\varphi=0$ 时定理的证明.

构造一个函数 $\psi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 使在 $\partial\Omega$ 上 $B\psi=\varphi$, 可把具有一般 φ 的问题(6.78)化成 $\varphi=0$ 的情形,然后处理新问题:在 Ω 中 $Lv=f'\equiv f-L\psi$, 在 $\partial\Omega$ 上 $Bv=0$. 简略地概括起来,这样的函数 ψ 能够通过以下方法构造出来:用有限个球 B_i 的集合覆盖 $\partial\Omega$, 用适当的映射拉直边界部分 $B_i\cap\partial\Omega$, (与(6.68), (6.69)中一样)确定函数 ψ_i 使得在 $B_i\cap\partial\Omega$ 上 $B\psi_i=\varphi$. 然后用一个适当的单位分解得到全局函数 ψ;(见引理 6.37). 细节留给读者. ∎

如果在上述定理中条件 $\gamma>0$ 或 $c\leqslant 0$ 不满足,就不再能断言唯一可解性,但是作为代替,能够断言与定理 6.15 一样的 Fredholm 二择一性质. 证明的方法基本上是相同的. 二择一性质的一个直接推论是当 $c\leqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$ 并且或者 $c\not\equiv 0$ 或者 $\gamma\not\equiv 0$ 时问题是可解的,因为在这些条件下唯一性成立.

6.8. 附录 1: 内插不等式

我们在这里证明第 6 章中间援引的内插不等式. 我们从内部范数和拟范数的不等式开始.

引理 6.32 假设 $j+\beta<k+\alpha$, 其中 $j, k=0, 1, 2, \cdots$ 以及 $0\leqslant\alpha, \beta\leqslant 1$. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中开子集并设 $u\in C^{k,\alpha}(\Omega)$. 则对任何 $\varepsilon>0$ 及某常数 $C=C(\varepsilon, k, j)$, 我们有

(6.82) $$\begin{aligned}[u]^*_{j,\beta;\Omega}&\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega},\\ |u|^*_{j,\beta;\Omega}&\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega}.\end{aligned}$$

证明 我们将对本书需要的 $j, k=0, 1, 2$ 的情况来建立

(6.82). 这种想法的直接推广并用适当的归纳法就可对任意的 j, k 导出所说的结果.

假设(6.82)的右端项有限, 因为否则断言是明显的. 为了记号的方便我们略去下标 Ω, 区域 Ω 不言自明. 我们考虑几种情况:

(i) $j=1, k=2; \alpha=\beta=0$. 我们希望对任何 $\varepsilon>0$ 证明

$$[u]_1^* \leqslant C(\varepsilon)|u|_0+\varepsilon[u]_2^*. \tag{6.83}$$

设 x 是 Ω 中任一点, d_x 是它与 $\partial\Omega$ 的距离, 而 $\mu\leqslant\frac{1}{2}$ 是后面来规定的正常数. 令 $d=\mu d_x$ 及 $B=B_d(x)$. 对于任一 $i=1, 2, \cdots, n$, 设 x', x'' 是平行于 x_i 轴的中心在 x 而长度为 $2d$ 的线段的端点. 于是对这线段上某点 $\bar{x}$ 我们有

$$|D_i u(\bar{x})|=\frac{|u(x')-u(x'')|}{2d}\leqslant\frac{1}{d}|u|_0$$

及

$$|D_i u(x)|=\left|D_i u(\bar{x})+\int_{\bar{x}}^{x} D_{ii}u\,dx_i\right|\leqslant\frac{1}{d}|u|_0+d\sup_B|D_{ii}u|$$

$$\leqslant\frac{1}{d}|u|_0+d\sup_{y\in B}d_y^{-2}\sup_{y\in B}d_y^2|D_{ii}u(y)|.$$

因为 $d_y>d_x-d=(1-\mu)d_x\geqslant d_x/2$ 对于所有的 $y\in B$ 成立, 从而

$$d_x|D_i u(x)|\leqslant\mu^{-1}|u|_0+4\mu\sup_{y\in\Omega}d_y^2|D_{ii}u(y)|$$

$$\leqslant\mu^{-1}|u|_0+4\mu[u]_2^*.$$

所以 $$[u]_1^*=\sup_{\substack{x\in\Omega\\ i=1,\cdots,n}} d_x|D_i u(x)|\leqslant\mu^{-1}|u|_0+4\mu[u]_2^*.$$

如果现在取 μ 使得 $\mu\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$, 我们就得出 $C=\mu^{-1}$ 的(6.83).

(ii) $j\leqslant k; \beta=0, \alpha>0$. 我们用类似的方法进行. 先设 $x\in\Omega$, $0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$, $d=\mu d_x$, $B=B_d(x)$, 并设 x', x'' 是平行于 x_l 轴的中心在 x 而长度为 $2d$ 的线段的端点. 对这线段上的某 $\bar{x}$ 我们有

$$|D_{il}u(\bar{x})|=\frac{|D_i u(x')-D_i u(x'')|}{2d}\leqslant\frac{1}{d}\sup_B|D_i u| \tag{6.84}$$

及

$$|D_{il}u(x)|\leqslant|D_{il}u(\bar{x})|+|D_{il}u(x)-D_{il}u(\bar{x})|$$
$$\leqslant\frac{1}{d}\sup_{y\in B}d_y^{-1}\sup_{y\in B}d_y|D_lu(y)|$$
$$+d^{\alpha}\sup_{y\in B}d_{x,y}^{-2-\alpha}\sup_{y\in B}d_{x,y}^{2+\alpha}\frac{|D_{il}u(x)-D_{il}u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

因为对于所有的 $y\in B$, d_y, $d_{x,y}>d_x/2$, 又可得到

$$d_x^2|D_{il}u(x)|\leqslant\frac{2}{\mu}[u]_1^*+2^{2+\alpha}\mu^{\alpha}[u]_{2,\alpha}^*.$$

对 i, l 及 $x\in\Omega$ 取上确界, 选择 μ 使得 $8\mu^{\alpha}\leqslant\varepsilon$ 并令 $C=2/\mu$, 我们就得到不等式

$$[u]_2^*\leqslant C(\varepsilon)[u]_1^*+\varepsilon[u]_{2,\alpha}^*. \tag{6.85}$$

在(6.84)中如果用 u 代替 D_lu 并在随后的细节上作显然的修改, 我们就得到 $j=k=1$, $\beta=0$, $\alpha>0$ 的(6.82):

$$[u]_1^*\leqslant C(\varepsilon)|u|_0+\varepsilon[u]_{1,\alpha}^*. \tag{6.86}$$

在适当地选择上述每个不等式中的 ε 之后把(6.85)与(6.83)合并, 就获得 $k=2$ 及 $j=1$, 2 的(6.82).

(iii) $j<k$; $\beta>0, \alpha=0$. 设 $x, y\in\Omega$ 适合 $d_x\leqslant d_y$, 所以 $d_x=d_{x,y}$. 设 μ, d 及 B 定义如前. 我们对 $j=0$ 的情况证明(6.82), 首先建立内插不等式

$$[u]_{0,\beta}^*\leqslant C(\varepsilon)|u|_0+\varepsilon[u]_1^*,$$

其中 $\varepsilon>0$ 对于 $0<\beta<1$ 可以是任意的. 如果 $y\in B$, 对于 $0<\beta\leqslant 1$, 我们由中值定理得出

$$d_x^{\beta}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}}\leqslant\mu^{1-\beta}d_x|Du|_{0;B}\leqslant2\mu^{1-\beta}[u]_1^*;$$

又如果 $y\notin B$, 我们就有

$$d_x^{\beta}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}}\leqslant2\mu^{-\beta}|u|_0. \tag{6.87}$$

合并这些不等式, 对于 $0<\beta\leqslant1$, 得到

$$[u]_{0,\beta}^*=\sup_{x,y\in\Omega}d_{x,y}^{\beta}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}}\leqslant2\mu^{-\beta}|u|_0+2\mu^{1-\beta}[u]_1^*. \tag{6.88}$$

当 $\beta<1$ 及 $2\mu^{1-\beta}\leqslant\varepsilon$ 时这就蕴涵着(6.82). 应用(6.83)于(6.88)

的右端项并适当选择 μ，我们就得到 $j=0,\ k=2,\ \alpha=0,\ 0<\beta\leqslant 1$ 的(6.82)．对于 $j=1,\ k=2$ 的证明，用 $D_i u$ 代替 u 之后，可用大体上相同的方法进行．但是，有下述的差别．代替(6.87)我们这时有不等式

$$d_x^{1+\beta}\frac{|D_iu(x)-D_iu(y)|}{|x-y|^\beta}\leqslant\mu^{-\beta}[d_x|D_iu(x)|+d_y|D_iu(y)|]$$
$$\leqslant 2\mu^{-\beta}[u]_1^*.$$

应用(6.83)仍可推出结论．

(iv) $j\leqslant k;\ \alpha,\ \beta>0$．取 $j=k$ 就够了，所以 $\alpha>\beta$．用与上面相同的记号，对于 $y\in B$ 有

$$d_x^\beta\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta}\leqslant\mu^{\alpha-\beta}d_x^\alpha\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

而如果 $y\notin B$，则

$$d_x^\beta\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta}\leqslant 2\mu^{-\beta}|u|_0.$$

合并这些不等式并对 $x,\ y\in\Omega$ 取上确界，我们得到 $j=k=0$，$\varepsilon=\mu^{\alpha-\beta}$ 及 $C=2/\mu^\beta$ 的(6.82)．剩下 $j=k=1,\ 2$ 的情况可以通过类似的方法并利用情况(ii)的结果推导出来．

拟范数的内插不等式(6.82)直接蕴涵着范数的不等式

$$|u|_{j,\beta;\Omega}^*\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]_{k,\alpha;\Omega}^*.\ \ ]$$

应用引理 6.32 可得出下面的紧性结果．

引理 6.33 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界开集，并设 S 是 Banach 空间

$$C_*^{k,\alpha}=\{u\in C^{k,\alpha}(\Omega)\mid |u|_{k,\alpha;\Omega}^*<\infty\},$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

的有界子集．假设 S 的函数在 $\overline{\Omega}$ 上也是等度连续的．那么，如果 $k+\alpha>j+\beta$，就推出 S 在 $C_*^{j,\beta}(\Omega)$ 中准紧．

证明 因为 S 在 $\overline{\Omega}$ 上等度连续，又在 $C_*^{k,\alpha}$ 中有界，它包含一个序列 $\{u_m\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛于一个函数 $u\in C_*^{k,\alpha}$．按照假设条件，我们可设 $|u_m|_{k,\alpha}^*\leqslant M$（与 m 无关）．从(6.82)我们有：对于任一 $\varepsilon>0$ 及某常数 $C=C(\varepsilon)$，

$$|u_m-u|_{j,\beta}^*\leqslant C|u_m-u|_0+\varepsilon|u_m-u|_{k,\alpha}^*.$$

这时如果 N 大到对所有的 $m>N$, 有 $|u_m-u|_0\leqslant\varepsilon/C$ 成立, 则对于 $m>N$, 就有 $|u_m-u|^*_{j,\beta}\leqslant\varepsilon(1+2M)$. 这样一来 $\{u_m\}$ 在 $C^{j,\beta}_*$ 中收敛于 u, 证明了引理的断言. ∎

我们现在把引理 6.32 推广到具有超平面边界部分的区域中的部分内部范数和拟范数上去.

引理 6.34 假设 $j+\beta<k+\alpha$, 其中 j, $k=0, 1, 2, \cdots$, 又 $0\leqslant\alpha, \beta\leqslant1$. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n_+$ 中在 $x_n=0$ 上具有边界部分的开子集, 又设 $u\in C^{k,\alpha}(\Omega\cup T)$. 那么, 对任何 $\varepsilon>0$ 及某常数 $C=C(\varepsilon, j, k)$, 我们有

$$
(6.89)\qquad \begin{aligned}
&[u]^*_{j,\beta;\Omega\cup T}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T},\\
&|u|^*_{j,\beta;\Omega\cup T}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}.
\end{aligned}
$$

证明 仍假设右端项有限. 证明完全按照引理 6.32 的样子, 我们仅仅强调证明中不同的那些细节. 下面我们略去标记 $\Omega\cup T$, 它将不言自明.

先考虑 $1\leqslant j\leqslant k\leqslant2$, $\beta=0$, $\alpha\geqslant0$ 的情形, 从下面的不等式开始:

$$
(6.90)\qquad [u]^*_2\leqslant C(\varepsilon)|u|_0+\varepsilon[u]^*_{2,\alpha},\quad \alpha>0.
$$

设 x 是 Ω 中任一点, $\bar d_x$ 是它与 $\partial\Omega-T$ 的距离, 又 $d=\mu\bar d_x$, 其中 $\mu\leqslant\frac{1}{4}$ 是后面再规定的常数. 如果 $\operatorname{dist}(x, T)\geqslant d$, 那么球 $B_d(x)\subset\Omega$, 与引理 6.32 一样进行论证, 只要 $\mu=\mu(\varepsilon)$ 选得充分小, 就可导出不等式

$$
\bar d_x^2|D_{il}u(x)|\leqslant C(\varepsilon)[u]^*_1+\varepsilon[u]^*_{2,\alpha}.
$$

如果 $\operatorname{dist}(x, T)<d$, 我们考虑球 $B=B_d(x_0)\subset\Omega$, 其中 x_0 位于过 x 的 T 的垂线上, 并且 $\operatorname{dist}(x, x_0)=d$. 设 x', x'' 是 B 的平行于 x_l 轴的直径的端点. 那么, 对于这条直径上的某 $\bar x$, 我们有

$$
\begin{aligned}
|D_{il}u(\bar x)|&=\frac{|D_iu(x')-D_iu(x'')|}{2d}\leqslant\frac{1}{d}\sup_B|D_iu|\\
&\leqslant\frac{2}{\mu}\bar d_x^{-2}\sup_{y\in B}\bar d_y|D_iu(y)|\\
&\leqslant\frac{2}{\mu}\bar d_x^{-2}[u]^*_1,\quad \text{因为对所有的 } y\in B,\ \bar d_y>\bar d_x/2;
\end{aligned}
$$

以及

$$|D_{il}u(x)|\leqslant|D_{il}u(\bar{x})|+|D_{il}u(x)-D_{il}u(\bar{x})|$$

$$\leqslant\frac{2}{\mu}\bar{d}_x^{-2}[u]_1^*$$

$$+2d^\alpha\sup_{y\in B}\bar{d}_{x,y}^{-2-\alpha}\sup_{y\in B}\bar{d}_{x,y}^{2+\alpha}\frac{|D_{il}u(x)-D_{il}u(y)|}{|x-y|^\alpha};$$

所以只要 $16\mu^\alpha\leqslant\varepsilon$, $C=2/\mu$, 就有

$$\bar{d}_x^2|D_{il}u(x)|\leqslant\frac{2}{\mu}[u]_1^*+16\mu^\alpha[u]_{2,\alpha}^*\leqslant C[u]_1^*+\varepsilon[u]_{2,\alpha}^*.$$

选对应于 $\operatorname{dist}(x, T)\geqslant d$ 及 $\operatorname{dist}(x, T)<d$ 两种情况的 μ 的较小值, 并对所有的 $x\in\Omega$ 及 i, $l=1, \cdots, n$ 取上确界, 就得到(6.90). 如果在上面用 u 代替 D_iu, 并在细节上作相应修改, 我们就对 $j=k=1$ 得到 (6.90).

为对 $j=1$, $k=2$, $\alpha=\beta=0$ 证明(6.89), 我们可按照作了(由(6.90)的上述证明所启发的)修改的引理 6.32 那样来进行. 连同前面的各个情况一起, 就给出了 $1\leqslant j\leqslant k\leqslant 2$, $\beta=0$, $\alpha\geqslant 0$ 时的(6.89).

对于 $\beta>0$, (6.89)的证明将严格地仿照引理 6.32 的情况(iii)和(iv). 主要的不同之处在于: 对 $\beta>0$, $\alpha=0$ 的论证现在需要在截球 $B_d(x)\cap\Omega$ 中应用中值定理, 这里的点 x 适合 $\operatorname{dist}(x, T)<d$. ▌

我们以光滑区域中全局内插不等式的证明来结束这一节.

引理 6.35 假如 $j+\beta<k+\alpha$, 其中 $j=0, 1, 2, \cdots$, $k=1, 2, \cdots$, 又 $0\leqslant\alpha, \beta\leqslant 1$. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $C^{k,\alpha}$ 区域, 并设 $u\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. 那么, 对任何 $\varepsilon>0$ 及某常数 $C=C(\varepsilon, j, k, \Omega)$, 我们有

(6.91) $$|u|_{j,\beta;\Omega}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon|u|_{k,\alpha;\Omega}.$$

证明 这个证明基于以非常类似于引理 6.5 中的论证化归到引理 6.34. 与那个引理中一样, 在每一点 $x_0\in\partial\Omega$, 设 $B_\rho(x_0)$ 是一个球, 而 ψ 是 $C^{k,\alpha}$ 微分同胚, 它把包含在 $B'=B_\rho(x_0)\cap\Omega$ 及 $T=B_\rho(x_0)\cap\partial\Omega$ 的一个邻域中的边界拉直. 设 $\psi(B')=D'\subset\mathbb{R}_+^n$, $\psi(T)=T'\subset\partial\mathbb{R}_+^n$. 因为 T' 是 $\partial D'$ 的超平面部分, 我们可在 D' 中

把内插不等式(6.89)应用于函数$\tilde{u}=u\circ\psi^{-1}$，得到

$$|\tilde{u}|^*_{j,\beta;D'\cup T'}\leqslant C(\varepsilon)|\tilde{u}|_{0;D'}+\varepsilon|\tilde{u}|_{k,\alpha;D'\cup T'}.$$

从(6.30)得出

$$|u|^*_{j,\beta;B'\cup T}\leqslant C(\varepsilon)|u|_{0;B'}+\varepsilon|u|^*_{k,\alpha;B'\cup T}.$$

(我们记得可把同一记号$C(\varepsilon)$用到ε的不同函数上去.)设$B''=B_{\rho/2}(x_0)\cap\Omega$，我们从(4.17)′，(4.17)″推得

$$(6.92)\qquad |u|_{j,\beta;B''}\leqslant C(\varepsilon)|u|_{0;B'}+\varepsilon|u|_{k,\alpha;B'}$$
$$\leqslant C(\varepsilon)|u|_{0;\Omega}+\varepsilon|u|_{k,\alpha;\Omega}.$$

设$B_{\rho_i/4}(x_i)$，$x_i\in\partial\Omega$，$i=1,\cdots,N$，是覆盖$\partial\Omega$的球的有限集合，使得不等式(6.90)在每一集合$B''_i=B_{\rho_i/2}(x_i)\cap\Omega$中关于常数$C_i(\varepsilon)$成立．设$\delta=\min\rho_i/4$及$C=C(\varepsilon)=\max C_i(\varepsilon)$．于是在每一点$x_0\in\partial\Omega$，对某个$i$我们有$B=B_\delta(x_0)\subset B_{\rho_i/2}(x_i)$，所以

$$(6.93)\qquad |u|_{j,\beta;B\cap\Omega}\leqslant C|u|_{0;\Omega}+\varepsilon|u|_{k,\alpha;\Omega}.$$

论证的剩下部分与定理6.6中类似，留给读者．∎

全局内插不等式(6.91)在更一般的区域中也有效，例如在$C^{0,1}$区域中有效；(见习题6.7)．但是，与第52页的例中所证明的一样，当$k+\alpha>j+\beta$时为保证包含关系$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})\subset C^{j,\beta}(\bar{\Omega})$，区域$\Omega$有适当的正则性是需要的，所以全局内插不等式在任意区域中是不正确的．

引理6.35蕴涵下面的紧性结果．

引理6.36 设Ω是$\mathbb{R}^n$中$C^{k,\alpha}$区域($k\geqslant1$)，又设S是$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$中的有界集．那么，如果$j+\beta<k+\alpha$，$S$就在$C^{j,\beta}(\bar{\Omega})$中准紧．

证明与引理6.33的证明本质上是同样的，因而略去．这个结果对全局内插不等式(6.91)成立的区域显然有效，所以在$C^{0,1}$区域中结论成立．

6.9. 附录2：延拓引理

在本节中要建立一些结果，它们是本章早些时候用到的，也是本书别处所需要的，这些结果是关于全局定义的函数拓广到较大区域中的延拓，以及定义在边界上的函数到全局定义的函数的延

拓.

我们将利用单位分解的概念. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个开集, 它被可数个开集 Ω_j 的集合 $\{\Omega_j\}$ 覆盖. 函数 $\{\eta_i\}$ 的可数集合是从属于覆盖 $\{\Omega_j\}$ 的局部有限单位分解, 如果: (i)对于某 $j=j(i)$, $\eta_i\in C_0^\infty(\Omega_j)$; (ii)$\eta_i\geqslant 0$, 在 Ω 中 $\sum\eta_i=1$; (iii)Ω 的每点存在一个邻域, 其中仅有有限个 η_i 非零. 关于这种分解的存在性的证明可参阅文献; (例如, 见[YO], 也可见习题 6.8). 在下面的应用中, 分解的构造是比较简单的.

引理 6.37 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $C^{k,\alpha}$ 区域($k\geqslant 1$), 又设 Ω' 是包含 $\bar{\Omega}$ 的一个开集. 假设 $u\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. 那么存在函数 $w\in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ 使得在 Ω 中 $w=u$, 并且

$$|w|_{k,\alpha;\Omega'}\leqslant C|u|_{k,\alpha;\Omega}, \tag{6.94}$$

其中 $C=C(k,\ \Omega,\ \Omega')$.

证明 设 $y=\psi(x)$ 定义一个 $C^{k,\alpha}$ 微分同胚, 它把 $x_0\in\partial\Omega$ 附近的边界拉直, 又设 G 及 $G^+=G\cap\mathbb{R}^n_+$ 分别是 ψ 的象中的一个球及半球, 这里 ψ 满足 $\psi(x_0)\in G$. 令 $\tilde{u}(y)=u\circ\psi^{-1}(y)$ 及 $y=(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1},\ y_n)=(y',\ y_n)$, 我们用

$$\tilde{u}(y',\ y_n)=\sum_{i=1}^{k+1}c_i\tilde{u}(y',\ -y_n/i),\quad y_n<0$$

定义 $\tilde{u}(y)$ 到 $y_n<0$ 中的延拓, 式中 $c_1,\ \cdots,\ c_{k+1}$ 是由方程组

$$\sum_{i=1}^{k+1}c_i(-1/i)^m=1,\quad m=0,\ 1,\ \cdots,\ k$$

确定的常数. 容易验证延拓函数 $\tilde{u}$ 是连续的, 在 G 内具有直到 k 阶的所有导数, 而且 $\tilde{u}\in C^{k,\alpha}(G)$. 这样, 对于某球 $B=B(x_0)$, 有 $w=\tilde{u}\circ\psi\in C^{k,\alpha}(\bar{B})$, 并且在 $B\cap\Omega$ 中 $w=u$, 所以 w 规定了 u 到 $\Omega\cup B$ 中的一个 $C^{k,\alpha}$ 延拓. 按(6.30), 不等式(6.94)成立(用 $\Omega\cup B$ 代替 Ω').

现在考虑用前述的 B 那样的球 B_i, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$, 有限覆盖 $\partial\Omega$, 并设 $\{w_i\}$ 是对应的 $C^{k,\alpha}$ 延拓. 我们可以假设球 B_i 这样小, 使它们与 Ω 的并集包含在 Ω' 中. 设 $\Omega_0\subset\subset\Omega$ 是 Ω 的一个开子

集，使得 Ω_0 及球 B_i 构成 Ω 的一个有限开覆盖. 令 $\{\eta_i\}$, $i=0, 1, \cdots, N$ 是从属于这个覆盖的单位分解，并令

$$w=u\eta_0+\sum w_i\eta_i,$$

如果 $\eta_i=0$, 就认为 $w_i\eta_i=0$. 上面的讨论证实了 w 是 u 到 Ω' 中的一个延拓并有引理中断言的性质. ▌

下面的结果提供了边界函数到相同正则性函数类中全局定义函数的一个延拓.

引理 6.38 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $C^{k,\alpha}$ 区域($k\geqslant1$), 又设 Ω' 是包含 $\overline{\Omega}$ 的一个开集. 假设 $\varphi\in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. 那么，存在函数 $\Phi\in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$, 使得在 $\partial\Omega$ 上 $\Phi=\varphi$.

证明 在任一点 $x_0\in\partial\Omega$, 设映射 ψ 及球 G 与前一引理中同样定义，又假设 $\tilde{\varphi}=\varphi\circ\psi^{-1}\in C^{k,\alpha}(G\cap\partial\mathbb{R}_+^n)$. 我们在 G 中定义 $\tilde{\Phi}(y', y_n)=\tilde{\varphi}(y')$, 并对 $x\in\psi^{-1}(G)$, 令 $\Phi(x)=\tilde{\Phi}\circ\psi(x)$. 对某球 $B=B(x_0)$, 显然 $\Phi\in C^{k,\alpha}(\overline{B})$ 并且在 $B\cap\partial\Omega$ 上 $\Phi=\varphi$. 现设 $\{B_i\}$ 是由 B 那样的球作成的 $\partial\Omega$ 的一个有限覆盖，并设 Φ_i 是在 B_i 上定义的对应的 $C^{k,\alpha}$ 函数. 现在，与前一引理中一样利用适当的单位分解就能够完成引理的证明. ▌

附注 1) 在上面的引理中，如果 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)\cap C^{k,\alpha}(T)$, 其中 $T\subset\partial\Omega$, 那么同样的论证可导出一个延拓 $\Phi\in C^0(\Omega')\cap C^{k,\alpha}(G)$, 其中 G 是包含 T 的一个开集. 对上述证明作简单修改后可证明：如果 Ω 是具有 $C^{k,\alpha}$ 边界部分 T 的任何区域，又如果 $\varphi\in C^{k,\alpha}(T)$, 那么能把 φ 延拓成函数 $\Phi\in C^{k,\alpha}(G)$, 其中 G 是包含 T 的一个开集，并且在 T 上 $\Phi=\varphi$. T 的用球构成的可数覆盖对论证是必需的. 如果 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)\cap C^{k,\alpha}(T)$, 则可确定延拓 Φ 使得 $\Phi\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^{k,\alpha}(G)$. 2) 对于具有简单几何形状的区域，常可直接和容易地构造出延拓函数来. 例如，若 $B=B_R(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个球，而 $\varphi\in C^0(\partial B)\cap C^{k,\alpha}(T)$, $T\subset\partial B$, 那么，令

$$\Phi(x)=\Phi(x_0+r\omega)=\varphi(R\omega)\eta(r),$$

其中 $r=|x-x_0|$, $\omega=(x-x_0)/r$, $\eta(r)$ 是 $0\leqslant r\leqslant R/4$ 时 $\eta(r)=0$, $r\geqslant R/2$ 时 $\eta(r)=1$ 的 C^∞ 截断函数，就能得到 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个

延拓．显然函数 $\Phi(x)$ 在 ∂B 上与 φ 一致，属于 $C^0(\mathbb{R}^n)$，在由从原点出发穿过 T 的点的射线所确定的锥形区域中属于 $C^{k,\alpha}$ 类．

评注

第1～5节的先验估计和存在性理论是Schauder的贡献[SC4, 5]（这里是以修改过的形式写出的）．大约在同一时期，Caccioppoli[CA1] 叙述了类似的结果但无细节，这些结果得到了Miranda 的详尽阐述[MR2]．密切相关的思想包含在Hopf 的工作[HO3]中，是他最早建立了第4节中的内部正则性定理．对于实质上同类的问题，解的存在性理论以及一般性质先前已由Giraud 得到[GR1-3]，他用的是基于把解表成表面位势的积分方程方法．进一步发挥各自贡献的细节也由Miranda讨论过[MR2]．以 Fourier 分析方法为基础的Schauder 估计，对任意阶的方程的发展包含在 Hörmander 的[HM2]中．

用内部范数表示的第1节的内估计公式和推导方法都是仿照Douglis 和 Nirenberg[DN]的，他们还把内估计推广到了椭圆型方程组．如果首先在球中用定理 4.6 实现这个估计，最后再把它变成对 $C^{2,\alpha}$ 内部范数的界(6.14)，定理 6.2 证明的细节就可稍微简化．

6.2 节的全局估计以及定理 6.8 的证明是以 $C^{2,\alpha}$ 边界数据的这种估计为基础的．在较弱的正则性假设之下，例如对于 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 解的存在性的证明，就不能从 Schauder 理论的常用的形式得出．这个缺陷被 Widman[WI4]填补上了．另一方面，Giraud 用积分方程方法得到的是 $C^{1,\alpha}$ 边界的结果．这种积分方程方法在解不唯一的情况下对于可解性还给出了一种比 Schauder 理论中 Friedholm 二择一性质所得出的条件形式更明显的相容性条件．但是，在别的方面，Schauder 理论就比较简单，并且结果也更加完整．

使 Laplace 算子的正则点也是椭圆算子的正则点，并且反过来也成立的条件，被几位作者研究过．Hervé[HR]证明：如果在

定理 6.13 中的 L 的系数是 $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ 的(即，它们满足 Lipschitz 条件)，那么 Ω 的边界点对 L 正则当且仅当它们对 Laplace 算子正则. 论证依赖于具有适当奇性的 Green 函数的存在性；又因这样的 Green 函数在 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$系数的情况下也存在(例如，见[MR2]，第 81 页)，故对 L 及 Δ，正则边界点的等价性在这个前提下保持有效. 如果系数在边界上只是连续的，则这种等价性一般说来不再成立；(见习题 3.8(a)中的例子，也可见 Miller[ML4])．对于散度结构的方程，情况就十分不同，对于这类方程，当系数有界可测时就有等价性；(见[LSW] 和第 8 章)．另外的结果见 [NO] 及 [ML2, 4]．

Hopf[HO3]在没有存在定理的情况下直接证明了内部正则性结果(引理 6.16)．他的方法，基于 Korn 的常系数方程的扰动法(在[KR2]中)，提供了[HO2]中他关于变分问题解的正则性结果的一个推广，并预示了 Schauder 理论的重要方面. 引理 6.16(和更一般的结果)的基于正则化和内估计的一个简单的直接证明包含在[ADN](第 723 页)中.

边界正则性结果(引理 6.18)的一个基本的简单证明可如下得到. 证明 $u\in C^{\alpha}(\Omega\cup T)$就够了，在此之后的论证实质上可与引理 6.16 中同样进行. 考虑 $u-\varphi$ 代替 u，我们可假设 $\varphi\equiv 0$. 设 $\Omega'\subset\Omega$，有 $\partial\Omega'\cap\partial\Omega=T'\subset\subset T$，又设 $\delta=\operatorname{dist}(\Omega',\ \partial\Omega-T)<1$. 对任何 $x'\in\Omega'$，首先假设

$$d=\operatorname{dist}(x',\ \partial\Omega)=|x'-x_0|\leqslant\delta,\quad x_0\in\partial\Omega.$$

那么按习题 3.6 我们对 $x\in\Omega$ 有

$$|u(x)|\leqslant C|x-x_0|,$$

所以对 $x\in B_d(x')$有 $|u(x)|\leqslant Cd$. 从(6.23)，在其中我们令 $\Omega'=B_{d/2}(x')$和 $\Omega=B_d(x')$，从而对于所有的 $x\in B_{d/2}(x')$，

$$d|Du(x)|\leqslant C(\sup_{B_d}|u|+d^2|f|_{0,\alpha;B_d}),$$

所以
$$|Du(x')|\leqslant C(1+|f|_{0,\alpha;\Omega})\leqslant C,$$

其中常数 C 仅依赖于 δ 及给定的数据. 如果 $d>\delta$，那么，这时带

有依赖于 δ^{-1} 的常数 C 的同样的不等式成立. 这样我们就有了 $|Du|$ 在 Ω' 中的一个界, 从而 $u\in C^{0,1}(\Omega\cup T)$.

6.5 节是 Michael[MI] 的思想的修改, 他证明了对于连续边值的一般存在性理论能够只从内估计推导出来. 他的结果同样能应用于某一类在边界附近具有无界的系数的方程; (见习题 6.5, 6.6).

6.7 节中的斜导数问题的 Schauder 理论与较早的形式在某些方面是不同的. 特别地, Fiorenza[FI1] 把他的方法建立在关于半空间中 Poisson 方程边值问题的解的表面位势表示法的基础之上, 对此他应用了 Giraud[GR3] 的某些结果. 他对于变系数情形的 Schauder 型估计显示出对系数的界及 Hölder 常数的十分确切的依赖性. 在[LU4]第 10 章中, 以及 Fiorenza[FI2] 和 Ural'tseva [UR] 在处理具有非线性边界条件的拟线性方程时都利用了这个依赖性. 在高阶方程和方程组的别的边界条件下, Schauder 理论的推广出现在 Agmon, Douglis 和 Nirenberg 的工作中 [ADN1, 2]. 他们的方法基于半空间中常系数问题的解的明显积分表达式, 对给定的边界条件, 用适当的 Poisson 核表出. 尽管在细节上十分不同, 却能把 6.7 节中的发展看成是这些结果的一个特殊情形. 也可参看 Bouligand[BGD]. 非正则斜导数问题, 在那里边界条件中的方向导数变成切向导数(在(6.76)中 $\beta_\nu=0$), 实质上比正则情况更为深刻, 其结果也不相同(例如见 Hörmander[HM1], Egorov 和 Kondrat'ev[EK], 以及 Winzell[WN]).

从本章的结论容易推出外部边界问题的解. Meyers 和 Serrin [MS1] 处理了方程 $Lu=f$ 在一个外部区域 Ω(包含某球的外部)中的边值问题, 方程中 $c\leqslant 0$, 并且系数和 f 在 Ω 的有界子区域中 Hölder 连续. 在关于系数在无穷远处行为的适当的一般假设下, 他们从逐渐扩大的区域中的解的收敛性证明了 Ω 中在无穷远处有极限的解的存在性. 另外, 他们还得到了这样的结果: 如果 $f=0$, $b^i=0$, 在 ∞ 处 $a^{ij}\to a_0^{ij}$ 以及矩阵 $[a_0^{ij}]$ 的秩 $\geqslant 3$, 那么, 在无穷远处变为零的 Dirichlet (和别的)问题在 Ω 中存在唯一解. 在

这些条件下，如果 $n>3$，那么算子 L 在无穷远处可以是非一致椭圆的，而边值问题仍然适定. 对于 $n\geqslant 3$，到外部区域的 Schauder 理论的推广，包括无穷远处的 Hölder 估计及外部 Dirichlet 和 Neumann 问题对应的处理，已由 Oskolkov [OS1] 给出. 在 [FG2] 中处理过 $n\geqslant 3$ 时的一类拟线性方程的外部 Neumann 问题.

习 题

6.1. (a) 设 $u\in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$，$k\geqslant 0$ 是 $Lu=f$ 在开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的解，又假设 L 的系数满足(6.2)及 $|a^{ij}, b^i, c|_{k,\alpha;\Omega}\leqslant\Lambda$. 如果 $\Omega'\subset\subset\Omega$，证明

$$|u|_{k+2,\alpha;\Omega'}\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{k,\alpha;\Omega}),$$

其中 $C=C(n, k, \alpha, \lambda, \Lambda, d)$，$d=\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

(b) 在定理 6.2 中假设 $u\in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$，$k\geqslant 0$，用条件

$$|a^{ij}|_{k,\alpha}^{(0)},\ |b^i|_{k,\alpha}^{(1)},\ |c|_{k,\alpha}^{(2)}\leqslant\Lambda;\ |f|_{k,\alpha}^{(2)}<\infty$$

代替(6.13). 证明内估计

$$|u|_{k+2,\alpha}^{*}\leqslant C(|u|_0+|f|_{k,\alpha}^{(2)}),$$

其中 $C=C(n, k, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

6.2. 在定理 6.6 中设 Ω 是 $C^{k,\alpha}$ 区域，$k\geqslant 0$，又假设 $u\in C^{k+2,\alpha}(\bar\Omega)$，$\varphi\in C^{k+2,\alpha}(\bar\Omega)$，$f\in C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$，$|a^{ij}, b^i, c|_{k,\alpha;\Omega}\leqslant\Lambda$. 证明全局估计

$$|u|_{k+2,\alpha}\leqslant C(|u|_0+|\varphi|_{k+2,\alpha}+|f|_{k,\alpha}),$$

其中 $C=C(n, k, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

6.3. 对于满足外部锥条件的有界区域，证明定理 6.13. 证明在每点 $x_0\in\partial\Omega$，局部闸函数存在，它是由形状为 $r^\mu f(\theta)$ 的函数确定的，其中 $r=|x-x_0|$ 而 θ 是向量 $x-x_0$ 与外部锥的轴之间的夹角；(参看 [ML1, 3]).

6.4. 证明推论 6.25 的下述推广. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界的严格凸区域，又设

$$Lu\equiv a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu=0$$

是具有 $C^\alpha(\Omega)$ 系数的 Ω 中的椭圆型方程. 对 $x_0\in\partial\Omega$，设 $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(x_0)$ 表示支撑平面的单位法向量(从 Ω 指向外部). 假设在每一 x_0 对某球 $B(x_0)$，在 $B(x_0)\cap\Omega$ 中 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu}>0$. 那么 $Lu=0$ 的 Dirichlet 问题对任意连续边值在 $C^{2,\alpha}(\Omega)\cap C^0(\bar\Omega)$ 中是(唯一)可解的.

6.5. (a) 如果球 B 被代之以任意 C^2 区域 Ω，证明引理 6.21；(见习题 4.6).

(b) 推广(a)的结果到允许系数 b^i 对某 $\gamma\in(0,1)$ 满足 $\sup\limits_{\Omega} d_x^{1-\gamma}|b^i(x)|<\infty$ 及系数 $c\leqslant 0$ 局部有界.

6.6. (a) 利用习题 6.5 中的论证来构造闸函数并证明 Dirichlet 问题: 在 Ω

中 $Lu=f(c\leqslant 0)$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$ 的可解性，其中 L 在 C^2 区域 Ω 中严格椭圆，并满足下述条件：系数 a^{ij} 有界；a^{ij}，b^i，c，$f\in C^\alpha(\Omega)$；对于某$\beta\in(0,1)$，$\sup\limits_\Omega d_x^{1-\beta}|b^i(x)|<\infty$ 及 $\sup\limits_\Omega d_x^{2-\beta}|f(x)|<\infty$.

(b) 在附加的假设 $\sup\limits_\Omega d_x^{2-\beta}|c(x)|<\infty$ 之下推广(a)的结果到边界条件：在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，其中 φ 连续.

6.7. 如果 Ω 是 $C^{0,1}$(Lipschitz) 区域，证明全局内插不等式(6.91). 这个结果能够如下得到：

(i) 证明存在仅依赖于 Ω 的常数 K，使得 Ω 中的每一对点 x, y 能用 Ω 中的弧 $\gamma(x, y)$ 联接，其长度 $|\gamma(x, y)|$ 满足不等式 $\leqslant K|x-y|$.

(ii) 证明对仅依赖于 Ω 的某二常数 ρ_0 和 L，如果 $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega)<\rho_0$，则对所有的 $\rho<\rho_0$，存在一点 $x\in B_\rho(y)$，使得 $B_{\rho/L^2}(x)\subset\Omega$.

(iii) 利用(i)和(ii)修改引理 6.34 的证明以建立(6.91).

6.8. 设 $\{\Omega_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个开集 Ω 的可列开覆盖. 如果或者 (a)Ω 有界且 $\overline{\Omega}\subset\cap\Omega_i$，或者 (b)$\Omega_i$ 有界且 $\overline{\Omega}_i\subset\Omega$，$i=1, 2, \cdots$，证明存在单位分解 $\{\eta_i\}$，使得 $\eta_i\in C_0^\infty(\Omega_i)$.

6.9. 设由(6.1)给定的算子 L 在 C^2 区域 Ω 中是椭圆的，在 Ω 中 $c\leqslant 0$，a^{ij}，b^i，c，$f\in C^\alpha(\overline{\Omega})$，$0<\alpha<1$. 用 $\boldsymbol{\nu}(x_0)$表示 x_0 处 $\partial\Omega$ 的单位内法向，我们记

$$\Sigma_3=\{x_0\in\partial\Omega\,|\,a^{ij}(x_0)\nu_i(x_0)\nu_j(x_0)\neq 0\},$$
$$\Sigma_2=\{x_0\in\partial\Omega\,|\,\text{不等式(6.58)成立}\}.$$

又设 φ 是 $\Sigma_{23}=\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上的有界连续函数. 证明 6.6 节的考虑蕴涵着在 Ω 中满足 $Lu=f$，在 Σ_{23} 上 $u=\varphi$ 的函数 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\Omega\cup\Sigma_{23})$ 的存在性. (有趣的是，注意在关于 L 及 $\partial\Omega$ 的某种条件下，函数 u 是唯一确定的，例子(6.54)中就是这种情况；见[OR].)

6.10. 推导关于问题 6.9 的下述极大值原理. 设 L 和 Σ_{23} 如前，又设 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\overline{\Omega}-\Sigma_{23})$在 Ω 中满足 $Lu>0$. 如果 $c<0$ 或者在 $\partial\Omega-\Sigma_{23}$ 上对某个 i，$a^{ii}>0$，证明

$$\sup_\Omega u\leqslant\sup_{\Sigma_{23}} u.$$

(注意这个结果本身不足以保证问题 6.9 中的唯一性.)

第七章

Sobolev 空间

为说明这一章的理论的动机，我们现在对 Poisson 方程考虑一种不同于第四章的方法．由散度定理（式 (2.3)）知 $\Delta u=f$ 的 $C^2(\Omega)$ 解对所有的 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ 满足积分恒等式

$$(7.1)\qquad \int_\Omega Du\cdot D\varphi\,dx=-\int_\Omega f\varphi\,dx.$$

双线性型

$$(7.2)\qquad (u,\ \varphi)=\int_\Omega Du\cdot D\varphi\,dx$$

是空间 $C_0^1(\Omega)$ 上的内积，而且，在由 (7.2) 导出的度量之下将 $C_0^1(\Omega)$ 完备化得到的空间必然是一个 Hilbert 空间，我们称它为 $W_0^{1,2}(\Omega)$．此外，对适当的 f，由 $F(\varphi)=-\int_\Omega f\varphi\,dx$ 所定义的线性泛函可以扩张成 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的有界线性泛函．因而，由 Riesz 表示定理（定理 5.7）知存在一个元素 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$，它对所有的 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$，都满足 $(u,\ \varphi)=F(\varphi)$．因此 Dirichlet 问题 $\Delta u=f$, $u=0$（在 $\partial\Omega$ 上）的广义解的存在性很容易地就被证明了．这样，古典的存在性问题就变成在适当光滑的边界条件下广义解的正则性问题了．在下一章中，我们将用与上述 Riesz 表示定理的应用相类似的方法把 Lax-Milgram 定理(定理 5.8) 用于散度形式的线性椭圆型方程，并用各种基于积分恒等式的论证来证明正则性的结果．但在我们能这样进行之前先需要考察 Sobolev 空间类，即空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{k,p}(\Omega)$，$W_0^{1,2}(\Omega)$ 是 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 这类空间中的一员．我们讨论的某些不等式对第 II 部分拟线性方程理论的推导也是必需的．

7.1. L^p 空间

在整个这一章中 Ω 总表示 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界区域. 所谓 Ω 上的可测函数, 是指 Ω 上可测函数的等价类, 它们仅在测度为 0 的子集上不相等. 因此, 任何关于可测函数的逐点性质应理解为同一等价类中某个函数在通常意义下成立的性质. 最后, 一个可测函数的上确界和下确界应理解为本质上确界和本质下确界.

对 $p\geqslant 1$, 我们用 $L^p(\Omega)$ 表示由 Ω 上 p 次可积的可测函数组成的古典 Banach 空间. $L^p(\Omega)$ 中的范数由下式定义:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{7.3}$$

对 $p=\infty$, $L^\infty(\Omega)$ 表示由 Ω 上有界函数组成的 Banach 空间, 其范数为

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\sup_\Omega |u|. \tag{7.4}$$

在以后当无二义时我们将用 $\|u\|_p$ 表示 $\|u\|_{L^p(\Omega)}$.

在讨论积分估计时, 我们需要下面的不等式:

Young 不等式.

$$ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}; \tag{7.5}$$

此式对正实数 a, b, p, $q\left(p,\ q \text{ 满足 } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$成立. 在 $p=q=2$ 的情形, (7.5) 通称 Cauchy 不等式. 对正的 ε, 用 $\varepsilon^{1/p}a$ 代替 a, 用 $\varepsilon^{-1/p}b$ 代替 b 可得一个有用的内插不等式

$$\begin{aligned} ab&\leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-q/p}b^q}{q} \\ &\leqslant \varepsilon a^p+\varepsilon^{-q/p}b^q. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Hölder 不等式.

$$\int_\Omega uv\,dx\leqslant \|u\|_p\|v\|_q; \tag{7.7}$$

此式对函数 $u\in L^p(\Omega)$, $v\in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 成立, 并且是 Young 不等式的一个推论. 当 $p=q=2$ 时, Hölder 不等式化为熟知的 Schwarz 不等式. 从 Hölder 不等式可推知表达式 (7.3) 在 $L^p(\Omega)$

中定义一个范数. 下面提一下 Hölder 不等式的某些其他简单推论:

(7.8) $$|\Omega|^{-1/p}\|u\|_p\leqslant|\Omega|^{-1/q}\|u\|_q,\quad u\in L^q(\Omega),\ p\leqslant q;$$

(7.9) $$\|u\|_q\leqslant\|u\|_p^{\lambda}\|u\|_r^{1-\lambda},\quad u\in L^r(\Omega),$$

其中 $p\leqslant q\leqslant r$ 且 $1/q=\lambda/p+(1-\lambda)/r$.

合并不等式(7.6)和(7.9), 得到 L^p 范数的内插不等式, 即

(7.10) $$\|u\|_q\leqslant\varepsilon\|u\|_r+\varepsilon^{-\mu}\|u\|_p,$$

其中 $$\mu=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\Big/\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right).$$

我们可能还要用 Hölder 不等式的一个推广, 即推广到 m 个函数 $u_1,\cdots,u_m$ 的情形, 这 m 个函数分别属于空间 $L^{p_1},\cdots,L^{p_m}$, 其中

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1.$$

用归纳的证法, 从 $m=2$ 的情形开始, 能得到最后的不等式是

(7.11) $$\int_\Omega u_1\cdots u_m\,dx\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_m\|_{p_m}.$$

把 L^p 范数看成 p 的函数去研究也是有意义的. 对于 $p>0$, 记

(7.12) $$\Phi_p(u)=\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega|u|^p\,dx\right)^{1/p},$$

由不等式 (7.8) 我们看到, 对固定的 u, Φ 对 p 非减, 而不等式(7.9)表明 Φ 关于 p^{-1} 是对数凸的. 请注意, 对于 $p\geqslant1$, $\Phi_p(u)=|\Omega|^{-1/p}\|u\|_p$. 虽然泛函 Φ 对 $p<1$ 不能将 L^p 范数推广成一个范数, 但为后面的目的, 它仍然是有用的(见第 8 章).

在此, 我们还要指明 L^p 空间的某些已知的泛函分析性质; (例如看 Royden[RY]). 对于 $p<\infty$, 空间 $L^p(\Omega)$是可分的, 特别地, $C^0(\bar\Omega)$是它的一个稠密子空间. 假如 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 且 $p<\infty$, $L^p(\Omega)$ 的对偶空间就与 $L^q(\Omega)$同构. 因此对于 $1<p<\infty$, $L^p(\Omega)$ 是自反的. 我们常用 p' 表示 p 的 Hölder 共轭数 q. 最后, $L^2(\Omega)$在数量积

$$(u, v)=\int uv\,dx$$

之下是一个 Hilbert 空间.

7.2. 正则化和用光滑函数逼近

第 4 章中引进的空间 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ 是局部空间. 我们用 $L^p_{loc}(\Omega)$ 表示在 Ω 上局部 p 次可积的可测函数组成的线性空间来定义 $L^p(\Omega)$ 空间的局部类似物. 虽然它们不是赋范空间, 但 $L^p_{loc}(\Omega)$ 空间是很容易拓扑化的. 即, 若一个序列 $\{u_m\}$ 对每个 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 在 $L^p(\Omega')$ 中收敛到 u, 则说 $\{u_m\}$ 在 $L^p_{loc}(\Omega)$ 的意义下收敛到 u.

令 ρ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的一个非负函数, 在单位球 $B_1(0)$ 之外为 0, 并且满足 $\int\rho\,dx=1$. 这种函数常称为软化子 (mollifier). 它的一个典型例子是由下式给出的函数 ρ:

$$\rho(x)=\begin{cases} c\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

其中 c 选得使 $\int\rho\,dx=1$, 函数 ρ 的图象具有与铃相类似的样子. 然后, 对 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ 和 $h>0$, u 的正则化 (用 u_h 表示) 由下面的卷积定义:

$$u_h(x)=h^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)\,dy, \tag{7.13}$$

其中假定 $h<\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. 显然, 如果 $h<\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, 则对任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$, u_h 属于 $C^\infty(\Omega')$. 而且, 如果 u 属于 $L^1(\Omega)$, 则对任意的 $h>0$, u_h 在 $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ 中. 当 h 趋向于 0 时, 函数 $y\mapsto h^{-n}\rho((x-y)/h)$ 趋向于在点 x 的 Dirac delta 广义函数. 正则化的重要特性 (它是我们现在部分地要探究的) 是当 $h\to 0$ 时 u_h 趋向于 u 的意义. 粗糙地说, 结果是, 若 u 在一个局部空间中, 则 u_h 按这空间的自然拓扑逼近 u.

引理 7.1 设 $u\in C^0(\Omega)$. 则 u_h 在任一区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 中一致收敛到 u.

证明 我们有

$$u_h(x)=h^{-n}\int_{|x-y|<h}\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)\,dy$$

$$=\int_{|z|<1}\rho(z)u(x-hz)\,dz\ \left(令\ z=\frac{x-y}{h}\right);$$

因此,若 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 且 $2h<\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)$, 则

$$\sup_{\Omega'}|u-u_h|\leqslant\sup_{x\in\Omega'}\int_{|z|<1}\rho(z)\,|u(x)-u(x-hz)|\,dz$$

$$\leqslant\sup_{x\in\Omega'}\sup_{|z|\leqslant1}|u(x)-u(x-hz)|.$$

因为 u 在集合

$$B_h(\Omega')=\{x|_{\operatorname{dist}(x,\Omega')<h}\}$$

上是一致连续的,故 u_h 在 Ω' 上一致趋向于 u. ∎

在引理 7.1 中若 u 连续地在 $\partial\Omega$ 上变成 0, 则收敛可在整个 Ω 上一致. 更一般地, 若 $u\in C^0(\overline{\Omega})$, 我们可以定义 u 的一个扩张 $\tilde{u}$, 使得在 Ω 中 $\tilde{u}=u$, 且对某个 $\tilde{\Omega}\supset\supset\Omega$, $\tilde{u}\in C^0(\tilde{\Omega})$. 于是 $\tilde{u}_h$($\tilde{u}$ 在 $\tilde{\Omega}$ 上的正则化)当 $h\to0$ 时在 Ω 中一致收敛到 u.

正则化的过程也能用于逼近 Hölder 连续函数. 特别, 若 $u\in C^\alpha(\Omega)$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, 则

$$[u_h]_{\alpha;\Omega'}\leqslant[u]_{\alpha;\Omega''},\tag{7.14}$$

其中 $\Omega''=B_h(\Omega')$, 且可推出当 $h\to0$ 时, 对于每个 $\alpha'<\alpha$ 和 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 在$C^{\alpha'}(\Omega')$的意义下 u_h 趋于 u. 于是, 运用引理 6.37 和下一节的引理 7.3, 我们能够对 $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 函数推出逼近结果; (见 6.3 节).

现在转到 $L^p_{loc}(\Omega)$空间中的函数的逼近.

引理 7.2 设 $u\in L^p_{loc}(\Omega)\,(L^p(\Omega))$, $p<\infty$, 则 u_h 在 $L^p_{loc}(\Omega)$ $(L^p(\Omega))$的意义下收敛到 u.

证明 利用 Hölder 不等式, 从(7.13)得到

$$|u_h(x)|^p\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)\,|u(x-hz)|^p\,dz,$$

于是若 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 且 $2h<\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)$, 则

$$\int_{\Omega'}|u_h|^p dx \leqslant \int_{\Omega'}\int_{|z|<1}\rho(z)|u(x-hz)|^p dz\,dx$$
$$=\int_{|z|<1}\rho(z)dz\int_{\Omega'}|u(x-hz)|^p dx$$
$$\leqslant\int_{B_h(\Omega')}|u|^p dx,$$

其中 $B_h(\Omega')=\{x|\operatorname{dist}(x,\ \Omega')<h\}$. 从而

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\|u\|_{L^p(\Omega'')},\quad \Omega''=B_h(\Omega'). \tag{7.15}$$

现在根据基于引理 7.1 的逼近，可以完成这个定理的证明. 选择 $\varepsilon>0$ 以及一个 $C^0(\Omega)$ 函数 w，满足

$$\|u-w\|_{L^p(\Omega'')}\leqslant\varepsilon,$$

其中 $\Omega''=B_{h'}(\Omega')$ 且 $2h'<\operatorname{dist}(\Omega',\ \partial\Omega)$. 由引理 7.1, 对于充分小的 h, 我们有

$$\|w-w_h\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\varepsilon.$$

把估计式(7.15)用于差 $u-w$, 于是对充分小的 $h\leqslant h'$ 得到

$$\|u-u_h\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\|u-w\|_{L^p(\Omega')}+\|w-w_h\|_{L^p(\Omega')}+\|u_h-w_h\|_{L^p(\Omega')}$$
$$\leqslant 2\varepsilon+\|u-w\|_{L^p(\Omega'')}\leqslant 3\varepsilon.$$

因此, 在 $L^p_{loc}(\Omega)$ 中, u_h 收敛到 u. 然后, 对 $u\in L^p(\Omega)$ 的结果可以通过在 Ω 外将 u 延拓成 0, 并应用 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 的结果来得到. ∎

7.3. 弱导数

设 u 在 Ω 中局部可积, α 是任一多重指标. 如果对所有的 $\varphi\in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$, u 满足

$$\int_\Omega \varphi v\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx, \tag{7.16}$$

那么我们就称局部可积函数 v 为 u 的第 α 次弱导数. 记 $v=D^\alpha u$. 注意 $D^\alpha u$ 除零测集外是唯一确定的. 因此, 包含弱导数的逐点的关系式将理解为几乎处处成立. 如果一个函数的所有一阶弱导数均存在, 则说这函数弱可微, 如果它所有的直到 k 阶且包括 k 阶的弱导数都存在, 则说这函数 k 次弱可微. 我们用 $W^k(\Omega)$ 表示由 k 次弱可微函数组成的线性空间. 显然 $C^k(\Omega)\subset W^k(\Omega)$. 因此, 弱

导数的概念是古典概念的推广，它保持了分部积分公式（公式(7.16)）的有效性.

下面我们考虑弱可微函数的某些基本性质，头一个引理叙述弱导数和软化子的相互作用.

引理 7.3 设 $u\in L^1_{\rm loc}(\Omega)$，$\alpha$ 是一个多重指标，并假定 $D^\alpha u$ 存在. 那么，如果 $\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega)>h$，我们就有

$$D^\alpha u_h(x)=(D^\alpha u)_h(x). \tag{7.17}$$

证明 在积分号下求微分，我们得到

$$\begin{aligned}
D^\alpha u_h(x)&=h^{-n}\int_\Omega D^\alpha_x\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)\,dy\\
&=(-1)^{|\alpha|}h^{-n}\int_\Omega D^\alpha_y\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)\,dy\\
&=h^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)D^\alpha u(y)\,dy \qquad \text{由 (7.16)}\\
&=(D^\alpha u)_h(x).\ \blacksquare
\end{aligned}$$

现在，从引理 7.1, 7.3 和定义 (7.16)，对弱导数可自动地推出一个基本的逼近定理，其明显的证明留给读者.

定理 7.4 设 u 和 v 在 Ω 中局部可积，则当且仅当存在一个 $C^\infty(\Omega)$ 函数序列 $\{u_m\}$ 在 $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ 中收敛到 u 而 u_m 的导数 $D^\alpha u_m$ 在 $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ 中收敛到 v 时，$v=D^\alpha u$.

象通常情形那样，弱导数的这个等价的特征也可以用作弱导数的定义. 这时得出的这个导数，常常称为强导数，因此定理 7.4 建立了弱导数和强导数的等价性. 通过定理 7.4，古典微积分中许多结果可以简单地用逼近的方法推广到弱导数. 特别，我们有乘积公式

$$D(uv)=uDv+vDu; \tag{7.18}$$

上式对所有使得 $uv,\ uDv+vDu\in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ 的 $u,\ v\in W^1(\Omega)$ 均成立；(见习题 7.4). 同样，如果 ψ 映 Ω 到区域 $\tilde\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上，$\psi\in C^1(\Omega)$，$\psi^{-1}\in C^1(\tilde\Omega)$，又若 $u\in W^1(\Omega)$，$v=u\circ\psi^{-1}$，则 $v\in W^1(\tilde\Omega)$，并且通常的变量替换公式可用，即

$$D_i u(x) = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} D_{y_j} v(y) \tag{7.19}$$

对于几乎所有的 $x \in \Omega$, $y \in \tilde{\Omega}$, $y = \psi(x)$ 成立(见习题 7.5).

注意到下述事实是很重要的：局部一致 Lipschitz 连续函数是弱可微的，即 $C^{0,1}(\Omega) \subset W^1(\Omega)$. 因为一个 $C^{0,1}(\Omega)$ 中的函数在 Ω 中任何直线段上都是绝对连续的，就推出了这个断言. 从而它的偏导数(它几乎处处存在)满足 (7.16)，因此几乎处处与弱导数一致. 通过正则化，我们实际上可以证明一个函数是弱可微的当且仅当它等价于一个函数，这函数在 Ω 中平行于坐标轴方向的直线段上绝对连续且其偏导数局部可积；(见习题 7.8). 本节和下节中讨论的弱微分法的基本性质均可由这个特征另行导出.

7.4. 链式法则

为完成弱微分法的基本计算，现在考虑链式法则的一个简单类型.

引理 7.5 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ 及 $u \in W^1(\Omega)$. 则复合函数 $f \circ u \in W^1(\Omega)$ 且 $D(f \circ u) = f'(u) Du$.

证明 设 $u_m \in C^1(\Omega)$, $m = 1, 2, \cdots$, 又设 $\{u_m\}$, $\{Du_m\}$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中分别收敛到 u, Du. 于是对 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 我们有

$$\int_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)| dx \leqslant \sup|f'| \int_{\Omega'} |u_m - u| dx \to 0,$$

$$\text{当 } m \to \infty \text{ 时},$$

$$\int_{\Omega'} |f'(u_m) Du_m - f'(u) Du| dx \leqslant \sup|f'| \int_{\Omega'} |Du_m - Du| dx + \int_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)| \, |Du| dx.$$

$\{u_m\}$的一个子序列，我们重新编号后仍记作 $\{u_m\}$，必在 Ω' 上几乎处处收敛到 u. 因为 f' 连续，$\{f'(u_m)\}$ 也在 Ω' 上几乎处处收敛到 $f'(u)$. 因此由控制收敛定理，最后的积分趋于 0. 从而序列 $\{f(u_m)\}$, $\{f'(u_m) Du_m\}$分别趋于 $f(u)$, $f'(u) Du$, 因此 $Df(u) = f'(u) Du$. ∎

函数 u 的正部和负部用下式定义：

$$u^+=\max\{u,\ 0\},\quad u^-=\min\{u,\ 0\}.$$

显然 $u=u^++u^-$ 及 $|u|=u^+-u^-$. 从引理 7.5, 对这些函数可导出以下链式法则.

引理 7.6 设 $u\in W^1(\Omega)$; 则 u^+, u^-, $|u|\in W^1(\Omega)$ 且

$$Du^+=\begin{cases}Du, & 若\ u>0,\\ 0, & 若\ u\leqslant 0,\end{cases}$$

$$(7.20)\qquad Du^-=\begin{cases}0, & 若\ u\geqslant 0,\\ Du, & 若\ u<0,\end{cases}$$

$$D|u|=\begin{cases}Du, & 若\ u>0,\\ 0, & 若\ u=0,\\ -Du, & 若\ u<0.\end{cases}$$

证明 对 $\varepsilon>0$, 定义

$$f_\varepsilon(u)=\begin{cases}(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon, & 若\ u>0,\\ 0, & 若\ u\leqslant 0.\end{cases}$$

于是应用引理 7.5, 对任何 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$, 我们有

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\,D\varphi\,dx=-\int_{u>0}\varphi\frac{uDu}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}}dx,$$

且当令 $\varepsilon\to 0$ 时, 我们便得到

$$\int_\Omega u^+D\varphi\,dx=-\int_{u>0}\varphi\,Du\,dx,$$

所以(7.20)对 u^+ 已证明. 由于 $u^-=-(-u)^+$ 和 $|u|=u^+-u^-$, 故其他结果均可得到. ▌

引理 7.7 设 $u\in W^1(\Omega)$. 则在 u 是常数的任一集合上几乎处处有 $Du=0$.

证明 不失一般性, 我们可以取常数为 0. 定理的结论立刻可从(7.20)推出, 因为 $Du=Du^++Du^-$. ▌

我们称一个函数是分片光滑的, 如果它连续并有分片连续的一阶导数. 于是下面的链式法则推广了引理 7.5 和 7.6.

定理 7.8 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上一个分片光滑的函数, $f'\in L^\infty(\mathbb{R})$. 那

么，如果 $u\in W^1(\Omega)$，我们就有 $f\circ u\in W^1(\Omega)$. 而且，设 L 表示 f 的角点的集合，我们有

$$(7.21)\qquad D(f\circ u)=\begin{cases} f'(u)Du, & \text{若 } u\notin L,\\ 0, & \text{若 } u\in L.\end{cases}$$

证明 通过归纳的论证方法，把证明化为一个角点的情形. 不失一般性，可取这角点在原点. 设 $f_1, f_2\in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f_1', f_2'\in L^\infty(\mathbb{R})$，对于 $u\geq 0$, $f_1(u)=f(u)$，对于 $u\leq 0$, $f_2(u)=f(u)$. 则因 $f(u)=f_1(u^+)+f_2(u^-)$，故这结论可用引理 7.5 和 7.6 推出. ∎

将引理 7.7 和定理 7.8 结合起来，我们看到，若 h 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有限值函数，对于 $u\notin L$，满足 $h(u)=f'(u)$，则 $Df(u)=h(u)Du$. 这种形式的链式法则可以推广到 Lipschitz 连续的 f 和满足 $h(u)Du\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 的 $u\in W^1(\Omega)$. 这个断言的证明需要比我们已用过的多得多的测度理论，然而它是习题 7.8 中给出的弱可微函数的特征的一个直接推论.

7.5. $W^{k,p}$ 空间

$W^{k,p}(\Omega)$ 空间是 Banach 空间，它们在某种意义上类似于 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 空间. 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 空间中，连续可微性被弱可微性代替，而 Hölder 连续性被 p 次可积性代替. 对于 $p\geq 1$ 和非负整数 k，我们设

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u\in W^k(\Omega);\, D^\alpha u\in L^p(\Omega), \forall|\alpha|\leq k\}.$$

空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 显然是线性的. 范数由下式引进:

$$(7.22)\qquad \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq k}|D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}.$$

它的一个等价范数是

$$(7.23)\qquad \|u\|'_{W^{k,p}(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^\alpha u\|_p.$$

验证 $W^{k,p}(\Omega)$ 在 (7.22) 下是 Banach 空间的工作留给读者（习题 7.10）.

另一类 Banach 空间 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 通过在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中取 $C_0^k(\Omega)$ 的闭包而得到. 对有界的 Ω，空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是不重合的.

$p=2$ 的情形是特殊的，因为空间 $W^{k,2}(\Omega)$，$W_0^{k,2}(\Omega)$（有时记作 $H^k(\Omega)$，$H_0^k(\Omega)$）在数量积

$$(7.24)\qquad (u,\ v)_k=\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha u D^\alpha v\, dx$$

之下是 Hilbert 空间. $W^{k,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 的进一步的泛函分析性质可通过考虑它们在由 N_k 个 $L^p(\Omega)$ 构成的积空间中的自然嵌入而推出，其中 N_k 是满足 $|\alpha|\leqslant k$ 的多重指标 α 的个数. 利用可分（自反）Banach 空间的有限乘积和闭子空间仍是可分（自反）的这一事实[DS]，我们因而得到空间 $W^{k,p}(\Omega)$，$W_0^{k,p}(\Omega)$ 对 $1\leqslant p<\infty$ 是可分的，对 $1<p<\infty$ 是自反的.

定理 7.8 的链式法则也可推广到空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{1,p}(\Omega)$. 事实上，作为定理 7.8 的一个推论，和这些空间的定义，我们立刻知道在定理 7.8 的叙述中 $W^1(\Omega)$ 可以用 $W^{1,p}(\Omega)$ 代替，如果还有 $f(0)=0$，则 $W^1(\Omega)$ 可用 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 来代替.

局部空间 $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ 可以定义为对所有的 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 都属于 $W^{k,p}(\Omega')$ 的函数组成的空间. 定理 7.4 表明，$W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ 中具有紧支集的函数实际上属于 $W_0^{k,p}(\Omega)$. 而且，$W^{1,p}(\Omega)$ 中的在 $\partial\Omega$ 上连续地变为 0 的函数也属于 $W_0^{1,p}(\Omega)$，这是因为它们能用具有紧支集的函数逼近.

7.6. 稠密性定理

由引理 7.2 和 7.3 显然有，若 u 属于 $W^{k,p}(\Omega)$，则对所有满足 $|\alpha|\leqslant k$ 的多重指标 α，当 h 趋于 0 时，在 $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ 的意义下 $D^\alpha u_h$ 趋于 $D^\alpha u$. 利用这一事实，我们将导出一个全局的逼近结果.

定理 7.9 子空间 $C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中稠密.

证明 设 Ω_j，$j=1, 2, \cdots$，是被 Ω 严格包含的子区域，满足 $\Omega_j\subset\subset\Omega_{j+1}$ 以及 $\cup\Omega_j=\Omega$，并设 $\{\psi_j\}$，$j=0, 1, 2, \cdots$，是一个从属于覆盖 $\{\Omega_{j+1}-\Omega_{j-1}\}$ 的单位分解（见习题 6.8），Ω_0 和 Ω_{-1} 被规定为空集. 于是对任意的 $u\in W^{k,p}(\Omega)$ 和 $\varepsilon>0$，我们能选 h_j，$j=1, 2, \cdots$，满足

$$h_j \leqslant \operatorname{dist}(\Omega_j,\ \partial\Omega_{j+1}),\ j\geqslant 1,$$

(7.25)
$$\|(\psi_j u)_{h_j}-\psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

记 $v_j=(\psi_j u)_{h_j}$, 从(7.25)得到,在任一给定的 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 上,只有有限个 v_j 不为 0, 从而函数 $v=\sum v_j$ 属于 $C^\infty(\Omega)$. 而且

$$\|u-v\|_{W^{k,p}(\Omega)}\leqslant\sum\|v_j-\psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\leqslant\varepsilon.\ \rule{1ex}{1ex}$$

定理 7.9 表明 $W^{k,p}(\Omega)$ 可以用 $C^\infty(\Omega)$ 在范数(7.22)之下的完备化来刻划. 在许多情形中这是一个方便的定义.

在任意 Ω 的情形, 在定理 7.9 中, 我们不能用 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 来代替 $C^\infty(\Omega)$, 然而对于一大类区域 Ω, $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中是稠密的, 比如说,其中包括具有 Lipschitz 连续边界的区域. 更一般地,若 Ω 满足线段条件(即存在 $\partial\Omega$ 的一个局部有限开覆盖 $\{\mathscr{U}_i\}$ 和对应的向量 y^i, 使得对所有的 $x\in\overline{\Omega}\cap\mathscr{U}_i$, $t\in(0,\ 1)$ 有 $x+ty^i\in\Omega$), 则 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 就在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中稠密(见[AD]).

7.7. 嵌入定理

在本节和下节中, 我们考虑弱可微函数的逐点性质和可积性质之间以及和它们的导数的可积性质之间的关系. 在这方面最简单的结果之一是一个变量的弱可微函数必定绝对连续. 在本节中我们对 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的函数证明熟知的 Sobolev 不等式.

定理 7.10

$$W_0^{1,p}(\Omega)\subset\begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega), & p<n,\\ C^0(\overline{\Omega}), & p>n.\end{cases}$$

而且,存在一个常数 $C=C(n,\ p)$,使得对任何 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$,

(7.26)
$$\begin{aligned}&\|u\|_{np/(n-p)}\leqslant C\|Du\|_p & p<n,\\ &\sup_\Omega|u|\leqslant C|\Omega|^{1/n-1/p}\|Du\|_p & p>n.\end{aligned}$$

证明 我们先对 $C_0^1(\Omega)$ 函数证明估计式 (7.26). 从 $p=1$ 的情形开始. 显然,对任何 $u\in C_0^1(\Omega)$和任何 i, $1\leqslant i\leqslant n$,

$$|u(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{x_i}|D_i u|\,dx_i,$$

所以

$$(7.27)\qquad |u(x)|^{n/(n-1)}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|D_iu|dx_i\right)^{1/(n-1)}.$$

现在逐次将 (7.27) 对每个变量 x_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 求积分，然后，每次积分后应用 $m=p_1=\cdots=p_m=n-1$ 的推广的 Hölder 不等式 (7.11). 因而得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{n/(n-1)}&\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|D_iu|dx\right)^{1/n}\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|D_iu|dx\qquad(7.28)\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\|Du\|_1.\end{aligned}$$

因而不等式(7.26)对 $p=1$ 的情形已证明. 剩下的情形现在可以通过在估计式(7.28)中用 $|u|$ 的幂代替 u 来得到. 用这种方法，对于 $\gamma>1$, 由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}\||u|^{\gamma}\|_{n/(n-1)}&\leqslant\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int_{\Omega}|u|^{\gamma-1}|Du|dx\\&\leqslant\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\||u|^{\gamma-1}\|_{p'}\|Du\|_p.\end{aligned}$$

现在对 $p<n$, 我们可选 γ 满足

$$\frac{\gamma n}{n-1}=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}\quad 即\quad \gamma=\frac{(n-1)p}{n-p},$$

由此得到所需要的

$$\|u\|_{np/(n-p)}\leqslant\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\|Du\|_p.$$

将下节的不等式(7.34)$\left(取\ q=\infty, \mu=\frac{1}{n}\right)$与(7.37)结合起来就立即得到 $p>n$ 的情形. 我们在这里插进一个基于 $p=1$ 情形的另外的证明.

对 $p>n$, 我们记

$$\tilde{u}=\frac{\sqrt{n}\,|u|}{\|Du\|_p},$$

并且假定 $|\Omega|=1$. 于是得到

$$\|\tilde{u}^{\gamma}\|_{n'}\leqslant\gamma\|\tilde{u}^{\gamma-1}\|_{p'},\quad n'=\frac{n}{n-1},\quad p'=\frac{p}{p-1},$$

由此 $$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{\gamma n'}&\leqslant\gamma^{1/\gamma}\|\tilde{u}\|_{p'(\gamma-1)}^{1-1/\gamma}\\&\leqslant\gamma^{1/\gamma}\|\tilde{u}\|_{\gamma p'}^{1-1/\gamma}\quad 因为\quad |\Omega|=1.\end{aligned}$$

我们用 $\delta^{\nu}(\nu=1,2,\cdots)$ 去替代 γ, 其中

$$\delta=\frac{n'}{p'}>1,$$

于是得到 $$\|\tilde{u}\|_{n'\delta^{\nu}}\leqslant\delta^{\nu\delta^{-\nu}}\|\tilde{u}\|_{n'\delta^{\nu-1}}^{1-\delta^{-\nu}},\quad \nu=1,2,\cdots.$$

从 $\nu=1$ 开始迭代(反复用这不等式), 并且用 (7.28), 对任何 ν 便得到

$$\|\tilde{u}\|_{\delta^{\nu}}\leqslant\delta^{\Sigma\nu\delta^{-\nu}}\equiv\chi.$$

由此根据习题 7.1, 当 $\nu\to\infty$ 时, 得到

$$\sup_{\Omega}\tilde{u}\leqslant\chi,$$

所以 $$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\frac{\chi}{\sqrt{n}}\|Du\|_{p}.$$

为去掉 $|\Omega|=1$ 的限制, 我们考虑变换: $y_i=|\Omega|^{1/n}x_i$. 因而得到所需要的

$$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\frac{\chi}{\sqrt{n}}|\Omega|^{1/n-1/p}\|Du\|_{p}.$$

为了把估计式 (7.26) 推广到任意 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 我们设 $\{u_m\}$ 是一个 $C_0^1(\Omega)$ 函数的序列, 它们在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中趋于 u. 应用估计式(7.26)到差 $u_{m_1}-u_{m_2}$ 上, 我们看到$\{u_m\}$当 $p<n$ 时是 $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列, 当 $p>n$ 时是 $C^0(\bar{\Omega})$ 中的 Cauchy 序列. 从而极限函数 u 属于它需要属于的空间且满足(7.26). ▌

附注 当 $p<n$ 时满足(7.26)的最好的常数曾由 Rodemich 计算过, 见[RO], 也可参看[BL], [TA2], 他证明了

$$C=\frac{1}{n\sqrt{\pi}}\left(\frac{n!\,\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n/p)\Gamma(n+1-n/p)}\right)^{1/n}\gamma^{1-1/p},$$

$$\left(\gamma=\frac{n(p-1)}{n-p}\right).$$

当 $p=1$ 时，上面的数化成熟知的等周常数 $n^{-1}(\omega_n)^{-1/n}$.

我们说一个 Banach 空间 $\mathscr{B}_1$ 连续地嵌入一个 Banach 空间 $\mathscr{B}_2$ (记作：$\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$)，如果存在一个有界，线性，一对一的映射：$\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$. 因此，定理 7.10 可以表示成：若 $p<n$, 则 $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^{np/(n-p)}(\Omega)$，若 $p>n$，则 $W_0^{1,p}(\Omega) \to C^0(\Omega)$. 重复定理 7.10 的结果 k 次，我们可以将它推广到空间 $W_0^{k,p}(\Omega)$.

推论 7.11

$$
W_0^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow L^{np/(n-kp)}(\Omega), & kp<n, \\ \searrow C^m(\overline{\Omega}), & 0 \leqslant m < k - \dfrac{n}{p}. \end{cases}
$$

估计式(7.26)和它们对空间 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 的推广还表明 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 的一个与(7.22)等价的范数可以由下式定义：

$$
\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}. \tag{7.29}
$$

一般说来，在推论 7.11 中，$W_0^{k,p}(\Omega)$ 不能用 $W^{k,p}(\Omega)$ 来代替. 然而，对一大类区域 Ω 还是可以做这种代替的. 其中包括，比如说，具有 Lipschitz 连续边界的区域 (见习题 7.11 和 7.12). 更一般地，若 Ω 满足一致内部锥条件 (即存在一个固定的锥 K_Ω，使得每点 $x \in \partial\Omega$ 是一个与 K_Ω 全等的锥 $K_\Omega(x) \subset \overline{\Omega}$ 的顶点)，那么有嵌入

$$
W^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow L^{np/(n-kp)}(\Omega), & kp<n, \\ \searrow C_B^m(\Omega), & 0 \leqslant m < k - \dfrac{n}{p}, \end{cases} \tag{7.30}
$$

其中 $C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^\infty(\Omega),\ |\alpha| \leqslant m\}$. 和用定理 7.10 的证明方法和定理 7.9 的论断，(7.30) 的证明可以化为对于 $C^1(\Omega)$ 函数去考虑 $k=p=1$ 的情形(见[AD]).

7.8. 位势估计和嵌入定理

使用某种位势估计，上节的嵌入结果可以另外导出并改善. 设 $\mu \in (0, 1)$，并在 $L^1(\Omega)$ 上定义算子 V_μ:

(7.31) $$(V_\mu f)(x)=\int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)}f(y)dy.$$

V_μ 实际上是有明确定义的，并且把 $L^1(\Omega)$ 映到它自身中，这一事实可以作为下面引理的一个附带推论而得到．首先，在 (7.31) 中令 $f\equiv 1$，我们看到

(7.32) $$V_\mu 1\leqslant \mu^{-1}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu.$$

因为，选 $R>0$ 使得 $|\Omega|=|B_R(x)|=\omega_n R^n$．那么

$$\int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)}dy\leqslant\int_{B_R(x)}|x-y|^{n(\mu-1)}dy$$
$$=\mu^{-1}\omega_n R^{n\mu}=\mu^{-1}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^\mu.$$

引理 7.12 对任何满足

(7.33) $$0\leqslant\delta=\delta(p,q)=p^{-1}-q^{-1}<\mu,\quad 1\leqslant q\leqslant\infty$$

的q，算子V_μ连续地把$L^p(\Omega)$映到$L^q(\Omega)$中．而且，对任何$f\in L^p(\Omega)$，

(7.34) $$\|V_\mu f\|_q\leqslant\left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}\|f\|_p.$$

证明 选 $r\geqslant 1$ 使得

$$r^{-1}=1+q^{-1}-p^{-1}=1-\delta.$$

于是由它推出 $h(x-y)=|x-y|^{n(\mu-1)}\in L^r(\Omega)$，且由(7.32)得到

$$\|h\|_r\leqslant\left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}.$$

现在，修改有关 $\mathbb{R}^n$ 中卷积的 Young 不等式的通常证明，可导得估计式(7.34)．写出

$$h|f|=h^{r/q}h^{r(1-1/p)}|f|^{p/q}|f|^{p\delta},$$

我们可以用 Hölder 不等式(7.11)来估计

$$|V_\mu f(x)|\leqslant\left\{\int_\Omega h^r(x-y)|f(y)|^p dy\right\}^{1/q}\left\{\int_\Omega h^r(x-y)dy\right\}^{1-1/p}\cdot\left\{\int_\Omega |f(y)|^p dy\right\}^\delta,$$

所以 $$\|V_\mu f\|_q\leqslant\sup_\Omega\left\{\int h^r(x-y)dy\right\}^{1/r}\|f\|_p$$
$$\leqslant\left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta}\omega_n^{1-\mu}|\Omega|^{\mu-\delta}\|f\|_p.\quad ∎$$

在此我们提一下引理 7.12 可以在下述意义下加强，即假定 $p>1$ 和 $\delta\leqslant\mu$，则 V_μ 连续地把 $L^p(\Omega)$ 映入 $L^q(\Omega)$ 中. 其证明需要 Hardy 和 Littlewood 的一个熟知的不等式（见 [HL]）. 然而，对我们这里的目的来讲引理 7.12 已足够了. 注意当 $p>\mu^{-1}$ 时，V_μ 连续地把 $L^p(\Omega)$ 映入 $L^\infty(\Omega)$ 中. 现在我们考察中间情形 $p=\mu^{-1}$.

引理 7.13 设 $f\in L^p(\Omega)$ 且 $g=V_{1/p}f$. 则存在仅依赖于 n 和 p 的常数 C_1 和 C_2 使得

$$(7.35)\qquad \int_\Omega \exp\left[\frac{g}{C_1\|f\|_p}\right]^{p'}dx\leqslant C_2|\Omega|,\quad p'=p/(p-1).$$

证明 从引理 7.12，对任何 $q\geqslant p$ 得到

$$\|g\|_q\leqslant q^{1-1/p+1/q}\omega_n^{1-1/p}|\Omega|^{1/q}\|f\|_p,$$

于是

$$\int_\Omega |g|^q dx\leqslant q^{1+q/p'}\omega_n^{q/p'}|\Omega|\,\|f\|_p^q,$$

因此对 $q\geqslant p-1$，

$$\int_\Omega |g|^{p'q}dx\leqslant p'q(\omega_n p'q\|f\|_p^{p'})^q|\Omega|.$$

从而

$$\int_\Omega\sum_{N_0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{|g|}{C_1\|f\|_p}\right)^{p'k}dx$$

$$\leqslant p'|\Omega|\sum\left(\frac{p'\omega_n}{C_1^{p'}}\right)^k\frac{k^k}{(k-1)!},\quad N_0=[p].$$

假定 $C_1^{p'}>e\omega_n p'$，这右边的级数就收敛. 因而由单调收敛定理和 (7.8) 可得所要的估计式 (7.35). ∎

下面的引理阐明弱导数和上述类型的位势之间的关系.

引理 7.14 设 $u\in W_0^{1,1}(\Omega)$，则

$$(7.36)\qquad u(x)=\frac{1}{n\omega_n}\int_\Omega\frac{(x_i-y_i)D_iu(y)}{|x-y|^n}dy \text{ 几乎处处于 } \Omega.$$

证明 假设 $u\in C_0^1(\Omega)$ 并在 Ω 外将 u 延拓为 0. 那么，对任何满足 $|\omega|=1$ 的 ω，

$$u(x)=-\int_0^\infty D_ru(x+r\omega)dr.$$

关于 ω 积分，我们得

$$u(x) = -\frac{1}{n\omega_n}\int_0^\infty\int_{|\omega|=1} D_r u(x+r\omega)\,dr\,d\omega$$
$$= \frac{1}{n\omega_n}\int_\Omega \frac{(x_i-y_i)D_i u(y)}{|x-y|^n}\,dy,$$

而从引理 7.12 和 $C_0^1(\Omega)$ 在 $W_0^{1,1}(\Omega)$ 中稠密可推出(7.36). ∎

注意，用分部积分公式(7.16)，对于 $C_0^2(\Omega)$ 函数的 Newton 位势表示式，即式(2.17)，可从公式(7.36)推出. 对 $u\in W_0^{1,1}(\Omega)$，我们还得到

$$|u| \leqslant \frac{1}{n\omega_n} V_{1/n}|Du|. \tag{7.37}$$

将引理 7.12 和不等式 (7.37) 结合起来，我们立即可得到嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，其中 $p^{-1}-q^{-1}<n^{-1}$. 这差不多就是定理 7.10 的结论. 实际上，对本书的目的来讲，这个较弱的说法已足够了. 但将引理 7.13 和 (7.37) 结合起来，我们还可得到一个 $p=n$ 情形下的较强的结果，它通过下面定理表达.

定理 7.15 设 $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$. 则存在仅依赖于 n 的常数 C_1 和 C_2，使得

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{|u|}{C_1\|Du\|_n}\right)^{n/(n-1)} dx \leqslant C_2|\Omega|. \tag{7.38}$$

附注 估计式 (7.37) 容易推广到高阶弱导数，于是对 $u\in W_0^{k,1}(\Omega)$ 得到

$$|u| \leqslant \frac{1}{(k-1)!\,n\omega_n} V_{k/n}|D^k u|, \tag{7.39}$$

而且利用引理 7.13，我们有定理 7.15 的一个推广. 即存在仅依赖于 n 和 k 的常数 C_1 和 C_2，使得如果 $u\in W_0^{k,p}(\Omega)$，$n=kp$，则

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{|u|}{C_1\|D^k u\|_p}\right)^{p/(p-1)} dx \leqslant C_2|\Omega|. \tag{7.40}$$

$p>n$ 情形下的 Sobolev 嵌入定理可以通过下列引理来加强.

引理 7.16 设 Ω 是凸的，且 $u\in W^{1,1}(\Omega)$，则

$$|u(x)-u_\Omega| \leqslant \frac{d^n}{n|\Omega|}\int_\Omega |x-y|^{1-n}|Du(y)|\,dy \tag{7.41}$$

几乎处处于 Ω,

其中 $$u_\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx, \quad d=\Omega \text{ 的直径}.$$

证明 按定理 7.9，只要对 $u\in C^1(\Omega)$ 证明(7.41)就够了。于是对 $x, y\in\Omega$，我们有

$$u(x)-u(y)=-\int_0^{|x-y|} D_r u(x+r\omega)dr, \quad \omega=\frac{y-x}{|y-x|}.$$

在 Ω 上关于 y 积分，我们得到

$$|\Omega|(u(x)-u_\Omega)=-\int_\Omega dy\int_0^{|x-y|} D_r u(x+r\omega)dr.$$

记 $$V(x)=\begin{cases}|D_r u(x)|, & x\in\Omega,\\ 0, & x\notin\Omega,\end{cases}$$

这样我们有

$$\begin{aligned}|u(x)-u_\Omega|&\leqslant\frac{1}{|\Omega|}\int_{|x-y|<d}dy\int_0^\infty V(x+r\omega)dr\\&=\frac{1}{|\Omega|}\int_0^\infty\int_{|\omega|=1}\int_0^d V(x+r\omega)\rho^{n-1}d\rho\, d\omega\, dr\\&=\frac{d^n}{n|\Omega|}\int_0^\infty\int_{|\omega|=1}V(x+r\omega)d\omega\, dr\\&=\frac{d^n}{n|\Omega|}\int_\Omega|x-y|^{1-n}|D_r u(y)|dy.\ \blacksquare\end{aligned}$$

现在我们可以证明 Morrey 的嵌入定理.

定理 7.17 设 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p>n$. 则 $u\in C^\gamma(\bar{\Omega})$，其中 $\gamma=1-n/p$. 而且，对任何球 $B=B_R$，

(7.42) $$\underset{\Omega\cap B_R}{\operatorname{osc}} u\leqslant CR^\gamma\|Du\|_p,$$

其中 $C=C(n, p)$.

证明 将估计式(7.41)和 $\Omega=B$, $q=\infty$, $\mu=n^{-1}$ 时的(7.34)结合起来，我们有

$$|u(x)-u_B|\leqslant C(n, p)R^\gamma\|Du\|_p \text{ 几乎处处于 } \Omega\cap B.$$

于是因为

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)|&\leqslant|u(x)-u_B|+|u(y)-u_B|\\&\leqslant 2C(n, p)R^\gamma\|Du\|_p \quad \text{几乎处处于 } \Omega\cap B,\end{aligned}$$

故可得定理的结果. $\blacksquare$

结合定理 7.10 和 7.17，对于 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 和 $p>n$ 我们有估计

$$(7.43)\qquad |u|_{0,\gamma}\leqslant C[1+(\operatorname{diam}\,\Omega)^{\gamma}]\|Du\|_p.$$

进而，定理 7.10, 7.15, 7.17 的结果可以概括成下图

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow L^{np/(n-p)}(\Omega), & p<n, \\
W_0^{1,p}(\Omega) & \rightarrow L^{\varphi}(\Omega), & \varphi=\exp(|t|^{n/(n-1)})-1, \quad p=n, \\
 & \searrow C^{\lambda}(\overline{\Omega}), & \lambda=1-\dfrac{n}{p},\ p>n,
\end{array}
$$

其中 $L^{\varphi}(\Omega)$ 表示带有上面定义的函数 φ 的 Orlicz 空间．($L^{\varphi}(\Omega)$ 的更明确的定义见[TR2]．)

对于本书中许多先验估计的推导，只要用被称为 Poincaré 不等式的 Sobolev 不等式的较弱形式就够了．从引理 7.12 和 7.14，对于 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，$1\leqslant p<\infty$，我们有

$$(7.44)\qquad \|u\|_p\leqslant\left(\frac{1}{\omega_n}\,|\Omega|\right)^{1/n}\|Du\|_p;$$

而从引理 7.12 和 7.16，对于 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 和凸区域 Ω，我们有

$$(7.45)\qquad \|u-u_\Omega\|\leqslant\left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{1-1/n}d^n\|Du\|_p,\ d=\operatorname{diam}\Omega.$$

7.9. Morrey 和 John-Nirenberg 估计

为了证明属于 Morrey 的（定理 7.19）以及属于 John 和 Nirenberg 的（定理 7.21）有用的嵌入结果，我们现在着手考虑另一类空间上的位势算子 V_μ．我们说可积函数 f 属于 $M^p(\Omega)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，如果存在常数 K，使得对所有的球 B_R，有

$$(7.46)\qquad \int_{\Omega\cap B_R}|f|\,dx\leqslant KR^{n(1-1/p)}.$$

于是我们把满足 (7.46) 的常数 K 的下确界定义为范数 $\|f\|_{M^p(\Omega)}$．易见 $L^p(\Omega)\subset M^p(\Omega)$，$L^1(\Omega)=M^1(\Omega)$，$L^\infty(\Omega)=M^\infty(\Omega)$．我们不详细考虑算子 V_μ 在任意 $M^p(\Omega)$ 空间上的行为，而限于考虑 $p\geqslant\mu^{-1}$ 的情形就够了．

引理 7.18 设$f\in M^p(\Omega)$, $\delta=p^{-1}<\mu$, 则

$$(7.47)\quad |V_\mu f(x)|\leqslant\frac{1-\delta}{\mu-\delta}(\operatorname{diam}\Omega)^{n(\mu-\delta)}\|f\|_{M^p(\Omega)}\ \text{几乎处处于}\Omega.$$

证明 在Ω外将f延拓为0, 并记

$$\nu(\rho)=\int_{B_\rho(x)}|f(y)|dy.$$

于是

$$\begin{aligned}|V_\mu f(x)|&\leqslant\int_\Omega\rho^{n(\mu-1)}|f(y)|dy,\quad \rho=|x-y|\\&=\int_0^d\rho^{n(\mu-1)}\nu'(\rho)d\rho,\qquad d=\operatorname{diam}\Omega\\&=d^{n(\mu-1)}\nu(d)+n(1-\mu)\int_0^d\rho^{n(\mu-1)-1}\nu(\rho)d\rho\\&\leqslant\frac{1-\delta}{\mu-\delta}d^{n(\mu-\delta)}K\quad\text{由 (7.46)}.\ ∎\end{aligned}$$

现在下面的定理推广了定理 7.17.

定理 7.19 设$u\in W^{1,1}(\Omega)$, 并假定存在正常数$K,\alpha(\alpha\leqslant1)$, 使得对所有的球$B_R\subset\Omega$, 有

$$(7.48)\qquad \int_{B_R}|Du|dx\leqslant KR^{n-1+\alpha},$$

则$u\in C^{0,\alpha}(\Omega)$, 并且对任意球$B_R\subset\Omega$,

$$(7.49)\qquad \operatorname*{osc}_{B_R}u\leqslant CKR^\alpha,$$

其中$C=C(n,\alpha)$. 如果对某个区域$\tilde\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\Omega=\tilde\Omega\cap\mathbb{R}^n_+=\{x\in\tilde\Omega\,|\,x_n>0\}$ 以及 (7.48) 对所有的球$B_R\subset\tilde\Omega$均成立, 那么$u\in C^{0,\alpha}(\overline\Omega\cap\tilde\Omega)$并且(7.49)对所有的球$B_R\subset\tilde\Omega$均成立.

将引理 7.16 和引理 7.18 结合起来就得到定理 7.19. 作为引理 7.18 的一个进一步的推论, 我们有

引理 7.20 设$f\in M^p(\Omega)\ (p>1)$及$g=V_\mu f$, $\mu=p^{-1}$. 则存在仅依赖于n和p的常数c_1和c_2使得

$$(7.50)\qquad \int_\Omega\exp\left(\frac{g}{c_1K}\right)dx\leqslant c_2(\operatorname{diam}\Omega)^n,$$

其中$K=\|f\|_{M^p(\Omega)}$.

证明 对任意 $q\geqslant 1$, 写

$$|x-y|^{n(\mu-1)}=|x-y|^{(\mu/q-1)n/q}|x-y|^{n(1-1/q)(\mu/q+\mu-1)},$$

由 Hölder 不等式我们有

$$|g(x)|\leqslant(V_{\mu/q}|f|)^{1/q}(V_{\mu+\mu/q}|f|)^{1-1/q}.$$

由引理 7.18,

$$V_{\mu+\mu/q}|f|\leqslant\frac{(1-\mu)q}{\mu}d^{n/pq}K,\quad d=\operatorname{diam}\Omega$$
$$\leqslant(p-1)qd^{n/pq}K.$$

又由引理 7.12,

$$\int_\Omega V_{\mu/q}|f|dx\leqslant pq\omega_n^{1-1/pq}|\Omega|^{1/pq}\|f\|_1$$
$$\leqslant pq\omega_n K d^{n(1-1/p+1/pq)}.$$

因此

$$\int_\Omega|g|^q dx\leqslant p(p-1)^{q-1}\omega_n q^q d^n K^q$$
$$\leqslant p'\omega_n\{(p-1)qK\}^q d^n,\ p'=p/(p-1).$$

从而

$$\int_\Omega\sum_{m=0}^{N}\frac{|g|^m}{m!(c_1K)^m}dx\leqslant p'\omega_n d^n\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{p-1}{c_1}\right)^m\frac{m^m}{m!}$$
$$\leqslant c_2d^n \text{ 若 } (p-1)e<c_1.$$

令 $N\to\infty$, 于是就得到(7.50). ▌

然后结合引理 7.16 和 7.20, 我们得到

定理 7.21 设 $u\in W^{1,1}(\Omega)$, 其中 Ω 是凸的, 并假定存在一个常数 K, 使得对所有的球 B_R,

$$\int_{\Omega\cap B_R}|Du|dx\leqslant KR^{n-1}. \tag{7.51}$$

则存在仅依赖于 n 的正常数 μ_0 和 C, 使得

$$\int_\Omega\exp\left(\frac{\mu}{K}|u-u_\Omega|\right)dx\leqslant C(\operatorname{diam}\Omega)^n, \tag{7.52}$$

其中 $\mu=\mu_0|\Omega|(\operatorname{diam}\Omega)^{-n}$.

7.10. 紧性结果

设 $\mathscr{B}_1$ 是一个 Banach 空间, 它连续地嵌入一个 Banach 空间

$\mathscr{B}_2$. 如果嵌入算子 I: $\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ 是紧的，即如果 $\mathscr{B}_1$ 中有界集的象在 $\mathscr{B}_2$ 中是准紧的，则说 $\mathscr{B}_1$ 紧嵌入 $\mathscr{B}_2$. 现对空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 证明 Kondrachov 紧性定理.

定理 7.22 (i) 若 $p<n$, 则对任何 $q<np/(n-p)$, 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 紧嵌入空间 $L^q(\Omega)$, (ii) 若 $p>n$, 则空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 紧嵌入 $C^0(\overline{\Omega})$.

证明 部分(ii)是 Morrey 定理（定理 7.17）和关于等度连续函数族的 Arzela 定理的推论. 因此我们把注意力集中于部分(i)，并且一开始对 $q=1$ 的情形证明它. 设 A 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的一个有界集. 不失一般性我们可以假定 $A\subset C_0^1(\Omega)$，并设对所有的 $u\in A$，有 $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leqslant 1$. 对 $h>0$ 我们定义 $A_h=\{u_h | u\in A\}$，其中 u_h 是 u 的正则化(见公式 (7.13)). 于是推出集合 A_h 在 $L^1(\Omega)$ 中是准紧的. 因为若 $u\in A$, 我们有

$$|u_h(x)|\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)\,|u(x-hz)|\,dz\leqslant\sup\rho\|u\|_1,$$

以及 $$|Du_h(x)|\leqslant\int_{|z|<1}D\rho(z)\,|u(x-hz)|\,dz\leqslant\sup|D\rho|\,\|u\|_1,$$

所以 A_h 是 $C^0(\overline{\Omega})$ 的一个有界、等度连续的子集，因此由 Arzela 定理知 A_h 在 $C^0(\overline{\Omega})$ 中准紧，由此在 $L^1(\Omega)$ 中也准紧. 其次，我们对于 $u\in A$ 可以作估计

$$\begin{aligned}|u(x)-u_h(x)|&\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)\,|u(x)-u(x-hz)|\,dz\\&\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)\int_0^{h|z|}|D_ru(x-r\omega)|\,dr\,dz,\quad \omega=\frac{z}{|z|};\end{aligned}$$

因此对 x 积分我们得到

$$\int_\Omega|u(x)-u_h(x)|\,dx\leqslant h\int_\Omega|Du|\,dx\leqslant h.$$

由此 u_h 在 $L^1(\Omega)$ 中一致逼近于 u(相对于 A). 因为我们在上面已指出 A_h 在 $L^1(\Omega)$ 中对所有的 $h>0$ 是全有界的. 由这推出 A 在 $L^1(\Omega)$ 中也是全有界的，因而是准紧的. 这样，$q=1$ 的情形就证完了. 为推广这结果到任意的 $q<np/(n-p)$，我们用(7.9)估计

$$\|u\|_q \leqslant \|u\|_1^\lambda \|u\|_{np/(n-p)}^{1-\lambda}, \quad 其中\ \lambda+(1-\lambda)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{q}$$

$$\leqslant \|u\|_1^\lambda (C\|Du\|_p)^{1-\lambda}, 根据定理\ 7.10.$$

由此 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的有界集对于 $q>1$ 必在 $L^q(\Omega)$ 中准紧，定理得证. ▌

定理 7.22 的一个简单推广表明，嵌入

$$W_0^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow L^q(\Omega), & kp<n,\ q<\dfrac{np}{n-kp}, \\ \searrow C^m(\overline{\Omega}), & 0\leqslant m<k-\dfrac{n}{p} \end{cases}$$

是紧的，并且对某个 Ω, $W_0^{k,p}(\Omega)$ 可以用 $W^{k,p}(\Omega)$ 来代替；见[AD].

7.11. 差商

在偏微分方程中，函数的弱的或古典的可微性常可通过它们的差商的考察而推出来. 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 中区域 Ω 上的一个函数，e_i 表示在 x_i 方向的单位坐标向量. 与第 6 章中一样，我们用下式定义方向 e_i 上的差商

$$\Delta^h u(x)=\Delta_i^h u(x)=\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}, \quad h\neq 0. \tag{7.53}$$

下面的基本引理是关于 Sobolev 空间中函数的差商的.

引理 7.23 设 $u\in W^{1,p}(\Omega)$，则对任何满足 $h<\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 的 $\Omega'\subset\subset\Omega$，有 $\Delta^h u\in L^p(\Omega')$，而且

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')}\leqslant \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

证明 我们一开始假定 $u\in C^1(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$. 那么

$$\Delta^h u(x)=\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h D_i u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i+\xi, x_{i+1}, \cdots, x_n)\,d\xi,$$

于是由 Hölder 不等式，

$$|\Delta^h u(x)|^p\leqslant \frac{1}{h}\int_0^h |D_i u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i+\xi, x_{i+1}, \cdots, x_n)|^p\,d\xi,$$

因此 $\int_{\Omega'} |\Delta^h u|^p \, dx \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \int_{B_h(\Omega')} |D_i u|^p \, dx \, d\xi \leqslant \int_\Omega |D_i u|^p \, dx.$

通过用定理 7.9 的一个简单的逼近证法，就可推广到 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的任意函数. ∎

引理 7.24 设 $u \in L^p(\Omega)$，$1<p<\infty$，并假定存在一个常数 K，使得对所有的 $h>0$ 和满足 $h<\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 的 $\Omega' \subset\subset \Omega$，有 $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ 及 $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leqslant K$. 则弱导数 $D_i u$ 存在并满足 $\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K$.

证明 由 $L^p(\Omega')$ 中的有界集的弱紧性（习题 5.4）知，存在一个趋向于 0 的序列 $\{h_m\}$ 和一个适合 $\|v\|_p \leqslant K$ 的函数 $v \in L^p(\Omega)$，对所有的 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega \varphi \Delta^{h_m} u \, dx \to \int_\Omega \varphi v \, dx,$$

这时对 $h_m < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$，我们有

$$\int_\Omega \varphi \Delta^{h_m} u \, dx = -\int_\Omega u \Delta^{-h_m} \varphi \, dx \to -\int_\Omega u D_i \varphi \, dx.$$

因此
$$\int_\Omega \varphi v \, dx = -\int_\Omega u D_i \varphi \, dx,$$

因而 $v = D_i u$. ∎

评注

与 Sobolev 空间有关的材料读者可参阅书 [AD]，[FR]，[MY5] 和 [NE]. 我们按照习惯把这章中的空间叫作 Sobolev 空间，虽然各种弱可微函数空间的概念在 Sobolev 的工作 [SO1] 之前就已有人用过（关于这点可参看 [MY1] 和 [MY5]）. 软化或正则化的方法出现在 Friedrich 的工作中 [FD1]. 稠密性定理（定理 7.9），是属于 Mayers 和 Serrin 的 [MS]. Sobolev 不等式（定理 7.8）本质上是 Sobolev 证明的 [SL1, 2]；对 $p<n$ 的情形，我们采用了 Nirenberg 的证明 [NI3]. Hölder 估计（定理 7.17 和 7.19）是由 Morrey 导出的 [MY1]. 定理 7.21 是属于 John 和 Nirenberg 的 [JN]；我们的证明取自 [TR2]，该文中也有定理 7.15

中的估计．紧致性结果（定理 7.22），$p=2$ 的情形是属于 Rellich 的[RE]，一般情形是属于 Kondrachov 的 [KN].

习　题

7.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域．如果 u 是 Ω 上的一个可测函数使得对某些 $p\in\mathbb{R}$, $|u|^p\in L^1(\Omega)$，我们定义

$$\Phi_p(u)=\left[\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u|^p dx\right]^{1/p}.$$

证明：(i) $\lim\limits_{p\to\infty}\Phi_p(u)=\sup\limits_\Omega|u|$;

(ii) $\lim\limits_{p\to-\infty}\Phi_p(u)=\inf\limits_\Omega|u|$;

(iii) $\lim\limits_{p\to 0}\Phi_p(u)=\exp\left[\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|u|dx\right]$.

7.2. 证明一个函数 u 在区域 Ω 中是弱可微的当且仅当它在 Ω 中每点的一个邻域中是弱可微的.

7.3. 设 α, β 是多重指标，u 是区域 Ω 上一个局部可积函数．证明：假如弱导数 $D^{\alpha+\beta}u$、$D^\alpha(D^\beta u)$、$D^\beta(D^\alpha u)$ 之一存在，则它们全都存在并且在 Ω 上几乎处处相等.

7.4. 导出乘积公式(7.18)．(提示：首先考虑 $u\in W^1(\Omega)$, $v\in C^1(\Omega)$ 的情形).

7.5. 导出公式(7.19).

7.6. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个包含原点的区域．证明：假如 $k+\alpha<n$，则由 $\gamma(x)=|x|^{-\alpha}$ 给出的函数 γ 属于 $W^k(\Omega)$.

7.7. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个区域．证明函数 $u\in C^{0,1}(\Omega)$ 当且仅当 u 是具有局部有界弱导数的弱可微函数.

7.8. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个区域．证明函数 u 在 Ω 中弱可微当且仅当它等价于一个函数 $\bar{u}$, $\bar{u}$ 在 Ω 中几乎所有的平行于坐标轴的线段上绝对连续，且其偏导数(可推出它在 Ω 中几乎处处存在)在 Ω 中局部可积(见[MY5], p.66)．从这个特性导出弱微分法的乘积公式和链式法则.

7.9. 证明范数(7.22)和(7.23)是 $W^{k,p}(\Omega)$ 上的等价范数.

7.10. 证明空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 在范数(7.22)或(7.23)之下是完备的.

7.11. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个立方体．试通过修改定理 7.10 的证明来证明

$$W^{1,p}(\Omega)\begin{cases}\nearrow L^{np/(n-p)}(\Omega), & p<n,\\ \searrow L^\infty(\Omega)\cap C^0(\Omega), & p>n.\end{cases}$$

7.12. 把问题 7.11 的结果推广到具有边界 $\partial\Omega\in C^{0,1}$ 的区域 Ω.

7.13. 从定理 7.19 推出对应的全局性的结果．即设 $u\in W^1(\Omega)$, $\partial\Omega\in C^{0,1}$,

并假设存在正常数 K, $\alpha(\alpha<1)$, 使得对所有的球 $B_R\subset\mathbf{R}^n$, 有

$$\int_{B_R}|Du|\,dx\leqslant KR^{n-1+\alpha}.$$

则 $u\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ 及

$$[u]_{\alpha;\Omega}\leqslant CK,$$

其中 $C=C(n,\alpha,\Omega)$.

7.14. 设 Ω 是一个有界区域, 使得嵌入

$$W^{1,p}(\Omega)\to L^{p^*}(\Omega),\ 1\leqslant p<\infty$$

成立. 试证明嵌入

$$W^{1,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$$

对任何 $q<p^*$ 是紧的.

7.15. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域. $u\in L^1(\Omega)$ 的全变差由下式定义:

$$\int_\Omega|Du|=\sup\left\{\int_\Omega u\operatorname{div}\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\in C_0^1(\Omega),\ |\mathbf{v}|\leqslant1\right\}.$$

试证明有限全变差函数空间 $BV(\Omega)$ 在范数

$$\|u\|_{BV(\Omega)}=\|u\|_1+\int_\Omega|Du|$$

之下是一个 Banach 空间, 并且 $W^{1,1}(\Omega)$ 是它的一个闭子空间.

7.16. 设 $u\in BV(\Omega)$. 试通过将 u 正则化和适当修改定理 7.9 的证明来证明存在序列 $\{u_m\}\subset C^\infty(\Omega)\cap W^{1,1}(\Omega)$, 使得在 $L^1(\Omega)$ 中 $u_m\to u$, 并且

$$\int_\Omega|Du_m|\to\int_\Omega|Du|.$$

7.17. 设 Ω 是一个有界区域, 使 Sobolev 嵌入

$$W^{1,1}(\Omega)\to L^{n/(n-1)}(\Omega)$$

成立, 试证明也有

$$BV(\Omega)\to L^{n/(n-1)}(\Omega),$$

而且嵌入

$$BV(\Omega)\to L^q(\Omega)$$

对任何 $q<n/(n-1)$ 是紧的.

第八章

广义解和正则性

本章在对系数作比较弱的光滑性假定之下讨论主部为散度形式的线性椭圆型算子. 我们考虑具有下列形式的算子 L

(8.1) $$Lu=D_i(a^{ij}(x)D_ju+b^i(x)u)+c^i(x)D_iu+d(x)u,$$

假定它的系数 a^{ij}, b^i, c^i, $d(i, j=1, \cdots, n)$ 是区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 一个具有一般形式 (3.1) 的算子 L, 如果它的主系数 a^{ij} 是可微的, 就可以写成 (8.1)的形式. 于是这里展开的 Hilbert 空间方法可以看成给第六章提供了另一种存在性理论. 另一方面, 若在(8.1)中, 系数 a^{ij} 和 b^i 是可微的而函数 $u\in C^2(\Omega)$, 则 L 可以写成一般形式 (3.1), 因而第六章的理论可以应用于它. 然而散度形式有下述优点, 即算子 L 可以对于比 $C^2(\Omega)$ 更广泛的一些函数类有定义. 确实, 若我们假定函数 u 仅仅是弱可微的, 并且假定函数 $a^{ij}D_ju+b^iu$, c^iD_iu+du, $i=1, \cdots, n$ 是局部可积的, 那么, 如果对于所有非负函数 $v\in C_0^1(\Omega)$, 有

(8.2) $$\mathfrak{L}(u, v)=\int_\Omega\{(a^{ij}D_ju+b^iu)D_iv-(c^iD_iu+du)v\}dx$$
$$=0 \qquad (\leqslant 0, \geqslant 0),$$

就称 u 在弱的或广义的意义下在 Ω 中分别满足 $Lu=0(\geqslant 0, \leqslant 0)$. 假如 L 的系数局部可积, 从散度定理 (2.3) 可推出, 一个函数 $u\in C^2(\Omega)$ 在古典意义下满足 $Lu=0(\geqslant 0, \leqslant 0)$ 必然也在广义意义下满足这些关系式. 而且, 若系数 a^{ij}, b^i 具有局部可积的导数, 则一个广义解 $u\in C^2(\Omega)$ 也是一个古典解.

设 f^i, g, $i=1, \cdots, n$ 是 Ω 中的局部可积函数, 那么一个弱可微函数 u 将称为非齐次方程

(8.3) $$Lu=g+D_if^i$$

在 Ω 中的弱的或广义的解，如果

$$(8.4)\qquad \mathfrak{L}(u,\ v)=F(v)=\int_{\Omega}(f^iD_iv-gv)dx,\ \forall v\in C_0^1(\Omega).$$

象上面那样，我们知道，(8.3) 的古典解也是广义解，并且当 L 的系数充分光滑时，一个 $C^2(\Omega)$ 广义解也是古典解.

我们的计划是要研究方程(8.3)的广义 Dirichlet 问题. 这个问题将以怎样的意义自然地被提出取决于 L 的系数. 我们将始终假定 L 在 Ω 中是严格椭圆的；即存在一个正数 λ，使得

$$(8.5)\qquad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\quad \forall x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

我们还假定(除非另外声明) L 有有界系数；即对某常数 Λ 和 $\nu\geqslant0$，对所有的 $x\in\Omega$，有

$$(8.6)\qquad \begin{aligned}&\sum|a^{ij}(x)|^2\leqslant\Lambda^2,\\ &\lambda^{-2}\sum(|b^i(x)|^2+|c^i(x)|^2)+\lambda^{-1}|d(x)|\leqslant\nu^2.\end{aligned}$$

但是我们指出，如果放松这些条件，一个满意的理论仍然可以建立起来[TR7]. 于是，如果一个属于 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\Omega)$ 的函数 u 是方程 (8.3) 的广义解，$\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$，且 $u-\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$，那么就称 u 是广义 Dirichlet 问题：$Lu=g+D_if^i$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 的解.

出现在公式(8.2)和(8.4)中的函数 $v\in C_0^1(\Omega)$ 常称为检验函数. 注意，由条件(8.6)我们有

$$(8.7)\ |\mathfrak{L}(u,\ v)|\leqslant\int_{\Omega}\{|a^{ij}D_juD_iv|+|b^iuD_iv|+|c^ivD_iu|+|duv|\}dx$$
$$\leqslant C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}\quad \text{根据 Schwarz 不等式}.$$

因此，对于固定的 $u\in W^{1,2}(\Omega)$，映射 $v\to\mathfrak{L}(u,\ v)$ 是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的有界线性泛函. 从而关系式 (8.2) 对 $v\in C_0^1(\Omega)$ 的正确性蕴涵着 (8.2)对 $v\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 的正确性.

从(8.3)的存在定理的观点来看，估计式(8.7)也是很重要的，因为它表明算子 L 通过(8.2) 在 Hilbert 空间 $W^{1,2}(\Omega)$，$W_0^{1,2}(\Omega)$ 的每一个上定义了一个有界双线性形式. 对于固定的 $u\in W^{1,2}(\Omega)$，令 $Lu(v)=\mathfrak{L}(u,\ v)$，$v\in W_0^{1,2}(\Omega)$，可以将 Lu 定义作 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的对偶空间中的一个元素. 由 Riesz 表示定理，$W_0^{1,2}(\Omega)$ 可以与其

对偶恒同，从而算子 L 诱导出一个映射 $W^{1,2}(\Omega)\to W_0^{1,2}(\Omega)$. 正象我们不久将要证明的那样，方程 (8.3) 的 Dirichlet 问题的可解性容易化成这个映射的可逆性.

上面叙述的对线性 Dirichlet 问题的另一种方法决不是这一章仅有的重要贡献. 在 8.6, 8.9 和 8.10 节中推导的逐点估计对后面第 II 部分中拟线性方程理论的发展是具有决定意义的. 为了这方面应用的目的，读者只需要考虑方程(8.3)的 $C^1(\overline{\Omega})$ 下解或上解且在 (8.1) 中取 $b^i=c^i=d=0$, 也就是在 (8.6) 中取 $\nu=0$ 即可.

8.1. 弱极大值原理

古典的弱极大值原理(定理 3.1), 有一个自然的推广，推广到散度形式的算子. 为了把它表成式子，我们需要关于 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的函数在边界上不等的概念. 即，如果 $u\in W^{1,2}(\Omega)$, 它的正部 $u^+=\max\{u, 0\}\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 我们就说 u 在 $\partial\Omega$ 上满足 $u\leqslant 0$. 如果 u 在 $\partial\Omega$ 的一个邻域中连续，那么 u 在 $\partial\Omega$ 上满足 $u\leqslant 0$ 当且仅当这不等式 ($u\leqslant 0$) 在古典的逐点意义下成立. 在 $\partial\Omega$ 上，其他的不等式可以自然地定义. 例如，若在 $\partial\Omega$ 上 $-u\leqslant 0$, 则说在 $\partial\Omega$ 上 $u\geqslant 0$; 若在 $\partial\Omega$ 上 $v\in W^{1,2}(\Omega)$ 且 $u-v\leqslant 0$, 则说在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant v$;

$$\sup_{\partial\Omega} u=\inf\{k \mid 在\ \partial\Omega\ 上\ u\leqslant k,\ k\in\mathbb{R}\};\quad \inf_{\partial\Omega} u=-\sup_{\partial\Omega}(-u).$$

对推论 3.2 中的古典的弱极大值原理，我们加了(3.1)中 u 的系数非正这个条件. 在 (8.1) 中对应的量是 D_ib^i+d, 但因导数 D_ib^i 不一定作为一个函数存在，故这一项的非正性必须解释成广义的，也就是说，我们假定

$$\int_\Omega (dv-b^iD_iv)\,dx\leqslant 0\quad \forall v\geqslant 0,\quad v\in C_0^1(\Omega). \tag{8.8}$$

因为 b^i 和 d 是有界的，故不等式 (8.8) 对所有非负的 $v\in W_0^{1,1}(\Omega)$ 将仍然成立.

现在我们可以叙述下面的弱极大值原理.

定理 8.1 设 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Lu\geqslant 0(\leqslant 0)$. 则

(8.9) $$\sup_{\Omega} u\leqslant\sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u\geqslant\inf_{\partial\Omega} u^-).$$

证明 若 $u\in W^{1,2}(\Omega)$, $v\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 我们有 $uv\in W_0^{1,1}(\Omega)$ 和 $Duv=vDu+uDv$ (习题 7.4). 于是可以将不等式 $\mathfrak{L}(u, v)\leqslant 0$ 写成形式

$$\int_\Omega\{a^{ij}D_juD_iv-(b^i+c^i)\,vD_iu\}\,dx\leqslant\int_\Omega\{d\,uv-b^iD_i(uv)\}dx\leqslant 0,$$

此式对所有满足 $uv\geqslant 0$ 的 $v\geqslant 0$ 成立 (由 (8.8)). 因此, 由系数的界(8.6), 我们有

(8.10) $$\int_\Omega a^{ij}D_juD_iv\,dx\leqslant\lambda\nu\int_\Omega v\,|Du|\,dx$$

对所有满足 $uv\geqslant 0$ 的 $v\geqslant 0$ 成立. 在 $b^i+c^i=0$ 的特殊情形下, 取 $v=\max\{u-l, 0\}$, 其中 $l=\sup_{\partial\Omega}u^+$, 即可得证. 在一般情形下, 我们选 k 满足 $l\leqslant k<\sup_{\Omega} u$, 并且令 $v=(u-k)^+$. (若不存在这样的 k, 那么我们的证明就已完成了). 由链式法则 (定理 7.8), 我们有 $v\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 及

$$Dv=\begin{cases}Du, & u>k\ (\text{即 } v\neq 0),\\ 0, & u\leqslant k\ (\text{即 } v=0).\end{cases}$$

因此从(8.10)我们得到

$$\int_\Omega a^{ij}D_jvD_iv\,dx\leqslant\lambda\nu\int_\Omega v\,|Dv|\,dx,$$

由 L 的严格椭圆性(8.5), 因而

$$\int_\Omega|Dv|^2\,dx\leqslant\nu\int_\Omega v\,|Dv|\,dx\leqslant\nu\|v\|_2\|Dv\|_2,$$

于是有 $$\|Dv\|_2\leqslant\nu\|v\|_2.$$

现在对 $n\geqslant 3$ 应用 Sobolev 不等式(定理 7.10), 得到

$$\|v\|_{2n/(n-2)}\leqslant C\|v\|_2\leqslant C\,|\operatorname{supp} v|^{1/n}\|v\|_{2n/(n-2)},$$

其中 $C=C(n, \nu)$, 于是

$$|\operatorname{supp} v|\geqslant C^{-n}.$$

在 $n=2$ 的情形, 把 $2n/(n-2)$ 换成任何一个大于 2 的数, 也可以

从 Sobolev 不等式得到一个同样形式的不等式，其中 $C=C(n, \nu, |\Omega|)$. 因为这些不等式不依赖于 k, 故当 k 趋于 $\sup\limits_{\Omega} u$ 时它们也必然成立，也就是说，函数 u 必在一个正测度的集合上达到它在 Ω 中的上确界；因而它也是有界的.

为完成这定理的证明，我们固定 $k=l$ 并设 $V=\sup\limits_{\Omega} v=\sup\limits_{\Omega} u-l>0$. 现在我们在(8.10)中(对某个 $\varepsilon>0$)，用函数

$$\bar{v}=\frac{v}{V+\varepsilon-v}$$

来代替函数 v, 于是得到

$$\int_{\Omega}\frac{a^{ij}D_i v D_j v}{(V+\varepsilon-v)^2}\,dx\leqslant\lambda\nu\int_{\Omega}\frac{|Dv|}{V+\varepsilon-v}\,dx.$$

令

$$w_{\varepsilon}=\log\frac{V+\varepsilon}{V+\varepsilon-v}\in W_0^{1,2}(\Omega),$$

从严格椭圆性(8.5)，我们得到

$$\int_{\Omega}|Dw_{\varepsilon}|^2\,dx\leqslant\nu\int_{\Omega}|Dw_{\varepsilon}|\,dx,$$

因此

$$\|Dw_{\varepsilon}\|_2\leqslant\nu|\Omega|^{1/2}.$$

Sobolev 不等式的另一应用产生出下述不等式：

$$\|w_{\varepsilon}\|_2\leqslant C,$$

其中 $C=C(n, \nu, |\Omega|)$. 因此，令 ε 趋于 0, 可推出函数

$$w_0=\log\frac{V}{V-v}$$

在 Ω 中可积. 但这样一来，v 只能在一个零测集上等于 V, 这与前面关于 u 的结论矛盾. ▮

方程(8.3)的广义 Dirichlet 问题解的唯一性是定理 8.1 的直接推论.

推论 8.2 设 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Lu=0$. 则在 Ω 中 $u=0$.

关于将 (8.8) 换成另外的条件，读者可参看习题 8.1；也可看 [TR11].

8.2. Dirichlet 问题的可解性

这一节的主要目标是下面的存在性结果.

定理 8.3 设算子 L 满足条件 (8.5), (8.6) 和 (8.8). 则对于 $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$ 和 $g, f^i\in L^2(\Omega)$, $i=1, \cdots, n$, 广义 Dirichlet 问题: 在 Ω 内 $Lu=g+D_if^i$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 是唯一可解的.

证明 定理 8.3 可以作为算子 L 的 Fredholm 二择一性质的副产物而导出. 我们首先将 Dirichlet 问题化为零边值的情形. 令 $w=u-\varphi$, 从(8.3)得到

$$\begin{aligned}Lw&=Lu-L\varphi\\&=g-c^iD_i\varphi-d\varphi+D_i(f^i-a^{ij}D_j\varphi-b^i\varphi)\\&=\hat{g}+D_i\hat{f}^i,\end{aligned}$$

从我们施加于 L 和 φ 的条件, 显然有 $\hat{g}, \hat{f}^i\in L^2(\Omega)$, $i=1, \cdots, n$ 和 $w\in W_0^{1,2}(\Omega)$. 因此只要对 $\varphi\equiv0$ 的情形证明定理 8.3 就够了.

我们记 $\mathscr{H}=W_0^{1,2}(\Omega)$, $\mathbf{g}=(g, f^1, \cdots, f^n)$, 以及对于 $v\in\mathscr{H}$, $F(v)=-\int_\Omega(gv-f^iD_iv)\,dx$. 因为

$$|F(v)|\leqslant\|\mathbf{g}\|_2\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

于是有 $F\in\mathscr{H}^*$. 若由(8.2) 定义的双线性形式 $\mathfrak{L}$ 除有界外还在 $\mathscr{H}$ 上是强迫的, 我们就能从定理 5.8 立即得到 L 的 Dirichlet 问题的唯一可解性. 与 $\mathfrak{L}$ 的强迫性有关的是下面的引理.

引理 8.4 设 L 满足条件(8.5)和(8.6). 则

$$\mathfrak{L}(u, u)\geqslant\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|Du|^2dx-\lambda\nu^2\int_\Omega u^2\,dx. \tag{8.11}$$

证明 $\mathfrak{L}(u, u)=\int_\Omega(a^{ij}D_iuD_ju+(b^i-c^i)uD_iu-du^2)\,dx$

由 Schwarz 不等式

$$\geqslant\int_\Omega\left(\lambda|Du|^2-\frac{\lambda}{2}|Du|^2-\lambda\nu^2u^2\right)dx$$

$$=\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|Du|^2\,dx-\lambda\nu^2\int_\Omega u^2\,dx. \quad ∎$$

对 $\sigma\in\mathbb{R}$, 现在按照 $L_\sigma=Lu-\sigma u$ 定义算子 L_σ. 由引理 8.4,

我们知道如果σ充分大或者$|\Omega|$充分小，则与L_σ相关联的双线性形式$\mathfrak{L}_\sigma$是强迫的．为了进一步进行下去，我们用

$$(8.12)\qquad Iu(v)=\int_\Omega uv\,dx,\quad v\in\mathscr{H}$$

定义一个嵌入$I: \mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$，于是有

引理 8.5 映射I是紧的．

证明 我们可以将I写成$I=I_1I_2$，其中$I_2: \mathscr{H}\to L^2(\Omega)$是自然嵌入，而$I_1: L^2(\Omega)\to\mathscr{H}^*$由(8.12)给出．由紧性结果(定理7.22)，$I_2$是紧的(若$p=n=2$，也是这样)，并且，因为$I_1$显然是连续的，由此得$I$是紧的．∎

为继续进行，我们选σ_0，使$\mathfrak{L}_{\sigma_0}$在Hilbert空间$\mathscr{H}$上是有界和强迫的．于是对$u\in\mathscr{H}$，$F\in\mathscr{H}^*$，方程$Lu=F$等价于方程

$$L_{\sigma_0}u+\sigma_0Iu=F.$$

由定理5.8，$L_{\sigma_0}^{-1}$是一个从$\mathscr{H}^*$到$\mathscr{H}$上的连续的、一对一的映射，将它作用到上面的方程上去，就得到等价的方程

$$(8.13)\qquad u+\sigma_0L_{\sigma_0}^{-1}Iu=L_{\sigma_0}^{-1}F.$$

根据引理8.5，映射$T=-\sigma_0L_{\sigma_0}^{-1}I$是紧的，因此由Fredholm二择一性质(定理5.3)知满足方程(8.13)的函数$u\in\mathscr{H}$的存在性是方程$Lu=0$在$\mathscr{H}$中的平凡解的唯一性的推论．这样，定理8.3由唯一性结果(推论8.2)推出．∎

从定理5.11可以推出算子L的谱行为的种类．我们用

$$(8.14)\qquad L^*u=D_i(a^{ij}D_ju-c^iu)-b^iD_iu+du$$

定义L的形式共轭L^*．因为对$u, v\in\mathscr{H}=W_0^{1,2}(\Omega)$有$\mathfrak{L}^*(u, v)=\mathfrak{L}(v, u)$，故推知$L^*$也是$L$在Hilbert空间$\mathscr{H}$中的共轭算子．在上面的论证中用$L_\sigma$代替$L$，我们看到方程$L_\sigma u=F$将等价于方程$u+(\sigma_0-\sigma)L_{\sigma_0}^{-1}Iu=L_{\sigma_0}^{-1}F$，而紧映射$T_\sigma=(\sigma_0-\sigma)L_{\sigma_0}^{-1}I$的共轭$T_\sigma^*$由$T_\sigma^*=(\sigma_0-\sigma)(L_{\sigma_0}^*)^{-1}I$给出．于是可以应用定理5.11得到下述结果．

定理 8.6 设算子L满足条件(8.5)和(8.6)．那么存在一个可数离散集合$\Sigma\subset\mathbb{R}$，使得若$\sigma\notin\Sigma$，Dirichlet问题：$L_\sigma u$，$L_\sigma^*u=g$

$+D_i f^i$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 对任意的 g, $f^i\in L^2(\Omega)$ 和 $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$ 就是唯一可解的. 若 $\sigma\in\Sigma$, 则齐次问题 $L_\sigma u$, $L_\sigma^* u=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$ 的解的子空间是正有限维的, 并且问题 $L_\sigma u=g+D_i f^i$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 可解当且仅当

$$(8.15)\qquad \int_\Omega \{(g-c^iD_i\varphi-d\varphi+\sigma\varphi)v-(f^i-a^{ij}D_j\varphi-b^i\varphi)D_iv\}dx=0$$

对所有满足 $L_\sigma^* v=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $v=0$ 的 v 成立. 而且如果条件 (8.8) 成立, 则 $\Sigma\subset(-\infty, 0)$.

对 $\sigma\notin\Sigma$, 由 $G_\sigma=L_\sigma^{-1}$ 给出的算子 G_σ: $\mathscr{H}^*\to\mathscr{H}$ 称为 L_σ 的 Dirichlet 问题的 Green 算子. 由定理 5.3 知 G_σ 是 $\mathscr{H}^*$ 上的有界线性算子. 从而有下面的先验估计.

推论 8.7 设 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 满足 $L_\sigma u=g+D_i f^i$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 其中 $\sigma\notin\Sigma$. 则存在一个仅依赖于 L, σ 和 Ω 的常数 C, 使得

$$(8.16)\qquad \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leqslant C(\|\mathbf{g}\|_2+\|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

从定理 8.6 推出, 若在条件 (8.8) 中用 $-c^i$ 代替 b^i, 则定理 8.3 保持有效.

8.3. 弱解的可微性

这一章的剩下部分大都致力于正则性的研究. 在这一节中我们将研究方程 (8.3) 的弱解的高阶弱导数的存在性. 借助于下面导出的可微性结果, 我们将从定理 8.3 推出古典 Dirichlet 问题的存在定理. 在后面几节我们将讨论弱解的逐点性质, 诸如强极大值原理和 Hölder 连续性. 我们的第一个正则性结果给出了方程 $Lu=f$ 的弱解二次弱可微的条件.

定理 8.8 设 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $Lu=f$ 在 Ω 中的弱解, 其中 L 在 Ω 中是严格椭圆的, 系数 a^{ij}, b^i, i, $j=1, \cdots, n$ 在 Ω 中一致 Lipschitz 连续, 系数 c^i, d, $i=1, \cdots, n$ 在 Ω 中本质有界, 而 $f\in L^2(\Omega)$. 则对任何子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 我们有 $u\in W^{2,2}(\Omega')$, 以及

$$(8.17)\qquad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega')}\leqslant C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}),$$

其中 $C=C(n, \lambda, K, d')$, λ 由 (8.5) 给出,

$$K=\max\{\|a^{ij},\ b^i\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})},\ \|c^i,\ d\|_{L^\infty(\Omega)}\},$$
$$d'=\operatorname{dist}(\Omega',\ \partial\Omega).$$

并且 u 在 Ω 中几乎处处满足方程

(8.18) $$Lu=a^{ij}D_{ij}u+(D_ja^{ji}+b^i+c^i)D_iu+(D_ib^i+d)u=f.$$

证明　从积分恒等式(8.4)我们有

(8.19) $$\int_\Omega a^{ij}D_juD_iv\,dx=\int_\Omega gv\,dx,\quad \forall v\in C_0^1(\Omega),$$

其中 $g\in L^2(\Omega)$ 由下式给出:

(8.20) $$g=(b^i+c^i)D_iu+(D_ib^i+d)u-f.$$

对于 $|2h|<\operatorname{dist}(\operatorname{supp}v,\ \partial\Omega)$, 对某个 k, $1\leqslant k\leqslant n$, 我们用 v 的差商 $\Delta^{-h}v=\Delta_k^{-h}v$ 代替 v, 于是得到

$$\int_\Omega\Delta^h(a^{ij}D_ju)D_iv\,dx=-\int_\Omega a^{ij}D_juD_i\Delta^{-h}v\,dx$$
$$=-\int_\Omega g\Delta^{-h}v\,dx.$$

因为 $\Delta^h(a^{ij}D_ju)(x)=a^{ij}(x+he_k)\Delta^hD_ju(x)+\Delta^ha^{ij}(x)D_ju(x)$, 于是有

$$\int_\Omega a^{ij}(x+he_k)D_j\Delta^huD_iv\,dx=-\int_\Omega(\bar{\mathbf{g}}\cdot Dv+g\Delta^{-h}v)\,dx,$$

其中 $\bar{\mathbf{g}}=(\bar{g}^1,\ \cdots,\ \bar{g}^n)$ 而 $\bar{g}^i=\Delta^ha^{ij}D_ju$. 用(8.20)和引理 7.23, 可得估计

$$\int_\Omega a^{ij}(x+he_k)D_j\Delta^huD_iv\,dx\leqslant(\|\bar{\mathbf{g}}\|_2+\|g\|_2)\|Dv\|_2$$
$$\leqslant(C(n)K\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_2)\|Dv\|_2.$$

为继续进行, 取一个函数 $\eta\in C_0^1(\Omega)$, 满足 $0\leqslant\eta\leqslant1$, 并且令 $v=\eta^2\Delta^hu$. 于是, 用(8.5)和 Schwarz 不等式, 得到

$$\lambda\int_\Omega|\eta D\Delta^hu|^2dx\leqslant\int_\Omega\eta^2a^{ij}(x+he_k)\Delta^hD_iu\Delta^hD_ju\,dx$$
$$=\int_\Omega a^{ij}(x+he_k)D_j\Delta^hu(D_iv-2\Delta^hu\eta D_i\eta)\,dx$$
$$\leqslant(C(n)K\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_2)$$
$$\times(\|\eta D\Delta^hu\|_2+2\|\Delta^huD\eta\|_2)$$
$$+C(n)K\|\eta D\Delta^hu\|_2\|\Delta^huD\eta\|_2.$$

于是(借助于 Young 不等式(7.6))利用引理 7.23 推出

$$\|\eta\Delta^h Du\|_2 \leqslant C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_2+\|\Delta^h uD\eta\|_2)$$
$$\leqslant C(1+\sup_\Omega|D\eta|)(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_2),$$

其中 $C=C(n,\lambda,K)$. 现在函数 η 可选为截断函数使得在 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 上 $\eta=1$ 而 $|D\eta|<2/d'$, 其中 $d'=\text{dist}(\partial\Omega, \Omega')$. 由引理 7.24, 对任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 得到 $Du\in W^{1,2}(\Omega')$, 于是 $u\in W^2(\Omega)$ 并且估计式 (8.17) 成立. 最后, 我们有 $Lu\in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ 而且显然积分等式 (8.4) 蕴涵着在 Ω 中几乎处处有 $Lu=f$. ▌

我们在此指出, 在估计式(8.17)中, 量 $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ 可以用 $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ 代替(见习题 8.2).

对形如

$$(8.21)\qquad Lu\equiv a^{ij}(x)D_{ij}u+b^i(x)D_iu+c(x)u=f$$

的椭圆型方程的 Dirichlet 问题, 下述一般的存在性结果现在可以从定理 8.3 和 8.8 推出.

定理 8.9 设算子 L 在 Ω 中是严格椭圆的, 并且系数 $a^{ij}\in C^{0,1}(\overline{\Omega}), b^i, c\in L^\infty(\Omega), c\leqslant 0$. 则对任意 $f\in L^2(\Omega)$ 和 $\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$, 存在一个唯一的函数 $u\in W^{1,2}(\Omega)\cap W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Lu=f$ 且 $u-\varphi\in W^{1,2}_0(\Omega)$.

如果我们只假定主系数 a^{ij} 属于 $C^0(\overline{\Omega})$, 定理 8.9 对充分光滑的 $\partial\Omega$ 仍然成立 [CI5]. 但若假设条件进一步被减弱到允许不连续的 $a^{ij}\in L^\infty(\Omega)$, 那么唯一性的结论将被破坏, 这可用下列方程说明:

$$(8.22)\qquad \Delta u+b\frac{x_ix_j}{|x|^2}D_{ij}u=0,\quad b=-1+\frac{n-1}{1-\lambda},\ 0<\lambda<1,$$

对于 $n>2(2-\lambda)>2$, 这方程有两个解 $u_1(x)=1$, $u_2(x)=|x|^\lambda\in W^{2,2}(B)$, 它们在 ∂B 上相等, 其中 B 是单位球 $B_1(0)$.

弱解的进一步可微性容易从定理 8.8 的证明中推出. 因为, 假如我们加强系数的光滑性条件, 设 $a^{ij}, b^i\in C^{1,1}(\overline{\Omega}), c^i, d\in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, 以及 $f\in W^{1,2}(\Omega)$. 那么在等式(8.19)中, 对某个 k, $1\leqslant k\leqslant n$, 用 D_kv 代替 v, 进行分部积分, 便得到

(8.23) $$\int_\Omega a^{ij}D_{jk}uD_iv\,dx=\int_\Omega D_k\hat{g}v\,dx \quad \forall v\in C_0^1(\Omega),$$

并因为 $u\in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$，故有 $D_k\hat{g}\in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. 因此 $D_ku\in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$. 用简单的归纳证法，能得到下面的定理 8.8 的推广.

定理 8.10 设 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $Lu=f$ 在 Ω 中的弱解，其中 L 在 Ω 中是严格椭圆的，系数 a^{ij}, $b^i\in C^{k,1}(\overline{\Omega})$，系数 c^i, $d\in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$，函数 $f\in W^{k,2}(\Omega)$，$k\geqslant 1$. 则对任何子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$，我们有 $u\in W^{k+2,2}(\Omega')$ 及

(8.24) $$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')}\leqslant C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}),$$

其中 $C=C(n,\ \lambda,\ K,\ d',\ k)$,

$$K=\max\{\|a^{ij},\ b^i\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})},\ \|c^i,\ d\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}\}.$$

利用 Sobolev 嵌入定理（推论 7.11），现在我们从定理 8.10 得到

推论 8.11 设 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 是严格椭圆型方程 $Lu=f$ 在 Ω 中的弱解，假设函数 a^{ij}, b^i, c^i, d, f 属于 $C^\infty(\Omega)$. 那么也有 $u\in C^\infty(\Omega)$.

8.4. 全局正则性

在关于边界 $\partial\Omega$ 的适当光滑性条件下，前面的内部正则性结果可以扩充到整个 Ω 上. 我们首先导出类似于定理 8.8 的全局性定理.

定理 8.12 除定理 8.8 的假设条件外，我们再假设：$\partial\Omega$ 是 C^2 类的，并设存在一个函数 $\varphi\in W^{2,2}(\Omega)$ 使得 $u-\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$. 那么也有 $u\in W^{2,2}(\Omega)$ 以及

(8.25) $$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}\leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)}),$$

其中 $C=C(u,\ \lambda,\ K,\ \partial\Omega)$.

证明 用 $u-\varphi$ 代替 u，我们看出，如果假定 $\varphi\equiv 0$，因而 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$，那并不失去一般性. 由引理 8.4 还能得到估计

(8.26) $$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leqslant C(\|u\|_2+\|f\|_2),$$

其中 $C=C(n,\ \lambda,\ K)$. 因为 $\partial\Omega\in C^2$，故对每点 $x_0\in\partial\Omega$，存在一

个球 $B=B(x_0)$ 和一个从 B 到开集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的一对一的映射 ψ，使得 $\psi(B\cap\Omega)\subset\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n>0\}$，$\psi(B\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbb{R}^n_+$ 并且 $\psi\in C^2(B)$，$\psi^{-1}\in C^2(D)$. 设 $B_R(x_0)\subset\subset B$，并令 $B^+=B_R(x_0)\cap\Omega$，$D'=\psi(B_R(x_0))$，$D^+=\psi(B^+)$. 在映射 ψ 下，B^+ 中的方程 $Lu=f$ 变换成 D^+ 中的同样形式的方程（见第 94 页）. 对变换后的方程，常数 λ，K 可以用映射 ψ 和原来方程的 λ，K 的值来估计. 而且，因为 $u\in W^{1,2}_0(\Omega)$，故变换后的解 $v=u\circ\psi^{-1}\in W^{1,2}(D^+)$ 并且对所有的 $\eta\in C^1_0(D')$ 满足 $\eta v\in W^{1,2}_0(D^+)$. 因此现在不妨假定 $u\in W^{1,2}(D^+)$ 在 D^+ 中满足 $Lu=f$，并且对任何 $\eta\in C^1_0(D')$，有 $\eta u\in W^{1,2}_0(D^+)$. 于是，对 $|h|<\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\eta,\ \partial D')$ 和 $1\leqslant k\leqslant n-1$，我们有 $\eta^2\Delta^h_k u\in W^{1,2}_0(D^+)$. 从而定理 8.8 的证明适用，并且可以断定只要 i 或 $j\neq n$，则对任何 $\rho<R$ 有 $D_{ij}u\in L^2(\psi(B_\rho\cap\Omega))$. 剩下的二阶导数 $D_{nn}u$ 可以由方程 (8.18) 直接估计. 因此通过映射 $\psi^{-1}\in C^2$ 回到原来的区域 Ω，我们就得到 $u\in W^{2,2}(B_\rho\cap\Omega)$. 因为 x_0 是 $\partial\Omega$ 的任意点并由定理 8.8 知 $u\in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$，故能推断 $u\in W^{2,2}(\Omega)$. 最后，选择有限个点 $x^{(i)}\in\partial\Omega$，使得球 $B_\rho(x^{(i)})$ 覆盖 $\partial\Omega$，我们从 (8.17) 和 (8.26) 得到估计式 (8.25). ∎

假如 $1\leqslant k\leqslant n-1$，注意条件 $u\in W^{2,2}(D^+)$，$\eta u\in W^{1,2}_0(D^+)$，$\eta\in C^1_0(D^+)$ 也蕴涵着 $\eta D_k u\in W^{1,2}_0(D^+)$. 即，由引理 7.23 我们有 $\eta\Delta^h_k u\in W^{1,2}_0(D^+)$，并且对充分小的 h，

$$\|\eta\Delta^h_k u\|_{W^{1,2}(D^+)}\leqslant\|\eta\|_{C^1(D^+)}\|u\|_{W^{2,2}(D^+)}.$$

根据定理 5.12，存在一个序列 $\{\eta\Delta^h_k u\}$ 在 Hilbert 空间 $W^{1,2}_0(D^+)$ 中弱收敛. 显然，这个序列的极限是函数 $\eta D_k u$. 于是方程 $Lu=f$ 的解的进一步全局正则性可以用从定理 8.8 得到定理 8.10 的同样方法推出. 因此有定理 8.10 和定理 8.11 的以下推广：

定理 8.13 除定理 8.9 的假设条件之外我们再假设 $\partial\Omega\in C^{k+2}$，并且存在一个函数 $\varphi\in W^{k+2,2}(\Omega)$ 使得 $u-\varphi\in W^{1,2}_0(\Omega)$. 那么，我们也有 $u\in W^{k+2,2}(\Omega)$ 以及

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}\leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}),\tag{8.27}$$

其中 $C=C(n,\ \lambda,\ K,\ k,\ \partial\Omega)$. 若函数 a^{ij}，b^i，c^i，d，f 和 φ 属于

$C^\infty(\bar{\Omega})$，且 $\partial\Omega$ 是 C^∞ 类的，则解 u 也属于 $C^\infty(\bar{\Omega})$.

将定理 8.3 和 8.13 结合起来，就得到方程 (8.21) 的古典 Dirichlet 问题的一个存在定理，它在前面第 6 章中已得到过（见定理 6.14 和 6.19）.

定理 8.14 设算子 L（由 (8.21) 给出）在 Ω 中是严格椭圆的，并且有 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 系数，在 Ω 中 $c\leqslant 0$. 那么，如果 $\partial\Omega\in C^\infty$，则 Dirichlet 问题 $Lu=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 对于任意的 f，$\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 必存在唯一解 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})$.

第 6 章的存在定理现在可以从定理 8.14 通过逼近方法得到. 当然，我们仍然需要第 6 章的先验估计以保证逼近解的收敛性.

8.5. 弱解的全局有界性

在这里我们要导出说明方程 (8.3) 的在 $\partial\Omega$ 上有界的 $W^{1,2}(\Omega)$ 解的全局有界性结果. 所用的检验函数技巧的一个有趣的特征是：与其说它们依赖于算子 L 的线性性质，还不如说它们依赖于 L 所满足的一个非线性结构. 为了说得更清楚，我们把 (8.3) 写成如下形式：

$$D_iA^i(x,\ u,\ Du)+B(x,\ u,\ Du)=0, \tag{8.28}$$

其中，对于 $(x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} A^i(x,\ z,\ p)&=a^{ij}(x)p_j+b^i(x)z-f^i(x), \\ B(x,\ z,\ p)&=c^i(x)p_i+d(x)z-g(x). \end{aligned} \tag{8.29}$$

如果一个弱可微函数 u 使得函数 $A^i(x,\ u,\ Du)$ 和 $B(x,\ u,\ Du)$ 局部可积且对所有的 $v\geqslant 0$，$\in C_0^1(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega (D_ivA^i(x,\ u,\ Du)-vB(x,\ u,\ Du))\,dx\leqslant(\geqslant,\ =)0, \tag{8.30}$$

则称 u 为方程 (8.28) 在 Ω 中的弱下解（上解，解）.

记 $\mathbf{b}=(b^1,\ \cdots,\ b^n)$，$\mathbf{c}=(c^1,\ \cdots,\ c^n)$，$\mathbf{f}=(f^1,\ \cdots,\ f^n)$，并利用条件 (8.5) 和 Schwarz 不等式，我们有估计

$$\begin{aligned} p_iA^i(x,\ z,\ p)&\geqslant\frac{\lambda}{2}|p|^2-\frac{1}{2\lambda}(|\mathbf{b}z|^2+|\mathbf{f}|^2), \\ |B(x,\ z,\ p)|&\leqslant|\mathbf{c}||p|+|dz|+|g|. \end{aligned} \tag{8.31}$$

因此就说方程(8.3)满足结构不等式(8.31). 为了我们下面的目的，我们甚至可以简化这些不等式的形式. 对某个 k, 令

$$(8.32)\qquad \begin{aligned}\bar{z}&=|z|+k,\\ \bar{b}&=\lambda^{-2}(|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+k^{-2}|\mathbf{f}|^2)+\lambda^{-1}(|d|+k^{-1}|g|),\end{aligned}$$

于是,对任意 $0<\varepsilon<1$, 有

$$(8.33)\qquad \begin{aligned}p_iA^i(x,z,p)&\geqslant\frac{\lambda}{2}(|p|^2-\bar{b}\bar{z}^2),\\ |\bar{z}B(x,z,p)|&\leqslant\frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon|p|^2+\frac{\bar{b}}{\varepsilon}\bar{z}^2\right).\end{aligned}$$

我们现在证明:

定理 8.15 设算子 L 满足条件(8.5), (8.6), 并且假定对某个 $q>n$, 有 $f^i\in L^q(\Omega)$, $i=1,\cdots,n$, $g\in L^{q/2}(\Omega)$. 那么，如果 u 是方程 (8.3) 在 Ω 中的一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 下解 (上解), 在 $\partial\Omega$ 上满足 $u\leqslant0(\geqslant0)$, 我们就有

$$(8.34)\qquad \sup_\Omega u\leqslant C(\|u^+\|_2+k)\ (\sup_\Omega(-u)\leqslant C(\|u^-\|_2+k)),$$

其中 $k=\lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_q+\|g\|_{q/2})$, $C=C(n,\nu,q,|\Omega|)$.

证明 假定 u 是 (8.3) 的一个下解. 对 $\beta\geqslant1$ 和 $N>k$, 我们这样定义一个函数 $H\in C^1(k,\infty)$: 对 $z\in[k,N]$, 令 $H(z)=z^\beta-k^\beta$, 对 $z\geqslant N$ 取 H 为线性函数. 然后令 $w=\bar{u}^+=u^++k$, 并在积分不等式(8.30)中取

$$(8.35)\qquad v=G(w)=\int_k^w|H'(s)|^2ds.$$

由链式法则(定理 7.8) 知 v 在 (8.30) 中是一个合法的检验函数，将它代入(8.30)并利用结构不等式(8.33), 便有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|Dw|^2G'(w)dx&\leqslant\int_\Omega\left(\bar{b}G'(w)w^2+\frac{2}{\lambda}G(w)|B(x,u,Du)|\right)dx\\ &\leqslant\varepsilon\int_\Omega G'(w)|Dw|^2dx\\ &\qquad+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega\bar{b}G'(w)w^2dx,\end{aligned}$$

因为 $G(s)\leqslant sG'(s)$ 并且当 $v=G(w)>0$ 时 $Du=Dw$. 所以，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$,

就得到

$$\int_\Omega G'(w)\,|Dw|^2\,dx\leqslant 6\int_\Omega \bar{b}G'(w)\,w^2\,dx,$$

由(8.35)，此即

$$\int_\Omega |DH(w)|^2\,dx\leqslant 6\int_\Omega \bar{b}\,|H'(w)w|^2\,dx.$$

因为 $H(w)\in W_0^{1,2}(\Omega)$，故可用 Sobolev 不等式 (7.26) 和 Hölder 不等式来得到

$$\|H(w)\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)}\leqslant C\left(\int_\Omega \bar{b}\,(H'(w)\,w)^2dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C\|\bar{b}\|_{q/2}^{1/2}\|H'(w)\,w\|_{2q/(q-2)},$$

其中对 $n>2$，$\hat{n}=n$，$2<\hat{2}<q$，而对 $n>2$，$C=C(n)$，对 $n=2$，$C=C(\hat{2},\ |\Omega|)$．显然，假如在 (8.32) 中包含 f 和 g 的项为 0，那么结构不等式和上面的估计对 $k=0$ 仍然成立．照定理叙述中那样选 k，便得到

(8.36) $$\|H(w)\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)}\leqslant C\|wH'(w)\|_{2q/(q-2)},$$

其中 $C=C(n,\ \nu,\ |\Omega|)$．为继续进行，我们回忆 H 的定义并且在估计式 (8.36) 中令 $N\to\infty$，于是得出，对任何 $\beta\geqslant 1$，包含关系 $w\in L^{2\beta q/(q-2)}(\Omega)$ 蕴涵更强的包含关系 $w\in L^{2\beta\hat{n}/(\hat{n}-2)}(\Omega)$，而且令 $q^*=2q/(q-2)$，$\chi=\hat{n}(q-2)/q(\hat{n}-2)>1$，就得到

(8.37) $$\|w\|_{\beta\chi q^*}\leqslant (C\beta)^{1/\beta}\|w\|_{\beta q^*}.$$

于是反复使用估计式(8.37)就得到所要结果．即通过归纳法，我们可以假定 $w\in\bigcap_{1<p<\infty}L^p(\Omega)$．取 $\beta=\chi^m$，$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，于是由 (8.37)，有

$$\|w\|_{\chi^N q^*}\leqslant \prod_0^{N-1}(C\chi^m)^{\chi^{-m}}\|w\|_{q^*}$$
$$\leqslant C^\sigma\chi^\tau\|w\|_{q^*},\quad \sigma=\sum_0^{N-1}\chi^{-m},\quad \tau=\sum_0^{N-1}m\chi^{-m}.$$
$$\leqslant C\|w\|_{q^*},$$

其中 $C=C(n,\ \nu,\ q,\ |\Omega|)$．令 $N\to\infty$，我们得

$$\sup_\Omega w\leqslant C\|w\|_{q^*},$$

因而由内插不等式(7.10)我们有

$$\sup_{\Omega} w \leqslant C\|w\|_2.$$

由 $w=u^{+}+k$ 的定义即推出所要的估计(8.34). 对于上解的结果,用 $-u$ 代替 u 即得. ∎

上面的 L^p 范数的迭代技巧是由 Moser 引进的 [MJ1]. 定理 8.15 的证明也可通过选其他检验函数来实现(见 [LU4] 或 [ST4]).

现在我们假设在定理 8.15 的叙述中, 将在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant 0$ 的假设推广为: 在 $\partial\Omega$ 上, 对某个常数 l, $u\leqslant l$. 于是因为 $L(u-l)=Lu-Ll=Lu-l(D_ib^i+d)$, 用 $\bar{k}=k+\lambda^{-1}|l|(\|\mathbf{b}\|_q+\|d\|_{q/2})$ 代替 k, 定理的结论将对函数 $u-l$ 成立. 亦即, (8.3)的下解 (上解) u 将满足估计

$$\sup_{\Omega} u \leqslant C(\|u\|_2+\bar{k}+|l|)\ \left(\sup_{\Omega}(-u)\leqslant C(\|u\|_2+\bar{k}+|l|)\right), \tag{8.38}$$

和前面一样, 其中 $k=\lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_q+\|g\|_{q/2})$, $C=C(n, \nu, q, |\Omega|)$. 特别, 若 u 是解, 则(8.38)对 $|u|$ 成立.

下面我们打算为 $\sup_{\Omega} u$ 导出一个不依赖于 $\|u\|_2$ 的估计, 亦即一个推广了弱极大值原理(定理 8.1)的先验的界. 假如 L 是一对一的, 从估计式(8.16)知, 对 (8.3) 的解, $\|u\|_2$ 可以有不依赖于 u 的界. 例如, 若(8.8)成立, 则情形就是这样. 通过弱极大值原理和存在定理 (定理 8.3), 这个界可以推广到下解. 因为, 如果 u 是 (8.3)的一个下解且(8.8)成立, 那么可以定义一个函数 v, 它是广义 Dirichlet 问题 $Lv=g+D_if^i$, 在 $\partial\Omega$ 上 $v=u$ 的解. 由定理 8.1 知在 Ω 中 $u\leqslant v$, 且因此 $\|u^{+}\|_2\leqslant\|v\|_2$. 因而对(8.3)的下解 u 有估计

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^{+}+Ck,$$

其中 C 是一个不依赖于 u 的常数. 可是, 我们现在证明这个结果可以从非线性结构不等式 (8.31) 导出而不必用线性存在性理论, 而且常数 C 由估计式(8.34)中同样的那些量所确定.

定理 8.16 设算子 L 满足条件 (8.5)、(8.6) 和 (8.8), 并且

假定对于某个 $q>n$, $f^i\in L^q(\Omega)$, $i=1, \cdots, n$, $g\in L^{q/2}(\Omega)$. 那么，如果 u 是方程(8.3)的一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 下解(上解)，就有

(8.39) $$\sup_\Omega u\leqslant\sup_{\partial\Omega}u^+ + Ck\ (\sup_\Omega(-u)\leqslant\sup_{\partial\Omega}u^- + Ck),$$

其中 $k=\lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_q+\|g\|_{q/2})$ 而 $C=C(n, \nu, q, |\Omega|)$.

证明 设 u 是(8.3)的一个下解. 由假设(8.8), $l=\sup\limits_{\partial\Omega}u^+$ 是一个上解, 因此不失一般性可以假定 $l\equiv 0$. 象在定理 8.1 的证明中那样进行，对 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中所有满足 $uv\leqslant 0$ 的非负的 v, 就有

(8.40) $$\int_\Omega (a^{ij}D_juD_iv-(b^i+c^i)vD_iu)dx\leqslant\int_\Omega(f^iD_iv-gv)dx.$$

弱不等式(8.40)显然满足一个结构条件 (8.31), 在其中 $b^i=d=0$ 而 $\mathbf{c}$ 换成 $\mathbf{b}+\mathbf{c}$. 假定 $k>0$, 且令 $M=\sup\limits_\Omega u^+$. 然后在(8.40)中选检验函数

$$v=\frac{u^+}{M+k-u^+}\in W^{1,2}(\Omega),$$

利用(8.31)，得到

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{|Du^+|^2dx}{(M+k-u^+)^2}\leqslant\frac{1}{M+k}\int_\Omega\Big(\frac{|\mathbf{b}+\mathbf{c}|u^+|Du^+|}{(M+k-u^+)}$$
$$+\frac{u^+|g|}{(M+k-u^+)}+\frac{(M+k)|\mathbf{f}|^2}{2\lambda(M+k-u^+)^2}\Big)dx.$$

从而，根据 k 的定义，我们有

$$\int_\Omega\frac{|Du^+|^2dx}{(M+k-u^+)^2}\leqslant C+\frac{2}{\lambda}\int_\Omega\frac{|\mathbf{b}+\mathbf{c}||Du^+|}{(M+k-u^+)}\,dx,$$

其中 $C=C(|\Omega|)$. 现在定义

$$w=\log\frac{M+k}{M+k-u^+},$$

于是由 Schwarz 不等式得到

$$\int_\Omega|Dw|^2dx\leqslant C\Big(1+\lambda^{-2}\int_\Omega|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2dx\Big)$$
$$\leqslant C(\nu, |\Omega|),$$

因此，由 Sobolev 不等式(7.26),

(8.41) $$\|w\|_2\leqslant C(n, \nu, |\Omega|).$$

只要说明 w 也是形如 (8.3) 的方程的下解，定理即得证. 设 $\eta\in C_0^1(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $\eta\geqslant 0$, $\eta u\geqslant 0$, 我们在 (8.40) 中代入检验函数

$$v=\frac{\eta}{(M+k-u^+)},$$

于是得到

$$\int_\Omega (a^{ij}D_jwD_i\eta+\eta a^{ij}D_iwD_jw-(b^i+c^i)\eta D_iw)dx$$
$$\leqslant\int_\Omega\Big(\frac{-\eta g}{(M+k-u^+)}+\frac{(D_i\eta+\eta D_iw)f^i}{(M+k-u^+)}\Big)dx.$$

因此

$$\int_\Omega (a^{ij}D_jwD_i\eta-(b^i+c^i)\eta D_iw)\,dx+\lambda\int_\Omega\eta|Dw|^2dx$$
$$\leqslant\int_\Omega\Big\{\Big(\frac{|g|}{k}+\frac{|\mathbf{f}|^2}{2\lambda k^2}\Big)\eta+\frac{f^iD_i\eta}{(M+k-u^+)}\Big\}dx$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\eta|Dw|^2\,dx,$$

从而有

$$\int_\Omega (a^{ij}D_jwD_i\eta-(b^i+c^i)\eta D_iw)\,dx\leqslant\int_\Omega(\hat{g}\eta+\hat{f}^iD_i\eta)\,dx, \tag{8.42}$$

其中 $\hat{g}=|g|/k+|\mathbf{f}|^2/2\lambda k^2$, $\hat{f}^i=f^i/(M+k-u^+)$, 而且显然 $\|\hat{g}\|_{q/2}\leqslant 2\lambda$, $\|\hat{f}\|_q\leqslant\lambda$. 所以可应用定理 8.15 而得到

$$\sup_\Omega w\leqslant C(1+\|w\|_2),\quad C=C(n,\ \nu,\ q,\ |\Omega|)$$
$$\leqslant C, \text{由}(8.41).$$

因此, $(M+k)/k\leqslant C$, 从这里推出所要的估计 (8.39). 对上解的结果, 用 $-u$ 代替 u 即得. ∎

定理 8.16 可以看成古典先验估计(定理 3.7)的广义形式. 我们注意, 若在条件(8.8)中, 用 $-c^i$ 替换 b^i, 结果仍然有效(见定理 9.7). 而且, 从上面的证明显然看出, 系数 b^i, c^i 和 d 的有界性可以用条件 $\bar{b}\in L^{q/2}(\Omega)$, $q>n$ 来代替.

8.6. 弱解的局部性质

现在我们把注意力从全局行为转到局部行为. 我们给(8.31)和(8.33)加上一个附加的结构不等式, 即

(8.43) $$|\mathbf{A}(x, z, p)| \leqslant |\mathbf{a}||p| + |\mathbf{b}z| + |\mathbf{f}|,$$

其中 $\mathbf{a}(x)$ 表示矩阵 $[a^{ij}(x)]$, $x \in \Omega$. 用常数 $\lambda/2$ 去除方程 (8.3), 就能假定在结构不等式中 $\lambda=2$. 在这假定下把这些不等式集中起来, 因而对任何 $0<\varepsilon<1$, 有

(8.44) $$\begin{aligned} &|\mathbf{A}(x, z, p)| \leqslant |\mathbf{a}||p| + 2(\bar{b})^{1/2}\bar{z}, \\ &p \cdot \mathbf{A}(x, z, p) \geqslant |p|^2 - \bar{b}\bar{z}^2, \\ &|\bar{z}B(x, z, p)| \leqslant \varepsilon |p|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\bar{b}\bar{z}^2, \end{aligned}$$

其中 $\bar{z}$ 和 $\bar{b}$ 是由 $\lambda=2$ 时的(8.32)定义的. 为了局部结果的推导, 我们定义量 k:

(8.45) $$k = k(R) = \lambda^{-1}(R^{\delta}\|\mathbf{f}\|_q + R^{2\delta}\|g\|_{q/2}),$$

其中 $R>0$, $\delta=1-n/q$. 我们将建立一个与定理 8.15 类似的局部性定理, 即

定理 8.17 设算子 L 满足条件 (8.5), (8.6), 并设对某个 $q>n$, $f^i \in L^q(\Omega)$, $i=1, \cdots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$. 那么, 如果 u 是方程 (8.3) 在 Ω 中的一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 下解 (上解), 对任何球 $B_{2R}(y) \subset \Omega$ 和 $p>1$, 便有

(8.46) $$\begin{aligned} &\sup_{B_R(y)} u \leqslant C(R^{-n/p}\|u^+\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R)) \\ &(\sup_{B_R(y)}(-u) \leqslant C(R^{-n/p}\|u^-\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R))), \end{aligned}$$

其中 $C=C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

在我们的弱解的局部性质的推导中以及其后的非线性理论的推导中, 决定性的结果是以下关于上解的弱 Harnack 不等式.

定理 8.18 设算子 L 满足条件(8.5)、(8.6), 并假定对某个 $q>n$, $f^i \in L^q(\Omega)$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$. 那么, 如果 u 是方程(8.3)在 Ω 中的一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 上解, 它在一个球 $B_{4R}(y) \subset \Omega$ 中非负, 并且 $1 \leqslant p < n/(n-2)$, 则

(8.47) $$R^{-n/p}\|u\|_{L^p(B_{2R}(y))}\leqslant C(\inf_{B_R(y)} u+k(R)),$$
其中 $C=C(n,\ \Lambda/\lambda,\ \nu R,\ q,\ p)$.

以后我们对任何 R, 将简写 $B_R(y)=B_R$, 而将中心 y 省略. 对于定理 8.17 中 u 是一个有界、非负下解的情形, 联合证明定理 8.17 和定理 8.18 是很方便的. 然后定理 8.17 的完全的结果可以通过改变所用的检验函数来得到. 这个想法的本质已在定理 8.15 的证明中说明. 因此留给读者的是去做下文中我们的证明的必要的推广. 概括地说, 联合证明的方案是前节介绍的 Moser 的迭代法和 John-Nirenberg 的结果 (定理 7.21) 相结合的产物. John-Nirenberg 的结果是用来弥补迭代方案中一个重要缺陷的. 检验函数还是用幂函数来构造, 但为了建立定理 8.18, 这些幂的指数必须为不受限制的实数. 现给出粗略证明.

一开始我们假定 $R=1$ 且 $k>0$. 以后一般的情形可通过一个简单的坐标变换: $x\to x/R$, 并让 k 趋于 0 而得到. 对 $\beta\neq 0$ 和非负的 $\eta\in C_0^1(B_4)$, 我们定义检验函数

(8.48) $$v=\eta^2\bar{u}^\beta \quad (\bar{u}=u+k).$$

由链式法则和乘积法则, v 在(8.30)中是一个合法的检验函数, 并且还有

(8.49) $$Dv=2\eta D\eta\bar{u}^\beta+\beta\eta^2\bar{u}^{\beta-1}Du,$$

于是代入(8.30)就得到

(8.50) $$\begin{aligned}&\beta\int_\Omega \eta^2\bar{u}^{\beta-1}Du\cdot\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)\,dx\\ &+2\int_\Omega \eta D\eta\cdot\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)\bar{u}^\beta dx\\ &-\int_\Omega \eta^2\bar{u}^\beta B(x,\ u,\ Du)\,dx\\ &\qquad\leqslant 0 \text{ 若 } u \text{ 是一个下解},\\ &\qquad\geqslant 0 \text{ 若 } u \text{ 是一个上解}.\end{aligned}$$

用结构不等式(8.44), 对任何 $0<\varepsilon\leqslant 1$, 我们能估计

$$\eta^2\bar{u}^{\beta-1}Du\cdot\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)\geqslant\eta^2\bar{u}^{\beta-1}|Du|^2-\bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1},$$

$$|\eta D\eta\cdot\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)\bar{u}^\beta|\leqslant|\mathbf{a}|\eta|D\eta|\bar{u}^\beta|Du|+2\bar{b}^{1/2}\eta|D\eta|\bar{u}^{\beta+1}$$

$$(8.51)\quad \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\eta^2\bar{u}^{\beta-1}|Du|^2+\left(1+\frac{|\mathbf{a}|^2}{2\varepsilon}\right)|D\eta|^2\bar{u}^{\beta+1}+\bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1},$$

$$|\eta^2\bar{u}^\beta B(x,u,Du)|\leqslant \varepsilon\eta^2\bar{u}^{\beta-1}|Du|^2+\frac{1}{\varepsilon}\bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1}.$$

以后我们假定，如果 u 是一个下解，则 $\beta>0$，如果 u 是一个上解，则 $\beta<0$. 选 $\varepsilon=\min\{1,|\beta|/4\}$，于是从(8.50)和(8.51)得到

$$|\beta|\int_\Omega \eta^2\bar{u}^{\beta-1}|Du|^2dx$$

$$\leqslant 10(1+|\beta|^{-1})\int_\Omega(\bar{b}\eta^2+(1+|\mathbf{a}|^2)|D\eta|^2)\bar{u}^{\beta+1}dx.$$

由此我们有

$$(8.52)\quad \int_\Omega \eta^2\bar{u}^{\beta-1}|Du|^2dx$$

$$\leqslant C(|\beta|)\int_\Omega(\bar{b}\eta^2+(1+|\mathbf{a}|^2)|D\eta|^2)\bar{u}^{\beta+1}dx,$$

其中，若 $|\beta|$ 有正下界，则 $C(|\beta|)=10(|\beta|^{-1}+|\beta|^{-2})$ 是有界的. 现在，引进如下定义的函数 w 是方便的:

$$w=\begin{cases}\bar{u}^{(\beta+1)/2}, & 若\ \beta\neq-1,\\ \log\bar{u}, & 若\ \beta=-1.\end{cases}$$

令 $\gamma=\beta+1$，我们可以改写(8.52)为

$$(8.53)\quad \int_\Omega|\eta Dw|^2dx\leqslant\begin{cases}C(|\beta|)\gamma^2\int_\Omega(\bar{b}\eta^2+(1+|\mathbf{a}|^2)|D\eta|^2)w^2dx,\\ \qquad\qquad 若\ \beta\neq-1,\\ C\int_\Omega(\bar{b}\eta^2+(1+|\mathbf{a}|^2)|D\eta|^2)dx,\\ \qquad\qquad 若\ \beta=-1.\end{cases}$$

由 (8.53) 的第一部分即可推导所要的迭代过程. 因为从 Sobolev 不等式(7.26)我们有

$$\|\eta w\|^2_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)}\leqslant C\int_\Omega(|\eta Dw|^2+|wD\eta|^2)dx,$$

其中 $\hat{n}=n$(对 $n>2$)，$2<\hat{2}<q$ 且 $C=C(\hat{n})$. 利用 Hölder 不等式(7.7)，通过内插不等式(7.10)，我们得到，对任何 $\varepsilon>0$，

$$\int_\Omega \bar{b}(\eta w)^2 dx \leqslant \|\bar{b}\|_{q/2}\|\eta w\|^2_{2q/(q-2)}$$
$$\leqslant \|\bar{b}\|_{q/2}(\varepsilon\|\eta w\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} + \varepsilon^{-\sigma}\|\eta w\|_2)^2,$$
其中 $\sigma=\hat{n}/(q-\hat{n})$. 因此, 代入(8.53)并适当选择 ε, 即得

(8.54) $\quad \|\eta w\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} \leqslant C|\gamma|(1+|\gamma|^\sigma)\|(\eta+|D\eta|)w\|_2,$

其中 $C=C(\hat{n}, \Lambda, \nu, q, |\beta|)$ 当 $|\beta|$ 有正下界时是有界的. 现在需要更精确地规定截断函数 η. 设 r_1, r_2 满足 $1\leqslant r_1<r_2\leqslant 3$, 并在 B_{r_1} 中令 $\eta\equiv 1$, 在 $\Omega-B_{r_2}$ 中令 $\eta\equiv 0$ 而 $|D\eta|\leqslant 2/(r_2-r_1)$. 记 $\chi=\hat{n}/(\hat{n}-2)$, 于是从(8.54)得

(8.55) $$\|w\|_{L^{2\chi}(B_{r_1})} \leqslant \frac{C|\gamma|(1+|\gamma|^\sigma)}{r_2-r_1}\|w\|_{L^2(B_{r_2})}.$$

对 $r<4$ 和 $p\neq 0$, 现在我们引进量

(8.56) $$\Phi(p, r)=\left(\int_{B_r}|\bar{u}|^p dx\right)^{1/p}.$$

由习题 7.1, 我们有
$$\Phi(\infty, r)=\lim_{p\to\infty}\Phi(p, r)=\sup_{B_r}\bar{u},$$
$$\Phi(-\infty, r)=\lim_{p\to-\infty}\Phi(p, r)=\inf_{B_r}\bar{u}.$$

从不等式(8.55), 现在我们得

(8–57) $$\Phi(\chi\gamma, r_1)\leqslant\left(\frac{C|\gamma|(1+|\gamma|^\sigma)}{r_2-r_1}\right)^{2/|\gamma|}\Phi(\gamma, r_2), \quad 若\ \gamma>0,$$
$$\Phi(\gamma, r_2)\leqslant\left(\frac{C|\gamma|(1+|\gamma|^\sigma)}{r_2-r_1}\right)^{2/|\gamma|}\Phi(\chi\gamma, r_1), \quad 若\ \gamma<0.$$

反复应用这些不等式即可得到所需要的估计. 例如, 当 u 是一个下解时我们有 $\beta>0$ 和 $\gamma>1$. 因此, 取 $p>1$, 令 $\gamma=\gamma_m=\chi^m p$ 和 $r_m=1+2^{-m}$, $m=0, 1, \cdots$. 于是, 由不等式(8.57),
$$\Phi(\chi^m p, 1)\leqslant(C\chi)^{2(1+\sigma)\Sigma m\chi^{-m}}\Phi(p, 2)$$
$$=C\Phi(p, 2), \quad C=C(\hat{n}, \Lambda, \nu, q, p).$$

从而, 令 $m\to\infty$, 我们有

(8.58) $$\sup_{B_1}\bar{u}\leqslant C\|\bar{u}\|_{L^p(B_2)},$$

而且, 用变换: $x\to x/R$, 估计式 (8.46) 就被证明了. 对于 u 是上

解的情形，即当 $\beta<0$ 且 $\gamma<1$ 时，我们可以用类似的方法证明，对任何满足 $0<p_0<p<\chi$ 的 p, p_0,

$$(8.59)\qquad \begin{aligned}&\Phi(p,\ 2)\leqslant C\Phi(p_0,\ 3),\\ &\Phi(-p_0,\ 3)\leqslant C\Phi(-\infty,\ 1),\quad C=C(\hat{n},\ \Lambda,\ q,\ p,\ p_0).\end{aligned}$$

如果我们能证明对某个 $p_0>0$ 有

$$(8.60)\qquad \Phi(p_0,\ 3)\leqslant C\Phi(-p_0,\ 3),$$

则定理 8.18 的结论就可推出.

为了建立(8.60)，我们借助估计(8.53)的第二式. 设 B_{2r} 是任一半径为 $2r$ 的球，它落在 $B_4(=B_4(y))$ 中，并选截断函数 η，使在 B_r 中 $\eta\equiv1$，在 $\Omega-B_4$ 中 $\eta\equiv0$，并且 $|D\eta|\leqslant2/r$. 从(8.53)，借助于 Hölder 不等式(7.7)，于是得到

$$(8.61)\qquad \begin{aligned}\int_{B_r}|Dw|\,dx&\leqslant Cr^{n/2}\left(\int_{B_r}|Dw|^2\,dx\right)^{1/2}\\ &\leqslant Cr^{n-1},\quad C=C(n,\ \Lambda,\ \nu).\end{aligned}$$

因此，由定理 **7.21**，存在一个依赖于 n, Λ 和 ν 的常数 $p_0>0$，使得对于

$$w_0=\frac{1}{|B_3|}\int_{B_3}w\,dx,$$

有

$$\int_{B_3}e^{p_0|w-w_0|}\,dx\leqslant C(n,\ \Lambda,\ \nu),$$

因而

$$\int_{B_3}e^{p_0w}\,dx\int_{B_3}e^{-p_0w}\,dx\leqslant Ce^{p_0w_0}e^{-p_0w_0}=C.$$

回忆 w 的定义，我们便得到估计 (8.60)，并且推出 $R=1$ 和 $k>0$ 时的定理 8.18，而完全的结果可通过变换：$x\mapsto x/R$ 并令 k 趋于 0 来得到. ∎

方程 $Lu=0$ 的下解的强极大值原理，$Lu=0$ 的解的 Harnack 不等式以及方程(8.3)的解的局部 Hölder 连续性全都可以作为弱 Harnack 不等式的推论导出，我们依次来讨论这些有趣的局部结果.

8.7. 强极大值原理

定理 8.19 设算子 L 满足条件 (8.5)，(8.6)和(8.8)，并设

$u\in W^{1,2}(\Omega)$在Ω中满足$Lu\geqslant 0$. 那么, 如果对某个球$B\subset\subset\Omega$有

$$\sup_B u=\sup_\Omega u\geqslant 0, \tag{8.62}$$

则函数u必在Ω中为常数, 并且当$u\not\equiv 0$时(8.8)中的等式成立.

证明 记$B=B_R(y)$, 不失一般性可以假定$B_{4R}(y)\subset\Omega$. 设$M=\sup\limits_\Omega u$并应用$p=1$时的弱 Harnack 不等式到上解$v=M-u$上. 这样我们得到

$$R^{-n}\int_{B_{2R}}(M-u)\,dx\leqslant C\inf_B(M-u)=0.$$

由此在B_{2R}中$u\equiv M$, 通过与定理2.2类似的论证, 即得在Ω中$u\equiv M$. ▮

定理8.19表明在适当的广义意义下, $Lu=0$的下解不能具有内部正极大值. 对连续的下解, 这个陈述化为通常的古典定理. 请注意, 用$-u$代替u立即得到$Lu=0$的上解的强极小值原理, 而$C^0(\Omega)$下解的弱极大值原理(定理8.1)则是一个直接推论.

8.8. Harnack 不等式

结合定理8.17和8.18, 我们得到完整的 Harnack 不等式.

定理8.20 设算子L满足条件(8.5)和(8.6), 并设$u\in W^{1,2}(\Omega)$满足在Ω中$u\geqslant 0$和在Ω中$Lu=0$. 则对任何球$B_{4R}(y)\subset\Omega$, 有

$$\sup_{B_R(y)} u\leqslant C\inf_{B_R(y)} u, \tag{8.63}$$

其中$C=C(n, \Lambda/\lambda, \nu R)$.

考察估计式(8.54)和(8.61)中常数C关于Λ的依赖性表明: (8.63)中的常数C能用下式估计:

$$C\leqslant C_0^{(\Lambda/\lambda+\nu R)},\quad C_0=C_0(n).$$

当矩阵$\mathbf{a}$对称时, 这个估计还可以进一步改进(见习题8.3). 通过类似于定理2.5的论证, 我们可以从定理8.20推出 Harnack 不等式的下述形式.

推论8.21 设L和u满足定理8.20的假设, 则对任何

$\Omega' \subset\subset \Omega$, 我们有

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega'} u, \tag{8.64}$$

其中 $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, \Omega', \Omega)$.

8.9. Hölder 连续性

下面的结果对二阶拟线性方程理论来说是基本的. 事实上, De Giorgi [DG1] 和 Nash [NA] 对于形如 $Lu = D_i(a^{ij}(x)D_ju)$ 的算子发现了这些结果就从本质上开辟了多于二个变量的拟线性方程的理论.

定理 8.22 设算子 L 满足条件 (8.5), (8.6), 并假定对某个 $q > n$, $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \cdots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$. 那么, 如果 u 是方程 (8.3) 在 Ω 中的一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 解, 便推出 u 在 Ω 中局部 Hölder 连续, 并且对任何球 $B_0 = B_{R_0}(y) \subset \Omega$ 和 $R \leqslant R_0$, 有

$$\operatorname*{osc}_{B_R(y)} u \leqslant CR^\alpha (R_0^{-\alpha} \operatorname*{osc}_{B_0} u + \bar{k}), \tag{8.65}$$

其中 $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, q, R_0)$, $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q)$ 都是正常数, 而 $\bar{k} = \lambda^{-1}\{\|\mathbf{f}\|_q + \|g\|_{q/2} + \sup_{B_0}|u|(\|\mathbf{b}\|_q + \|d\|_{q/2})\}$.

证明 不失一般性可假定 $R \leqslant R_0/4$. 记 $M_0 = \sup_{B_0}|u|$, $M_4 = \sup_{B_{4R}} u$, $m_4 = \inf_{B_{4R}} u$, $M_1 = \sup_{B_R} u$, $m_1 = \inf_{B_R} u$. 于是有

$$L(M_4 - u) = M_4(D_ib^i + d) - D_if^i - g,$$

$$L(u - m_4) = -m_4(D_ib^i + d) + D_if^i + g.$$

因此, 如果令

$$\bar{k}(R) = \lambda^{-1}R^\delta(\|\mathbf{f}\|_q + M_0\|\mathbf{b}\|_q) + \lambda^{-1}R^{2\delta}(\|g\|_{q/2} + M_0\|d\|_{q/2}),$$

$$\delta = 1 - n/q,$$

并在 B_{4R} 中应用 $p = 1$ 时的弱 Harnack 不等式 (8.47) 到函数 $M_4 - u$, $u - m_4$ 上, 就得到

$$R^{-n}\int_{B_{2R}} (M_4 - u)\,dx \leqslant C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)),$$

$$R^{-n}\int_{B_{2R}} (u - m_4)\,dx \leqslant C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)).$$

相加后得 $M_4-m_4\leqslant C(M_4-m_4+m_1-M_1+\bar{k}(R))$,

于是,记 $\omega(R)=\underset{B_R}{\operatorname{osc}}\, u=M_1-m_1$, 便有

$$\omega(R)\leqslant\gamma\omega(4R)+\bar{k}(R),$$

其中 $\gamma=1-C^{-1}$, $C=C(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q)$. 于是下面的简单引理蕴涵所要的结果. ▌

引理 8.23 设 ω 是区间 $(0, R_0]$ 上的一个非减函数,对所有的 $R\leqslant R_0$, 满足不等式

$$\omega(\tau R)\leqslant\gamma\omega(R)+\sigma(R), \tag{8.66}$$

其中 σ 也是非减的并且 $0<\gamma, \tau<1$. 那么,对任何 $\mu\in(0, 1)$ 和 $R\leqslant R_0$, 我们有

$$\omega(R)\leqslant C\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\omega(R_0)+\sigma(R^{\mu}R_0^{1-\mu})\right), \tag{8.67}$$

其中 $C=C(\gamma, \tau)$ 和 $\alpha=\alpha(\gamma, \tau, \mu)$ 都是正常数.

证明 一开始固定某个数 $R_1\leqslant R_0$. 因 σ 非减,故对任何 $R\leqslant R_1$, 有

$$\omega(\tau R)\leqslant\gamma\omega(R)+\sigma(R_1).$$

反复使用这个不等式便对任何正整数 m, 得到

$$\begin{aligned}\omega(\tau^m R_1)&\leqslant\gamma^m\omega(R_1)+\sigma(R_1)\sum_{i=0}^{m-1}\gamma^i\\&\leqslant\gamma^m\omega(R_0)+\frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma}.\end{aligned}$$

对任何 $R\leqslant R_1$, 可选 m 使得

$$\tau^m R_1<R\leqslant\tau^{m-1}R_1.$$

因此

$$\begin{aligned}\omega(R)&\leqslant\omega(\tau^{m-1}R_1)\\&\leqslant\gamma^{m-1}\omega(R_0)+\frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma}\\&\leqslant\frac{1}{\gamma}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\log\gamma/\log\tau}\omega(R_0)+\frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma}.\end{aligned}$$

现在令 $R_1=R_0^{1-\mu}R^{\mu}$, 于是,从上式有

$$\omega(R)\leqslant\frac{1}{\gamma}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{(1-\mu)(\log\gamma/\log\tau)}\omega(R_0)+\frac{\sigma(R_0^{1-\mu}R^{\mu})}{1-\gamma}. ▌$$

定理 8.22 可以通过取 μ 满足 $(1-\mu)\log\gamma/\log\tau<\mu\delta$ 而得到.

结合定理 8.17 和 8.22, 对方程 (8.3) 的弱解有以下的内部 Hölder 估计.

定理 8.24 设算子 L 满足条件(8.5)和 (8.6), 并假定对某个 $q>n$, $f^i\in L^q(\Omega)$, $i=1,\ \cdots,\ n$, $g\in L^{q/2}(\Omega)$. 那么, 如果 $u\in W^{1,2}(\Omega)$在 Ω 中满足方程(8.3), 则对任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 有估计

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega}')}\leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+k),\tag{8.68}$$

其中 $C=C(n,\ \Lambda/\lambda,\ \nu,\ q,\ d')$, $d'=\operatorname{dist}(\Omega',\ \partial\Omega)$, $\alpha=\alpha(n,\ \Lambda/\lambda,\ \nu d')>0$, $k=\lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_q+\|g\|_{q/2})$.

证明 在定理 8.22 中取 $R_0=d'$, 并用定理 8.17 去估计 $\sup|u|$, 便得估计式(8.68). ▌

附注 从上面的证明中清楚地看出, 估计式(8.46)、(8.47)和(8.63)中的常数 C 关于变量 νR 是非减的, (8.65)中的常数 C 关于 R_0 非减, (8.65)和 (8.68) 中的常数 α 分别关于变量 νR_0 和 $\nu d'$ 非增. 当 $\nu=0$ 时, (8.46), (8.47)和(8.63)中的常数 C 和(8.65), (8.68) 中的 α 将不依赖于 R, R_0 和 d', 因而不依赖于包含在定理 8.17, 8.18, 8.20, 8.22 和 8.24 断言中的区域.

8.10. 在边界处的局部估计

前面关于 $W^{1,2}(\Omega)$ 函数在边界 $\partial\Omega$ 上不等的定义能够用下面的方法来推广. 设 T 是 $\overline{\Omega}$ 的任一子集, u 是一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 函数. 那么, 如果 u^+ 是 $C_0^1(\overline{\Omega}-T)$中的一个函数序列在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的极限, 我们就说, 在 $W^{1,2}(\Omega)$的意义下, 在 T 上 $u\leqslant 0$. 我们看出, 若 u 在 T 上连续, 则这个定义等价于通常意义下在 T 上 $u\leqslant 0$. 当 $T=\partial\Omega$ 时, 这个定义与第 173 页上的定义一致. 其他的在 T 上不等的定义可以象前面已指明的那样, 从这定义推出. 我们将建立定理 8.17 和 8.18 的下述推广.

定理 8.25 设算子 L 满足 (8.5), (8.6), 并假定对某个 $q>n$, $f^i\in L^q(\Omega)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$, $g\in L^{q/2}(\Omega)$. 那么, 如果 u 是方程(8.3)在 Ω 中的一个 $W^{1,2}(\Omega)$下解, 则对任何 $y\in\mathbb{R}^n$, $R>0$ 和

$p>1$, 我们有

$$\sup_{B_R(y)} u_M^+ \leqslant C(R^{-n/p}\|u_M^+\|_{L^p(B_{2R}(y))}+k(R)), \tag{8.69}$$

其中
$$M=\sup_{\partial\Omega\cap B_{2R}} u^+,$$

$$u_M^+(x)=\begin{cases}\sup\{u(x),\ M\}, & x\in\Omega,\\ M, & x\notin\Omega,\end{cases}$$

而 k 由(8.45)给出, $C=C(n,\ \Lambda/\lambda,\ \nu R,\ q,\ p)$.

定理 8.26 设算子 L 满足条件 (8.5), (8.6), 并假定对某个 $q>n$, $f^i\in L^q(\Omega)$, $g\in L^{q/2}(\Omega)$, 那么, 如果 u 是方程(8.3)在 Ω 中的一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 上解, 并且对某个球 $B_{4R}(y)\subset\mathbb{R}^n$, u 在 $\Omega\cap B_{4R}(y)$ 中非负, 则对任何满足 $1\leqslant p<n/(n-2)$ 的 p 有

$$R^{-n/p}\|u_m^-\|_{L^p(B_{2R}(y))}\leqslant C(\inf_{B_R(y)} u_m^-+k(R)), \tag{8.70}$$

其中
$$m=\inf_{\partial\Omega\cap B_{4R}} u,$$

$$u_m^-=\begin{cases}\inf\{u(x),\ m\}, & x\in\Omega,\\ m, & x\notin\Omega,\end{cases}$$

且 $C=C(n,\ \Lambda/\lambda,\ \nu R,\ q,\ p)$.

证明 我们将定理 8.17 和 8.18 的证明作如下的化简. 若 u 是一个下解, 令 $\bar{u}=u_M^++k$, 若 u 是一个上解, 令 $\bar{u}=u_m^-+k$. 然后选

$$v=\eta^2\begin{cases}\bar{u}^\beta-(M+k)^\beta, & \beta>0,\\ \bar{u}^\beta-(m+k)^\beta, & \beta<0\end{cases} \tag{8.71}$$

作为积分不等式(8.3)中的检验函数. 其中 $\eta\in C_0^1(B_{4R})$ 还待进一步规定. 因为在 v 的支集上, 对 $\bar{z}=\bar{u}$ 和 $p=Du$, 结构不等式 (8.44) 成立, 且因为 $v\leqslant\eta^2\bar{u}^\beta$, 故可再次对 $\bar{u}$ 导出估计式 (8.52). 然后, 象在定理 8.17 和 8.18 的证明中一样, 可以得到所需要的估计式(8.69)和(8.70). ▌

除非对区域 Ω 加某些限制, 否则从定理 8.26 不能导出全局连续性的结果. 如果存在一个顶点在 $x_0\in\partial\Omega$ 的有限正圆锥 $V=V_{x_0}$ 使得 $\overline{\Omega}\cap V_{x_0}=x_0$, 我们就说 Ω 在点 x_0 满足外部锥条件. 显然, 每当外部球条件成立时, 外部锥条件也是满足的. 现在, 我们有

Hölder 估计(8.65)的下列推广.

定理 8.27 设算子 L 满足条件(8.5),(8.6),并假定对某个 $q>n$, $f^i\in L^q(\Omega)$, $i=1,\cdots,n$, $g\in L^{q/2}(\Omega)$. 那么,如果 u 是方程(8.3)在 Ω 中的一个 $W^{1,2}(\Omega)$ 解,并且 Ω 在点 $x_0\in\partial\Omega$ 满足外部锥条件,则对任何 $0<R\leqslant R_0$ 和 $B_0=B_{R_0}(x_0)$,有

(8.72) $$\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R} u\leqslant C\left(R^\alpha\left(R_0^{-\alpha}\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_0} u+\bar{k}\right)+\sigma\left(\sqrt{RR_0}\right)\right),$$

其中 $\sigma(R)=\operatorname*{osc}_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)} u$, $C=C(n,\Lambda/\lambda,\nu,q,R_0,V_{x_0})$, $\alpha=\alpha(n,\Lambda/\lambda,\nu R_0,q,V_{x_0})$ 是正常数.

以后我们对任何 R 将用缩写 $\Omega\cap B_R(x_0)=\Omega_R$, $\partial\Omega\cap B_R(x_0)=(\partial\Omega)_R$, 而将点 $x_0\in\partial\Omega$ 省略.

证明 我们遵循定理 8.22 的证明. 一开始假定 $R\leqslant\inf\{R_0/4, V_{x_0}$ 的高度$\}$并记 $M_0=\sup_{\Omega_{R_0}}|u|$, $M_4=\sup_{\Omega_{4R}} u$, $m_4=\inf_{\Omega_{4R}} u$, $M_1=\sup_{\Omega_R} u$, $m_1=\inf_{\Omega_R} u$. 于是,在 $B_{4R}(x_0)$ 中将估计式(8.70)用于函数 M_4-u, $u-m_4$ 中的每一个,我们得到

$$\begin{aligned}(M_4-M)\frac{|B_{2R}(x_0)-\Omega|}{R^n}&\leqslant R^{-n}\int_{B_{2R}(x_0)}(M_4-u)^-_{M_4-M}dx\\&\leqslant C(M_4-M_1+\bar{k}(R)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m-m_4)\frac{|B_{2R}(x_0)-\Omega|}{R^n}&\leqslant R^{-n}\int_{B_{2R}(x_0)}(u-m_4)^-_{m-m_4}dx\\&\leqslant C(m_1-m_4+\bar{k}(R)),\end{aligned}$$

其中 $M=\sup_{(\partial\Omega)_{4R}} u$, $m=\inf_{(\partial\Omega)_{4R}} u$. 因此,利用外部锥条件我们有

$$M_4-M\leqslant C(M_4-M_1+\bar{k}(R)),$$
$$m-m_4\leqslant C(m_1-m_4+\bar{k}(R)),$$

所以相加得 $$\operatorname*{osc}_{\Omega_R} u\leqslant\gamma\operatorname*{osc}_{\Omega_{4R}} u+\bar{k}(R)+\operatorname*{osc}_{(\partial\Omega)_{4R}} u,$$

其中 $\gamma=1-1/C$, $C=C(n,\Lambda/\lambda,\nu R_0,q,V_{x_0})$. 于是估计式(8.72)从引理 8.23 推出. ▌

如果定理 8.27 的假设条件被满足,并且当 $R\to0$ 时 $\sigma(R)\to0$, 则估计式(8.72)蕴涵着 $u(x_0)=\lim_{x\to x_0}u(x)$ 是有明确定义的. 于是

立即可以从定理 8.22 和 8.27 得到下面的全局连续性结果.

推论 8.28 若在定理 8.27 的假设条件之外再假定 Ω 在每一点 $x_0\in\partial\Omega$ 都满足外部锥条件，而且对所有的 $x_0\in\partial\Omega$，当 $R\to0$ 时 $\underset{\partial\Omega\cap B_R(x_0)}{\operatorname{osc}} u\to0$. 则函数 u 在 Ω 中一致连续.

若对区域 Ω 进一步再加一些限制，一致 Hölder 估计也可以从定理 8.27 得到. 即，如果 Ω 在每点 $x_0\in T\subset\partial\Omega$ 满足外部锥条件，且锥 V_{x_0} 都和某一个固定的锥 V 全等. 则我们说 Ω 在 $T\subset\partial\Omega$ 满足一致外部锥条件. 于是，我们能够断言定理 8.24 的下述推广.

定理 8.29 设算子 L 满足条件(8.5)，(8.6)，对某个 $q>n$，$f^i\in L^q(\Omega)$，$i=1,\cdots,n$，$g\in L^{q/2}(\Omega)$，并假定 Ω 在边界部分 T 上满足一致外部锥条件. 那么，如果 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 在 Ω 中满足方程(8.3)，并且存在常数 K，$\alpha_0>0$ 使得

$$\underset{\partial\Omega\cap B_R(x_0)}{\operatorname{osc}} u\leqslant KR^{\alpha_0},\quad \forall x_0\in T,\ R>0,$$

由此推得，对某个 $\alpha>0$，$u\in C^\alpha(\Omega\cup T)$，并且对任何 $\Omega'\subset\subset\Omega\cup T$，

$$\|u\|_{C^\alpha(\Omega')}\leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+K+k),\tag{8.73}$$

其中 $\alpha=\alpha(n,\Lambda/\lambda,\nu d',V,q,\alpha_0)$，$C=C(n,\Lambda/\lambda,\nu,V,q,\alpha_0,d')$，

$$d'=\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega-T)\text{ 以及 }k=\lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_q+\|g\|_{q/2}).$$

若 $\Omega'=\Omega$，则 d' 用 $\operatorname{diam}\Omega$ 代替.

证明 设 $y\in\Omega'$，$\delta=\operatorname{dist}(y,\partial\Omega)<d'$. 由 $R_0=\delta$ 时的定理 8.22，对任何 $x\in B_\delta$，我们有

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant C(\delta^{-\alpha}\underset{B_\delta}{\operatorname{osc}}u+\bar{k}).$$

现在选 $x_0\in\partial\Omega$ 使 $|x_0-y|=\delta$. 由 $R=2\delta$，$R_0=2d'$ 时的估计式(8.72)，假如 $2\alpha\leqslant\alpha_0$，那么有

$$\delta^{-\alpha}\underset{B_\delta}{\operatorname{osc}}u\leqslant\delta^{-\alpha}\underset{\Omega_{2\delta}}{\operatorname{osc}}u\leqslant C(\sup_\Omega|u|+k+K).$$

因此对任何 $x\in B_\delta(y)$，我们有

$$(8.74)\qquad \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant C(\sup_{\Omega}|u|+k+K).$$

再使用 $R=2|x-y|$, $R_0=2d'$ 时的估计 (8.72), 我们知道 (8.74) 对 $d'\geqslant|x-y|\geqslant\delta$ 也成立. 于是定理 8.29 从定理 8.15 和 8.24 推出.]

实际上, 上面的定理把内部和边界上分开的 Hölder 估计结合为一个部分内部 Hölder 估计或全局 Hölder 估计. 注意, 如果 $u, v\in W^{1,2}(\Omega)$, 且 $u-v\in W_0^{1,2}(\Omega)$, 那么, 只要 $v\in C^0(\overline{\Omega})$, 当 $R\to 0$ 时, 就对所有的 $y\in\partial\Omega$ 有 $\underset{\partial\Omega\cap B_R(y)}{\operatorname{osc}} u\to 0$, 而只要 $v\in C^{\alpha_0}(\overline{\Omega})$, 就对所有的 $y\in\partial\Omega$, $R>0$ 有 $\underset{\partial\Omega\cap B_R(y)}{\operatorname{osc}} u\leqslant KR^{\alpha_0}$. 在定理 8.24 后面关于估计式(8.69), (8.70), (8.72) 中常数 C 和关于估计式(8.72), (8.73) 中 α 的附注当然也是适用的.

对于连续边值, 方程 (8.3) 的存在定理可从定理 8.3 和推论 8.28 得到.

定理 8.30 设算子 L 满足条件 (8.5), (8.6), (8.8), 并且对某个 $q>n$, $f^i\in L^q(\Omega)$, $g\in L^{q/2}(\Omega)$. 又假设 Ω 在 $\partial\Omega$ 的每点都满足外部锥条件. 那么, 对 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$, 存在唯一的函数 $u\in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 满足在 Ω 内 $Lu=g+D_if^i$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$.

证明 设 $\{\varphi_m\}$ 是 $C^1(\overline{\Omega})$ 中的一个序列, 在 $\partial\Omega$ 上 $\{\varphi_m\}$ 一致收敛到 φ. 根据定理 8.3 和推论 8.28, 在 $W^{1,2}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 中存在一个序列 $\{u_m\}$, 使得在 Ω 中 $Lu_m=g+D_if^i$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u_m=\varphi_m$. 由定理 8.1, 当 m_1, $m_2\to\infty$ 时, 我们有

$$\sup_{\Omega}|u_{m_1}-u_{m_2}|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|\varphi_{m_1}-\varphi_{m_2}|\to 0,$$

所以 $\{u_m\}$ 一致收敛到一个函数 $u\in C^0(\overline{\Omega})$, 在 $\partial\Omega$ 上满足 $u=\varphi$. 而且由估计(8.52), 对任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 我们就有

$$\int_{\Omega'}|D(u_{m_1}-u_{m_2})|^2dx\to 0, \text{当 } m_1,\ m_2\to\infty \text{ 时}.$$

由此 $u\in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ 并且在 Ω 中满足方程(8.3). 解 u 的唯一性可通过在区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 中应用定理 8.1 推知.]

如果在定理 8.30 的假设条件中对区域 Ω 不作限制，那么按上面的程序我们可以得到一个有界函数 $u\in C^0(\Omega)\cap W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ 在 Ω 内满足 $Lu=g+D_if^i$；如果 Ω 在 $x_0\in\partial\Omega$ 满足外部锥条件，就还有当 $x\to x_0$ 时 $u(x)\to\varphi(x_0)$. 若任一点 $x_0\in\partial\Omega$ 满足：对任意选择的 φ, g, f^i 都有 $u(x)\to\varphi(x_0)$，则称 x_0 为算子 L 的正则点. 用 [HR] 或 [LSW] 中的方法，能够证明 L 的正则点与第 2 章中定义的 Laplace 算子的正则点是一致的. 第 6 章中关于闸函数的各种考虑在这里也可以用. 还应注意，从定理 8.27 的证明可推出外部锥条件能够放松到条件

$$\liminf_{R\to 0}\frac{|B_R(x_0)-\Omega|}{R^n}>0. \tag{8.75}$$

在结束这节时我们指出，第 8.6 到 8.10 节的结果当关于系数 $\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 和 d 的条件 (8.6) 换成 $\mathbf{b}$、$\mathbf{c}\in L^q(\Omega)$, $d\in L^{q/2}(\Omega)$, $q>n$ 时仍然成立. 令

$$\bar{b}=\lambda^{-2}(|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2)+\lambda^{-1}d,$$
$$\nu^2=\|\bar{b}\|_{q/2},$$

于是我们需要在定理 8.17 到 8.29 的估计中用量 νR^δ 代替量 νR. 在前面的有些局部结果中，减弱算子 L 的一致和严格椭圆性条件也是可能的.

评注

线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题的 Hilbert 空间方法或变分方法可以追溯到远至 Hilbert [HI] 的工作和 Lebesgue [LE] 对 Laplace 方程的工作. 在本世纪中它曾被许多作者特别是 Friedrichs [FD1, 2] 和 Gårding [GA] 所发展. 关于进一步的讨论读者可参看 [AG], [BS] 和 [FR]. 我们在 8.2 节中讨论过的广义 Dirichlet 问题，也由 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva [LU4] 以及 Stampacchia [ST4, 5] 考虑过. 这些作者导出了 Fredholm 二择一定理（定理 8.4），但它们的存在性和唯一性结果被小范围或强迫性条件所限制. 弱极值原理（定理 8.1）虽然是 [TR1] 中弱

Harnack 不等式的一个简单推论,看来,在文献中 Chicco[CI1] 首先注意到它(也可见 [HH]). 我们是仿照 Trudinger 的证明 [TR7], 它有容易推广到非一致椭圆型方程的优点. 给出 Fredholm 二择一定理后,存在性结果(定理 8.3) 便是弱极值原理的一个直接推论.

8.3 和 8.4 节中的那些弱解的高阶可微性定理是由不同的作者证明的, 包括 Friedrichs[FD2], Browder[BW1], Lax[LX]和 Nirenberg[NI1, 2]; 也可参看[AG], [BS]和[FR].

全局的有界性(定理 8.15)出现在工作[LU4]和 [ST4, 5] 中, 并且是 Stampacchia[ST1, 2]较早的叙述的推广. 我们的证明贯穿着 Moser 的迭代技巧,是仿照了 Serrin[SE2] 的证明. 解的先验的界(定理 8.16)是属于 Trudinger 的[TR7].

解的局部逐点估计包含了第八章的其余部分, 全都由 De Giorgi[DG1] 的开拓性工作所产生. 在 De Giorgi 的工作中, 对形如

$$Lu = D_i(a^{ij}(x)D_ju) = 0 \tag{8.76}$$

的方程证明了定理 8.17 和定理 8.22 的特殊情形; (也可参看 Nash[NA1]). De Giorgi 的工作被 Morrey[MY4], Stampacchia [ST3]推广到具有这里所讨论的形式的线性方程, 被 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva[LU2] 推广到散度形式的拟线性方程. De Giorgi 的结果的一个有趣的新证明由 Moser[MJ1] 提出, 这个证明也能推广到更一般的方程(见 [LU4]), 并且确实能被我们用于导出定理 8.22, 8.24, 以及边界估计(定理 8.29)(见习题 8.6). 方程 (8.76) 的弱解的 Harnack 不等式由 Moser[MJ2] 所证明, 且被 Serrin[SE2]和 Trudinger[TR1]推广到散度形式的拟线性方程. 我们是把我们的局部估计的论述建立在[TR1]中导出的弱 Harnack 不等式(定理 8.18) 的基础上. 在此我们指出, 在二个自变量的方程的情形, Hölder 估计和 Harnack 不等式可以用较简单方法推出, 见[MY2], [BN]和习题 8.5. 在二个自变量情形,更强的结果可参看[PS]和[WI3].

8.1 节和 8.2 节的方法和结果可以推广到处理其他边值问题. 特别地, 对于混合边值问题

$$
(8.77)\quad
\begin{aligned}
&Lu=D_if^i+g && (\text{在 } \Omega \text{ 中}),\\
&u=\varphi_1 && (\text{在 } \partial\Omega-\Gamma \text{ 上}),\\
&\mathfrak{B}u\equiv a^{ij}(x)\nu_iD_ju+b^i(x)\nu_iu+\sigma(x)u=\varphi_2 && (\text{在 } \Gamma \text{ 上}),
\end{aligned}
$$

我们可以考虑一个广义的提法, 其中 Γ 是 $\partial\Omega$ 的一个相对开的 C^1 部份, $\nu=(\nu_1,\ \cdots,\ \nu_n)$ 是 Γ 上 $\partial\Omega$ 的外法向. 对于 $\varphi_1\in W^{1,2}(\Omega)$ 和 σ, $\varphi_2\in L^2(\Gamma)$, 函数 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 叫作边值问题 (8.80) 的广义解, 如果 $u-\varphi_1\in W_0^{1,2}(\Omega\cup\Gamma)$, 并且对所有的 $v\in W_0^{1,2}(\Omega\cup\Gamma)$,

$$
(8.78)\quad \mathfrak{L}(u,\ v)=\int_\Omega(f^iD_iv-gv)\,dx+\int_\Gamma(\varphi_2-\sigma u)v\,ds.
$$

这里 $W_0^{1,2}(\Omega\cup\Gamma)$ 表示 $C_0^1(\Omega\cup\Gamma)$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的闭包. 我们可再次得到弱极大值原理, 即, 如果条件 (8.5), (8.6) 成立, 以及不等式(参看 (8.8))

$$
(8.79)\quad \int_\Omega(dv-b^iD_iv)\,dx-\int_\Gamma\sigma v\,ds\leqslant 0\quad \forall v\geqslant 0,\ v\in C_0^1(\Omega\cup\Gamma)
$$

成立, 那么对所有非负的 $v\in W_0^{1,2}(\Omega\cup\Gamma)$, 满足 $\mathfrak{L}(u,\ v)+\int_\Gamma\sigma uv\,ds\leqslant 0$ 的任一函数 $u\in W^{1,2}(\Omega)$, 必然或者满足 $\sup\limits_\Omega u\leqslant\sup\limits_\Gamma u^+$, 或者是一个正常数. 由此推出, 假如或者 Γ 非空, $\sigma\not\equiv 0$, 或者 $L1\neq 0$, 那么 (8.77) 的广义解是唯一的, 若这最后三个条件全满足, 那么 (8.77) 的广义解必只有差常数的区别. 一个与存在定理 (定理 8.3)类似的定理可再次从 Fredholm 二择一性质得到. 混合边值问题的极大值原理在文章 [CI3] 和 [TR11] 中有讨论; 在后一工作中对一般的非一致椭圆型方程导出了上面的论断.

也可以在 Sobolev 空间 $W^{2,p}(\Omega)$, $1<p<\infty$ 中研究一般形式的线性椭圆型算子 (8.21). 这个方法是建立在 Calderon 和 Zygmund [CZ] 关于 Newton 位势的二阶导数的 L^p 估计的基础上, 并且类似于第 6 章中的 Schauder 理论那样进行. 在 $p=2$ 的情形, Poisson 方程的基本估计可以沿着定理 8.8 的路线或者用

Fourier 变换简单地得到. 只需要主系数 a^{ij} 对扰动变元一致连续. L^p 理论的叙述读者可参看 [BS] (也可看文章 [GC], [KO], [ADN1, 2], [CI4, 5]). 我们在这里也提一下 Aleksandrov [AL1, 2] 的极大值原理, 当只假定方程 (8.21) 的系数 a^{ij}, b^i 和 c 有界可测时, 它对这个方程的 $W^{2,n}(\Omega)$ 解成立 (也可参看 [PU1]).

习　　题

8.1. 证明在弱极大值原理 (定理 8.1) 中, 假如在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant 0$, 则条件 (8.8) 可以换成条件

$$\int_\Omega (dv+c^iD_iv)\,dx\leqslant 0 \quad \forall v\geqslant 0,\quad \in C_0^1(\Omega), \tag{8.80}$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c} & -d \end{bmatrix}\geqslant 0 \text{ 几乎处处于 } \Omega; \text{ (见定理9.5)}. \tag{8.81}$$

8.2. 设 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $Lu=g+D_if^i$ 在 Ω 中的一个弱解, 其中 L 满足条件 (8.5), (8.6) 并且 g, $f^i\in L^2(\Omega)$, $i=1, \cdots, n$. 证明: 对任何子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 我们有

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega')}\leqslant C(\|u\|_2+\|\mathbf{f}\|_2+\|g\|_2), \tag{8.82}$$

其中 $C=C(n, \Lambda/\lambda, \nu, d', |\Omega|)$, $d'=\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

8.3. 证明: 若矩阵 $\mathbf{a}=[a^{ij}]$ 对称, 则 Harnack 不等式 (定理 8.20) 中的常数 C 可由下式估计:

$$C\leqslant C_0^{\sqrt{\Lambda/\lambda}+\nu R},\ C_0=C_0(n).$$

8.4. 用定理 8.8 和正则化 (象 7.2 节中那样) 证明: 定理 3.9 对于函数 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 是有效的. 从而在区域

$$\Omega=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|<1\}\subset\mathbb{R}^2$$

中考虑函数

$$u(x,\ y)=|xy|\log(|x|+|y|),$$

说明定理 3.9 是强的.

8.5. (a) 设 u 是 $C^1(B_R(0))$ 中的一个函数, $B_R(0)\subset\mathbb{R}^2$, 并且对 $0<r<R$, 记

$$\omega(r)=\operatorname*{osc}_{\partial B_r} u,$$

$$D(r)=\int_{B_r}|Du|^2\,dx,$$

其中 $B_r=B_r(0)$. 若 ω 非减, 试证明对 $0<r<R$,

$$\omega(r) \leqslant \pi\sqrt{D(R)/\log(R/r)}.$$

(b) 对于满足条件(8.5)和(8.6)的二元散度结构方程

$$Lu = D_i(a^{ij}D_ju) + b^iD_iu = 0,\quad i,\ j = 1,\ 2,$$

如下证明 Harnack 不等式. 即,若解 u 在圆域 $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ 中是正的, 证明函数 $v = \log u$ 的 Dirichlet 积分在每个圆域 B_r (0) $(0 < r < R)$ 上有界, 其界依赖于 Λ/λ, ν, r 和 R (见定理 8.18 的证明中 $\beta = -1$ 的情形). 应用弱极大值原理(定理 8.1)和(a),对于 $|x| \leqslant R/2$ 得到结果

$$C^{-1}u(0) \leqslant u(x) \leqslant Cu(0),$$

其中 $C = C(\lambda,\ \Lambda,\ R)$ (参看[BN]).

8.6. (a) 用定理 8.22 的假设条件和记号, 证明函数

$$w^+ = \log\frac{M_4 - m_4 + \bar{k}R^\delta}{M_4 - u + \bar{k}R^\delta},$$

$$w^- = \log\frac{M_4 - m_4 + \bar{k}R^\delta}{u - m_4 + \bar{k}R^\delta}$$

是具有与方程 (8.3) 类似结构的方程在 B_0 中的非负下解. (见定理 8.16 的证明.)

(b) 把定理 8.17 用到 (a) 中函数 $w^\pm$ 上, 给出 Hölder 估计 (定理 8.22) 的另一个证明.

第二部分

拟线性方程

第九章

极大值原理和比较原理

本章的目的是为拟线性方程提供各种极大值和比较原理，它们推广了第 3 章中的相应结果．我们考虑形如

(9.1)　　$Qu=a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u+b(x,\ u,\ Du),\ a^{ij}=a^{ji},$

的二阶拟线性算子 Q, 其中 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 属于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域 Ω, $n\geqslant 2$, 除非另外声明，函数 u 属于 $C^2(\Omega)$．Q 的系数，即函数 $a^{ij}(x,\ z,\ p)$, $i,\ j=1,\ \cdots,\ n$, $b(x,\ z,\ p)$ 假定是对集 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的所有$(x,\ z,\ p)$的值定义的．形如(9.1) 的两个算子称为等价的，如果一个是另一个与 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的一个固定正函数的乘积．对应于等价算子 Q 的各方程 $Qu=0$ 亦将称为等价的．

我们采用下述定义：

设 $\mathscr{U}$ 是 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的一个子集．若系数矩阵 $[a^{ij}(x,\ z,\ p)]$ 对所有$(x,\ z,\ p)\in\mathscr{U}$ 是正定的，则称 Q 在 $\mathscr{U}$ 是椭圆的．若 $\lambda(x,\ z,\ p)$, $\Lambda(x,\ z,\ p)$分别表示$[a^{ij}(x,\ z,\ p)]$的最小和最大特征值，这意味着

(9.2)　$0<\lambda(x,\ z,\ p)|\xi|^2\leqslant a^{ij}(x,\ z,\ p)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda(x,\ z,\ p)|\xi|^2$

对所有 $\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ 和所有 $(x,\ z,\ p)\in\mathscr{U}$ 成立．进而，若 Λ/λ 在 $\mathscr{U}$ 是一致有界的，则称 Q 在 $\mathscr{U}$ 内是一致椭圆的．若 Q 在整个集 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中是椭圆（一致椭圆）的，我们就简单地说 Q 在 Ω 中是椭圆（一致椭圆）的．若 $u\in C^1(\Omega)$，而矩阵 $[a^{ij}(x),\ u(x),\ Du(x)]$ 对所有 $x\in\Omega$ 是正定的，我们就说 Q 关于 u 是椭圆的．我们还要定义一个数值函数 $\mathscr{E}$：

(9.3)　　$\mathscr{E}(x,\ z,\ p)=a^{ij}(x,\ z,\ p)p_ip_j,$

以后将证明它是十分重要的．若 Q 在 $\mathscr{U}$ 中是椭圆的，由(9.2)，对所有的$(x,\ z,\ p)\in\mathscr{U}$，成立

$$(9.4) \quad 0<\lambda(x,z,p)|p|^2\leqslant\mathscr{E}(x,z,p)\leqslant\Lambda(x,z,p)|p|^2.$$

若存在一个可微向量函数 $\mathbf{A}(x,z,p)=(A^1(x,z,p),\cdots,A^n(x,z,p))$ 和一个数值函数 $B(x,z,p)$，使

$$(9.5) \quad Qu=\operatorname{div}\mathbf{A}(x,u,Du)+B(x,u,Du),\ u\in C^2(\Omega);$$

即在(9.1)中

$$a^{ij}(x,z,p)=\frac{1}{2}(D_{p_i}A^j(x,z,p)+D_{p_j}A^i(x,z,p)),$$

则称算子 Q 是*散度形式*的. 和线性算子的情形不同，具有光滑系数的拟线性算子未必可以表示成散度形式.

算子 Q 是*变分*的,如果它是对应于重积分

$$\int_\Omega F(x,u,Du)dx$$

的 Euler-Lagrange 算子,这里 F 是可微数值函数; 即 Q 是散度形式(9.5)的,且

$$(9.6) \quad A^i(x,z,p)=D_{p_i}F(x,z,p),\ B(x,z,p)=-D_zF(x,z,p).$$

Q 的椭圆性等价于函数 F 关于变量 p 的严格凸性.

例

$$\text{(i)} \qquad Qu=\Delta u+(\alpha-2)\frac{D_iuD_ju}{(1+|Du|^2)}D_{ij}u,\quad \alpha\geqslant1.$$

这里

$$\lambda(x,z,p)=\begin{cases}1, & \alpha\geqslant2,\\ \dfrac{1+(\alpha-1)|p|^2}{1+|p|^2}, & \alpha\leqslant2,\end{cases}$$

$$\Lambda(x,z,p)=\begin{cases}\dfrac{1+(\alpha-1)|p|^2}{1+|p|^2}, & \alpha\geqslant2,\\ 1, & \alpha\leqslant2,\end{cases}$$

而 $\qquad \mathscr{E}(x,z,p)=|p|^2(1+(\alpha-1)|p|^2)/(1+|p|^2),$

于是对所有 $\alpha\geqslant1$, Q 是椭圆的,仅当 $\alpha>1$ 时, Q 是一致椭圆的. 把 Q 写成

$$Qu=(1+|Du|^2)^{1-\alpha/2}\operatorname{div}(1+|Du|^2)^{\alpha/2-1}Du,$$

我们看到 Q 等价于一个散度形式的算子,并且 Q 等价于与积分

$$\int_\Omega(1+|Du|^2)^{\alpha/2}dx$$

伴随的变分算子. 方程 $Qu=0$ 当 $\alpha=2$ 时与 Laplace 方程相合, 当 $\alpha=1$ 时与极小曲面方程相合.

(ii) $$Qu=\Delta u+\beta D_iuD_juD_{ij}u,\ \beta\geqslant 0.$$

这里
$$\lambda(x,\ z,\ p)=1,$$
$$\Lambda(x,\ z,\ p)=1+\beta|p|^2,$$
$$\mathscr{E}(x,\ z,\ p)=|p|^2(1+\beta|p|^2).$$

于是, Q 对所有 $\beta\geqslant 0$ 是椭圆的, 仅当 $\beta=0$(即当 Q 是 Laplace 算子)时是一致椭圆的. 当 $\beta>0$ 时, Q 等价于与积分

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{\beta}{2}|Du|^2\right)dx$$

伴随的变分算子. 注意, 当 $\beta\geqslant 1$ 时, Q 的最小和最大特征值正比于前例中 $\alpha=1$ 的情形的那些值. 不过, 这些算子的存在性结果由于它们的 $\mathscr{E}$ 函数的不同增长性质而被证明是有实质性差异的.

(iii) *规定平均曲率的方程*

设 $u\in C^2(\Omega)$ 并假定 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的图象在点 $(x,\ u(x))$, $x\in\Omega$ 有平均曲率 $H(x)$ (所谓平均曲率是沿使 x_{n+1} 增加的法方向取的). 可以推出(见附录) u 满足方程

(9.7) $$\mathfrak{M}u=(1+|Du|^2)\Delta u-D_iuD_juD_{ij}u=nH(1+|Du|^2)^{3/2}.$$

这里
$$\lambda(x,\ z,\ p)=1,$$
$$\Lambda(x,\ z,\ p)=1+|p|^2,$$
$$\mathscr{E}(x,\ z,\ p)=|p|^2.$$

(9.7)中的算子 $\mathfrak{M}$ 等价于例 (i) 中当 $\alpha=1$ 时的算子 Q.

(iv) *气体动力学方程*

理想可压缩流体的稳定无旋流用连续性方程 $\operatorname{div}(\rho Du)=0$ 描述, 其中 u 是流的速度势, 而流体密度 ρ 满足密度速率关系 $\rho=\rho(|Du|)$. 在理想气体的情形, 这个关系取形式

$$\rho=\left(1-\frac{\gamma-1}{2}|Du|^2\right)^{1/(\gamma-1)},$$

其中常数 γ 是气体比热且 $\gamma>1$. 速度势 u 满足的方程则是

(9.8) $$\Delta u-\frac{D_iuD_ju}{1-\frac{\gamma-1}{2}|Du|^2}D_{ij}u=0,$$

它有特征值 $$\lambda=\frac{1-\frac{\gamma+1}{2}|Du|^2}{1-\frac{\gamma-1}{2}|Du|^2},\ \Lambda=1.$$

当 $|Du|<[2/(\gamma+1)]^{1/2}$ 时，方程 (9.8) 是椭圆型的，而流是亚音速的，但当 $[2/(\gamma+1)]^{1/2}<|Du|<[2/(\gamma-1)]^{1/2}$ 时，方程 (9.8) 是双曲型的. 我们注意当 $\gamma=-1$ 时方程 (9.8) 成为极小曲面方程.

9.1. 一个极大值原理

线性方程的不依赖于系数光滑性的估计一般蕴涵拟线性方程的相应估计. 特别，我们可以从定理 3.7 导出推论 3.2 和定理 3.7 的下述推广.

定理 9.1 设 Q 在有界区域 Ω 中是椭圆的，并假定存在非负常数 μ_1 和 μ_2，使得

(9.9) $$\frac{b(x,z,p)\operatorname{sign}z}{\lambda(x,z,p)}\leqslant\mu_1|p|+\mu_2,$$
$$\forall(x,z,p)\in\Omega\times\mathbb{R}-\{0\}\times\mathbb{R}^n,$$

那么如果 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant0$，我们就有

(9.10) $$\sup_\Omega u\leqslant\sup_{\partial\Omega}u^++C\mu_2,$$

其中 $C=C(\mu_1,\operatorname{diam}\Omega)$. 又如果在 Ω 中 $Qu=0$，我们就有

(9.11) $$\sup_\Omega|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|u|+C\mu_2.$$

证明 若 $b\equiv0$，结论由定理 3.1 直接推出. 不然，在子区域 $\Omega^+=\{x\in\Omega\,|\,u(x)>0\}$ 中我们有

$$\begin{aligned}0\leqslant Qu&=a^{ij}D_{ij}u+b\operatorname{sign}u\\&\leqslant a^{ij}D_{ij}u+\lambda\mu_1(\operatorname{sign}D_iu)D_iu+\lambda\mu_2,\end{aligned}$$

因此估计 (9.10) 由定理 3.7 推出. 在证明中以 $-u$ 代 u 即得估计 (9.11). ∎

当定理 9.1 中的 $\mu_2=0$ 时，我们得到一个弱极大值原理. 但这并不象在线性算子的情形那样蕴涵 Dirichlet 问题解的唯一性. 我们还要指出定理 3.7 的证明方法可直接用来得到定理 9.1.

9.2. 比较原理

若 L 是满足弱极大值原理(推论 3.2) 的假设的线性算子，又若 $u, v\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Lu\geqslant Lv$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant v$, 我们就从推论 3.2 直接得到在 Ω 中 $u\leqslant v$. 这个比较原理对拟线性算子有下述推广.

定理 9.2 设 $u, v\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant Qv$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant v$, 其中

(i) 算子 Q 关于 u 或 v 是椭圆的;

(ii) 系数 a^{ij} 不依赖于 z;

(iii) 系数 b 对每一 $(x, p)\in\Omega\times\mathbb{R}^n$, 关于 z 是非增的;

(iv) 系数 a^{ij}, b 在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 内关于变量 p 是连续可微的.

则在 Ω 中 $u\leqslant v$. 并且，若在 Ω 中 $Qu>Qv$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant v$, 又条件(i), (ii)和(iii)成立, (但(iv) 不必成立), 我们在 Ω 中就有严格不等式 $u<v$.

证明 假设 Q 关于 u 是椭圆的. 于是我们有

$$\begin{aligned}Qu-Qv=&a^{ij}(x, Du)D_{ij}(u-v)+(a^{ij}(x, Du)-a^{ij}(x, Dv))D_{ij}v\\&+b(x, u, Du)-b(x, u, Dv)+b(x, u, Dv)\\&-b(x, v, Dv)\geqslant 0,\end{aligned}$$

由此记

$$w=u-v,$$

$$a^{ij}(x)=a^{ij}(x, Du),$$

$$[a^{ij}(x, Du)-a^{ij}(x, Dv)]D_{ij}v+b(x, u, Du)-b(x, u, Dv)$$

$$=b^i(x)D_iw,$$

我们看到在 $\Omega^+=\{x\in\Omega\,|\,w(x)>0\}$ 上,

$$Lw=a^{ij}(x)D_{ij}w+b^iD_iw\geqslant 0$$

而在 $\partial\Omega$ 上 $w\leqslant 0$. 注意局部有界函数 b^i 的存在性由条件 (iv) 和中值定理保证. 因此，利用条件(i)和 (iv), 从定理 3.1 我们有在

Ω 中 $w\leqslant 0$. 若在 Ω 中 $Qu>Qv$, 函数 w 不能在 Ω 中取非负最大值;(见定理 3.1 的证明). 因此在 Ω 中 $w<0$. 若 Q 关于 v 是椭圆的,结果由上解的极小值原理推出. ∎

拟线性椭圆算子的 Dirichlet 问题的唯一性定理从定理 9.2 直接推出.

定理 9.3 设 $u, v\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu=Qv$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=v$, 并假定定理 9.2 中的条件(i)到 (iv) 成立, 则在 Ω 中 $u\equiv v$.

定理 9.2 和 9.3 中的条件 (ii) 或许是不必要的限制. 但我们下面将指出, 定理 9.2 和 9.3 的结论当主系数依赖于 z 时一般不正确. 比较原理 (定理 9.2) 在第 13 章中建立边界梯度估计时将是有用的.

9.3. 一个进一步的极大值原理

利用定理 9.2, 我们可以导出定理 9.1 的下述改进.

定理 9.4 设 Q 在 Ω 中是椭圆的, 又假定存在非负常数 μ_1 和 μ_2, 使

$$(9.12)\qquad \frac{b(x, z, p)\operatorname{sign} z}{\mathscr{E}(x, z, p)}\leqslant\frac{\mu_1|p|+\mu_2}{|p|^2}, \forall(x, z, p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

那么,如果 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0(=0)$, 我们就有

$$(9.13)\qquad \sup_{\Omega} u(|u|)\leqslant\sup_{\partial\Omega} u^+(|u|)+C\mu_2,$$

其中 $C=C(\mu_1, \operatorname{diam}\Omega)$.

证明 设 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 且在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0$, 用

$$\bar{Q}v=a^{ij}(x, u, Dv)D_{ij}v+b(x, u, Dv)$$

定义算子 $\bar{Q}$. 象在定理 3.7 的证明中那样, 选取一个比较函数 v; 即当 $\mu_2>0$ 时令

$$v(x)=\sup_{\partial\Omega} u^+ +\mu_2(e^{\alpha d}-e^{\alpha x_1}),$$

其中假定 Ω 位于板形区域 $0<x_1<d$ 中且 $\alpha\geqslant\mu_1+1$, 则在 $\Omega^+=\{x\in\Omega|u(x)>0\}$ 中我们有

$$\begin{aligned}\bar{Q}v &= -\mu_2\alpha^2 a^{11}(x,\ u,\ Dv)e^{\alpha x_1}+b(x,\ u,\ Dv)\\ &\leqslant -\frac{e^{-\alpha x_1}}{\mu_2}\mathscr{E}(x,\ u,\ Dv)\left(1-\frac{\mu_1}{\alpha}-\frac{e^{-\alpha x_1}}{\alpha^2}\right) \quad \text{由}(9.12)\\ &<0\leqslant \bar{Q}u.\end{aligned}$$

因此由定理 9.2, 在 Ω 中我们有 $u\leqslant v$. $\mu_2=0$ 时的结果令 μ_2 趋于零即得. ▌

对一致椭圆算子, 定理 9.4 等价于定理 9.1. 满足 (9.12) 但不满足(9.9)的非一致椭圆算子的例子是

$$Qu=\Delta u+D_iuD_juD_{ij}u+(1+|Du|^2).$$

从定理 9.4 的证明显然看出,在假设条件中仅需假定: (i) 在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中 $\mathscr{E}>0$; (ii) Q 关于 u 是椭圆的; (iii) 存在一个固定向量 $p_0\in\mathbb{R}^n$, 使(9.12)当 $(x,\ z,\ t)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 时对所有的 $(x,\ z,\ tp_0)$ 成立. 更深一层的极大值原理在习题 9.1, 9.2 中讨论.

9.4. 一个反例

下述例子表明定理 9.2 和 9.3 一般不能推广到允许主系数 a^{ij} 依赖于 u. 我们在球壳 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,1<|x|<2\}$ 中考虑形如

$$Qu=\Delta u+g(r,\ u)\frac{x_ix_j}{r^2}D_{ij}u,\quad r=|x| \tag{9.14}$$

的算子 Q. 若 $u=u(r)$, 方程 $Qu=0$ 等价于常微分方程

$$u''+u'\left(\frac{n-1}{r(1+g)}\right)=0.$$

设 v 和 w 是满足下述条件的多项式:

(i) $v(1)=w(1)$, $v(2)=w(2)$;

(ii) v', $w'>0$ 在 $[1,\ 2]$ 中成立;

(iii) $v'(1)<w'(1)$, $v'(2)>w'(2)$;

(iv) v'', $w''<0$ 在 $[1,\ 2]$ 中成立;

(v) $\dfrac{w''(1)}{w'(1)}=\dfrac{v''(1)}{v'(1)}$, $\dfrac{w''(2)}{w'(2)}=\dfrac{v''(2)}{v'(2)}$;

对 $1\leqslant r\leqslant 2$, $v\leqslant u\leqslant w$, 定义

$$f(r,\ u)=\frac{u-v}{w-v}\left(\frac{v''}{v'}-\frac{w''}{w'}\right)-\frac{v''}{v'},$$

$$g(r,\ u)=-1+\frac{n-1}{rf(r,\ u)}.$$

令 $v(x)=v(|x|)$, $w(x)=w(|x|)$, 则在 Ω 中 $Qv=Qw=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $v=w$. 又 Q 关于 v 和 w 二者都是椭圆的. 并且,依适当方式延拓 f 到带形区域 $[1,\ 2]\times\mathbb{R}$, 我们可以得到一个算子 Q, 它在 Ω 中是一致椭圆的,且其系数属于 $C^\infty(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$.

9.5. 散度形式算子的比较原理

当算子 Q 呈散度形式 (9.5) 时, 可以得到定理 9.2 的各种有趣的变形. 从第 8 章我们回忆起在 Ω 中弱可微的函数 u 满足 $Qu\geqslant 0(=0,\ \leqslant 0)$,只要函数 $A^i(x,\ u,\ Du)$, $B(x,\ u, Du)$在 Ω 中局部可积且对所有非负的 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$有

$$(9.15)\qquad Q(u,\ \varphi)=\int_\Omega(\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)\cdot D\varphi-B(x,\ u,\ Du)\varphi)dx \leqslant 0(=0,\ \geqslant 0).$$

下述定理对比较原理提供了三条可供选择的准则.

定理 9.5 设 $u,\ v\in C^1(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0$, $Qv\leqslant 0$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant v$, 其中函数 $\mathbf{A}$, B 关于变量 z, p 在 $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中连续可微,算子 Q 在Ω 中是椭圆的,函数 B 对固定的$(x,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}^n$ 关于 z 非增. 那么,如果下列三者之一成立:

(i) 向量函数 $\mathbf{A}$ 不依赖于 z;

(ii) 函数 B 不依赖于 p;

(iii) $(n+1)\times(n+1)$矩阵

$$\begin{bmatrix} D_{p_j}A^i(x,\ z,\ p) & -D_{p_j}B(x,\ z,\ p) \\ D_zA^i(x,\ z,\ p) & -D_zB(x,\ z,\ p)\end{bmatrix}\geqslant 0 \text{ 在 } \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \text{ 中};$$

则在 Ω 中 $u\leqslant v$.

证明 我们定义

$$w=u-v,\quad u_t=tu+(1-t)v,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$a^{ij}(x)=\int_0^1 D_{p_j}A^i(x,\ u_t,\ Du_t)\,dt,$$

$$b^i(x)=\int_0^1 D_z A^i(x,\ u_t,\ Du_t)\,dt,$$

$$c^i(x)=\int_0^1 D_{p_i} B(x,\ u_t,\ Du_t)\,dt,$$

$$d(x)=\int_0^1 D_z B(x,\ u_t,\ Du_t)\,dt.$$

则对所有非负的 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}(9.16)\qquad 0&\geqslant Q(u,\ \varphi)-Q(v,\ \varphi)\\ &=\int_\Omega\{(\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)-\mathbf{A}(x,\ v,\ Dv))\cdot D\varphi\\ &\quad-(B(x,\ u,\ Du)-B(x,\ v,\ Dv))\varphi\}dx\\ &=\int_\Omega\{(a^{ij}(x)D_jw+b^i(x)w)D_i\varphi\\ &\quad-(c^i(x)D_iw+d(x)w)\varphi\}dx.\end{aligned}$$

因此 $Lw\geqslant0$，这里 L 是如下定义的线性算子：

$$Lw=D_i(a^{ij}D_jw+b^iw)+c^iD_iw+dw.$$

因为 $u,\ v\in C^1(\overline{\Omega})$，由假设，存在正常数 $\lambda,\ \Lambda$ 使

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega.$$

$$\text{在 }\Omega\text{ 中 }|a^{ij}|,\ |b^i|,\ |c^i|,\ |d|\leqslant\Lambda,\ d\leqslant0,$$

从而在 Ω 中 L 是严格椭圆的且系数有界．定理 9.5 的结论现在就可以直接从第 8 章的理论得到．特别，若条件(i)成立，则在 Ω 中 $b^i=0$，于是由弱极大值原理(定理 8.1)，我们在 Ω 中有 $w\leqslant0$．虽然定理 9.5 的其余部分可从习题 8.1 直接推出，但我们还是要在这里给出完全的证明．若条件(ii)成立，则在 Ω 中 $c^i=0$．注意关于 L 的这个条件等价于关于共轭算子 L^* 的前述条件．对 $\varepsilon>0$，令

$$\varphi=\frac{w^+}{w^++\varepsilon}\in W_0^{1,2}(\Omega),$$

把它代入(9.16)即得

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega\left|D\log\left(1+\frac{w^+}{\varepsilon}\right)\right|^2dx&\leqslant\int_\Omega\frac{a^{ij}(x)D_iw^+D_jw^+}{(w^++\varepsilon)^2}\,dx\\ &\leqslant\Lambda\int_\Omega\frac{w^+}{w^++\varepsilon}\left|D\log\left(1+\frac{w^+}{\varepsilon}\right)\right|dx\end{aligned}$$

$$\leqslant \Lambda \int_{\Omega} \left| D \log \left(1 + \frac{w^+}{\varepsilon}\right) \right| dx.$$

因此利用 Young 不等式(7.6)，我们有

$$\int_{\Omega} \left| D \log \left(1 + \frac{w^+}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx \leqslant \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2 |\Omega|;$$

从 Poincaré 不等式(7.44)推出

$$\int_{\Omega} \left| \log \left(1 + \frac{w^+}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx \leqslant C(n, \lambda, \Lambda, |\Omega|).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 我们看到 w^+ 必定在 Ω 中为零，即在 Ω 中 $w \leqslant 0$.

最后，若条件(iii)成立，我们在 Ω 中取 $\varphi = w^+$, 代入 (9.16)，即得在 Ω 中

$$a^{ij} D_i w^+ D_j w^+ + (b^i - c^i) w^+ D_i w^+ - d(w^+)^2 = 0,$$

于是由 Young 不等式(7.6)，在 Ω 中有

$$|Dw^+|^2 \leqslant n\left(\frac{2\Lambda}{\lambda}\right)^2 |w^+|^2.$$

因此，对任何 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\left| D \log\left(1 + \frac{w^+}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,\Lambda}{\lambda} \frac{w^+}{w^+ + \varepsilon} \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,\Lambda}{\lambda},$$

又因在 $\partial\Omega$ 上 $w^+ = 0$, 即推出

$$\left| \log \left(1 + \frac{w^+}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,\Lambda}{\lambda} \operatorname{diam} \Omega.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 与前面一样，在 Ω 中我们有 $w^+ = 0$, 因此在 Ω 中 $w \leqslant 0$. ▌

注意当定理 9.5 中的条件(i)成立时，我们仅需假设 $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ 且系数的导数属于 $C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. 这一点在将定理 9.5 的结果应用于子区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 即容易看出. 在其他情形下，类似的推广亦有效，只要系数满足适当的一致结构条件.

9.6. 散度形式算子的极大值原理

当算子 Q 呈散度形式时，我们可以在与定理 9.1 和 9.4 不同的假设之下导出极大值原理. 我们将假设(9.5)中的函数 $\mathbf{A}$ 和 B 满足下述结构条件.

对所有 $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 和某一 $\alpha \geqslant 1$,

$$p\cdot \mathbf{A}(x,z,p)\geqslant |p|^{\alpha}-|a_1 z|^{\alpha}-a_2^{\alpha},$$

$$(9.17)\qquad B(x,z,p)\operatorname{sign} z\leqslant\begin{cases} b_0|p|^{\alpha-1}+|b_1 z|^{\alpha-1}+b_2^{\alpha-1}, & \alpha>1,\\ b_0, & \alpha=1;\end{cases}$$

这里 a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 都是非负常数. (9.17) 中的第一个不等式可以看作是一个弱椭圆性条件 (见习题 9.3). 下面的讨论类似于第 8 章中线性椭圆型方程弱解的全局估计的推导.

引理 9.6 设 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0$, 又设 Q 满足结构条件(9.17). 则

$$(9.18)\qquad \sup_{\Omega} u\leqslant C\{\|u^+\|_{\alpha}+(a_1+b_1)\sup_{\partial\Omega} u^+ + a_2+b_2\}+\sup_{\partial\Omega} u^+,$$

其中 $C=C(n,\alpha,a_1,b_0,b_1,|\Omega|)$.

证明 我们一开始先假设 $u\in C^1(\bar{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant 0$, 于是 $\sup_{\partial\Omega} u^+=0$. 证明按定理 8.15 进行, 差别是: 在目前的情形, 一开始就假设 u 有界, 从而就不必截断用作检验函数的幂函数. 记

$$k=a_2+b_2,\quad \bar{z}=|z|+k,\quad \bar{b}=a_1^{\alpha}+b_0^{\alpha}+b_1^{\alpha-1}+1,$$

从不等式(9.17)借助 Young 不等式得到

$$p\cdot \mathbf{A}(x,z,p)\geqslant |p|^{\alpha}-\bar{b}|\bar{z}|^{\alpha}$$

$$(9.19)\qquad \bar{z}B(x,z,p)\operatorname{sign} z\leqslant\begin{cases} \mu|p|^{\alpha}+(\mu^{1-\alpha}+1)\bar{b}\bar{z}^{\alpha}, & \alpha>1,\\ \bar{b}\bar{z}, & \alpha=1,\end{cases}$$

这里 $\mu>0$. 因此把函数

$$\varphi=w^{\beta}-k^{\beta}$$

代入积分不等式 (9.15), 这里 $w=\bar{u}^+=u^++k$, $\beta\geqslant 1$, 并取 $\mu=\beta/2$, 得

$$\int_{\Omega} w^{\beta-1}|Dw|^{\alpha}dx\leqslant C\bar{b}\int_{\Omega} w^{\alpha+\beta-1}dx,$$

这里 $C=C(\alpha)$. 由 Sobolev 不等式(7.26), 存在一个数 $s>\alpha$ 使

$$\|w^r-k^r\|_s\leqslant Cr\left(\int_{\Omega} w^{\beta-1}|Dw|^{\alpha}\,dx\right)^{1/\alpha},$$

这里 $r=(\alpha+\beta-1)/\alpha$ 而 $C=C(n,s,|\Omega|)$. 因此有

$$\|w\|_{rs}\leqslant (Cr)^{1/r}(\bar{b})^{1/\alpha r}\|w\|_{r\alpha}$$

对所有的 $r\geqslant 1$ 成立, 而当 $\sup_{\partial\Omega} u^+=0$ 时的估计 (9.18) 可由定理

8.15 的迭代论证得到. 为取消开始关于 u 的假设, 我们以 $u-L$ 代替 u, 其中 $L=\sup_{\partial\Omega}u^+$, 并以区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 来逼近 Ω 即可. ∎

利用引理 9.6, 现在即可导出方程 $Qu=0$ 的下解和解的下列先验估计.

定理 9.7 设 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0\ (=0)$, 并设 Q 满足结构条件(9.17), 其中 $\alpha>1$, $b_1=0$ 而且 b_0 或 $a_1=0$. 则有估计

(9.20) $$\sup_{\Omega}u(|u|)\leqslant C(a_2+b_2+a_1\sup_{\partial\Omega}u^+(|u|))+\sup_{\partial\Omega}u^+(|u|),$$

其中 $C=C(n, \alpha, a_1, b_0, |\Omega|)$.

证明 象引理 9.6 的证明一样, 我们可以先假设 $u\in C^1(\bar{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant 0$. 还设 $k>0$. 对 $b_0=0$ 或 $a_1=0$ 这两种情形将分别考虑.

(i) 设 $b_0=0$. 我们把

$$\varphi=\frac{1}{k^{\alpha-1}}-\frac{1}{w^{\alpha-1}},\quad w=\bar{u}^+$$

代入积分不等式(9.15)即得

$$(\alpha-1)\int_\Omega\left|\frac{Dw}{w}\right|^\alpha dx\leqslant\alpha\bar{b}|\Omega|,$$

于是
$$\int_\Omega\left|D\log\frac{w}{k}\right|^\alpha dx\leqslant\frac{\alpha}{\alpha-1}\bar{b}|\Omega|.$$

因此由 Poincaré 不等式(7.44), 得

$$\int_\Omega\left|\log\frac{w}{k}\right|^\alpha dx\leqslant C\bar{b},$$

其中 $C=C(n, \alpha, |\Omega|)$. 现令 $M=\sup_\Omega w$, 由引理 9.6 的证明有

$$\begin{aligned}\left(\frac{M}{k}\right)^\alpha&\leqslant C\int_\Omega\left(\frac{w}{k}\right)^\alpha dx\\&\leqslant C\left(\frac{M}{k}\right)^\alpha\left(\log\frac{M}{k}\right)^{-\alpha}\int_\Omega\left(1+\left|\log\frac{w}{k}\right|^\alpha\right)dx,\end{aligned}$$

于是
$$\left|\log\frac{M}{k}\right|^\alpha\leqslant C\int_\Omega\left(1+\left|\log\frac{w}{k}\right|^\alpha\right)dx\leqslant C.$$

因此 $M\leqslant Ck$, 其中 $C=C(n, \alpha, a_1, |\Omega|)$.

(ii) 设 $a_1=0$. 证明与定理 8.16 的证明类似. 仍记 $M=\sup\limits_{\Omega} w$, 我们把

$$\varphi=\frac{1}{(M-w+k)^{\alpha-1}}-\frac{1}{M^{\alpha-1}}$$

代入(9.15)即得

$$(\alpha-1)\int_\Omega\left|\frac{Dw}{M-w+k}\right|^\alpha dx\leqslant b_0\int_\Omega\left|\frac{Dw}{M-w+k}\right|^{\alpha-1}dx$$
$$+\left\{\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha+\left(\frac{b_2}{k}\right)^{\alpha-1}\right\}|\Omega|.$$

利用 Young 不等式(7.5),就有

$$\int_\Omega\left|D\log\frac{M}{M-w+k}\right|^\alpha dx\leqslant C\bar{b}\,|\Omega|,$$

其中 $C=C(\alpha)$, 因此由 Poincaré 不等式(7.44),

$$\int_\Omega\left|\log\frac{M}{M-w+k}\right|^\alpha dx\leqslant C\bar{b}, \tag{9.21}$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ |\Omega|)$. 为进一步进行, 在(9.15)中取

$$\varphi=\frac{\eta}{(M-w+k)^{\alpha-1}},$$

其中 $\eta\geqslant0$, $\operatorname{supp}\eta\subset\operatorname{supp}u^+$ 且 $\eta\in C_0^1(\Omega)$. 于是从结构条件(9.17)即得不等式

$$\int_\Omega\frac{\mathbf{A}\cdot D\eta}{(M-w+k)^{\alpha-1}}dx\leqslant\int_\Omega\left\{b_0\left|\frac{Dw}{M-w+k}\right|^{\alpha-1}\right.$$
$$\left.+\alpha\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha+\left(\frac{b_2}{k}\right)^{\alpha-1}\right\}\eta dx,$$
$$\leqslant\int_\Omega\left\{b_0\left|D\log\frac{M}{M-w+k}\right|^{\alpha-1}+\alpha\right\}\eta\,dx.$$

从而函数 $\bar{w}=\log[M/(M-w+k)]$ 在 $\Omega^+=\{x\in\Omega\,|\,u(x)>0\}$ 中满足 $\bar{Q}\bar{w}\geqslant0$, 这里算子 $\bar{Q}$ 满足结构条件 (9.17), 其中 $a_1=b_1=0$ 且 $a_2,\ b_2\leqslant\alpha$. 因此由引理 9.6 和(9.21),

$$\sup_\Omega\bar{w}\leqslant C(\|\bar{w}\|_\alpha+1)$$
$$\leqslant C(n,\ \alpha,\ b_0,\ |\Omega|),$$

因此 $M\leqslant Ck$. 由令 k 趋于零即得到 $k=0$ 的情形. 与在引理 9.6

的证明中一样，取消条件 $u\in C^1(\overline{\Omega})$，在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant 0$，就获得在每一情形下的估计(9.20)．∎

作为第15章中规定平均曲率的方程的存在性理论的一个副产品，我们将看到定理9.7不能推广到在其假设条件中允许 $\alpha=1$．包括情形 $\alpha=1$ 的下述估计需要结构常数 a_1，b_0 和 b_1 充分小．

定理 9.8 设 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0\ (=0)$，并设 Q 满足结构条件(9.17)．则存在一个正的常数 $C_0=C_0(\alpha,n)$，使得只要

$$(9.22)\qquad (a_1^\alpha+b_0^\alpha+b_1^{\alpha-1})\,|\Omega|^{\alpha/n}<C_0,$$

就有估计

$$(9.23)\qquad \sup_{\Omega}u\,(|u|)\leqslant C\{(a_1+b_1)\sup_{\partial\Omega}u^+\,(|u|)+a_2+b_2\}+\sup_{\partial\Omega}u^+\,(|u|),$$

其中 $C=C(n,\ \alpha,\ a_1,\ b_0,\ b_1,\ |\Omega|)$．

证明 根据引理9.6，我们仅需估计 $\|u^+\|_\alpha$．象在前一证明中一样，我们一开始假设 $u\in C^1(\overline{\Omega})$，且在 $\partial\Omega$ 上 $u\leqslant 0$．把 $\varphi=u^+=v$ 代入积分不等式(9.15)中，由(9.17)，(7.6)得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Dv|^\alpha dx&\leqslant\int_\Omega\{(a_1^\alpha+b_1^{\alpha-1})v^\alpha+b_0v|Dv|^{\alpha-1}+a_2^\alpha+b_2^{\alpha-1}v\}dx\\&\leqslant\int_\Omega\Big\{\Big(a_1^\alpha+b_1^{\alpha-1}+\frac{b_0^\alpha}{\alpha\varepsilon^{\alpha-1}}\Big)v^\alpha\\&\qquad+(1-1/\alpha)\varepsilon|Dv|^\alpha+a_2^\alpha+b_2^{\alpha-1}v\Big\}dx\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立．特别，当 $\alpha\neq 1$ 时取 $\varepsilon=\alpha^{1/(1-\alpha)}$ 并利用 Poincaré 不等式(7.44)，当 $\alpha\geqslant 1$ 时得到

$$\int_\Omega v^\alpha dx\leqslant C(n,\ \alpha)\,|\Omega|^{\alpha/n}\int_\Omega\{(a_1^\alpha+b_1^{\alpha-1}+b_0^\alpha)v^\alpha+a_2^\alpha+b_2^{\alpha-1}v\}dx.$$

因此若 $C(n,\ \alpha)\,|\Omega|^{\alpha/n}(a_1^\alpha+b_1^{\alpha-1}+b_0^\alpha)<1$，我们就有

$$\int_\Omega v^\alpha\,dx\leqslant C\,(a_2^\alpha+b_2^\alpha),$$

从而即得所希望的估计(9.23)．∎

注意，在定理9.8中，当 $\alpha=1$ 时常数 b_1 和 b_2 在不等式(9.22)

和(9.23)中不出现. 援引 Poincaré 不等式(7.44)的强的形式

$$(9.24)\quad \int_\Omega |v|dx \leqslant \frac{1}{n}(|\Omega|/\omega_n)^{1/n}\int_\Omega |Dv|dx,\quad v\in W_0^{1,1}(\Omega),$$

在这一情形我们可取

$$C_0 = C_0(1,\ n) = n\omega_n^{1/n}.$$

把规定平均曲率的方程(9.7)写成它的散度形式

$$(9.25)\qquad \operatorname{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = nH,$$

我们看到它满足具有常数 $\alpha=1,\ a_1=0,\ a_2=1,\ b_2=n\sup\limits_\Omega|H|$ 的结构条件(9.17),因此,若函数 H 满足

$$(9.26)\qquad H_0 = \sup_\Omega|H| < (\omega_n/|\Omega|)^{1/n},$$

对方程(9.25)的任何属于 $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 的下解(解),我们就有估计

$$(9.27)\qquad \sup_\Omega u(|u|) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u(|u|) + C(n,\ |\Omega|,\ H_0).$$

在结束本节时我们要指出, 结构条件(9.17)可一般化到允许量 $a_1, a_2,\ b_0, b_1,\ b_2$ 是非负可测函数. 特别,若我们假设 $a_1,\ a_2,\ b_0,\ b_1,\ \bar{b}_2\in L^q(\Omega)$,这里 q 满足 $q\geqslant\alpha,\ q>n$, 而 $\bar{b}_1=b_1^{1-1/\alpha},\ \bar{b}_2=b_2^{1-1/\alpha}$, 则引理 9.6 和定理 9.7 仍然成立,只要在不等式(9.18)和(9.20)中, $a_1,\ a_2,\ b_0,\ b_1,\ b_2$ 分别代以 $\|a_1\|_q,\ \|a_2\|_q,\ \|b_0\|_q,\ \|\bar{b}_1\|_q^{\alpha/(\alpha-1)},\ \|\bar{b}_2\|_q^{\alpha/(\alpha-1)}$ 且常数 C 还要依赖于 q. 定理 9.8 可类似地推广到条件(9.22)代之以

$$(9.28)\qquad \|a_1^\alpha+b_0^\alpha+b_1^{\alpha-1}\|_\beta < C_0,$$

其中 $\beta=\max(1,\ n/\alpha)$. 对于上述规定平均曲率的方程(9.25)这个例子,我们可获得更一般的结果: 只要 H 满足

$$(9.29)\qquad \int_\Omega |H|^n dx < \omega_n,$$

则极大值原理(9.27)成立, 其中 $H_0=\|H\|_n$. 这些断语的证明基本上与 $a_1,\ a_2,\ b_0,\ b_1,\ b_2$ 是常数的情形相同; (见习题 9.4). 最后我们指出当函数 u 由属于空间 $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 换为属于 Sobolev 空间 $W^{1,2}(\Omega)$ 时,本节所有结果及其证明仍旧适用.

评注

本章前面的结果，即定理 9.1, 9.2, 9.3 和 9.4 基本上是 Hopf 的极大值原理(定理 3.1)的变形. 9.4 节的反例属于 Meyers [ME2]. 比较原理(定理 9.5)的(i), (ii) 部分在 Trudinger [TR10] 中被证明. 部分(ii)推广了 Douglas, Dupont 和 Serrin [DDS] 的一个较早的结果. 部分(iii) 实质上是 Serrin [SE3] 证明的. 极大值原理 (定理 9.7) 在本著作中是一个新的结果，尽管其证明技巧业已在 [TR7] 中被说明. 对于拟线性方程更深入的最大值原理，读者可参看文献[SE3] [SE5].

我们这里还要指出，Poincaré 不等式的形式(9.24) 乃是等周不等式的一个推论；(例如见[FE]).

习　题

利用比较原理(即定理 9.2)建立下列极大值原理.

9.1. 设 Q 在 $\Omega\times\mathbf{R}\times\{0\}$ 中是椭圆的，其系数 a^{ij}, b, $i, j=1, \cdots, n$ 关于变量 p 在 $\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 中可微. 假设存在一个常数 M 使得

$$\text{(9.30)}\qquad \text{当 } x\in\Omega,\ |z|\geqslant M \text{ 时},\ zb(x, z, 0)\leqslant 0,$$

则若 $u\in C^0(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0(=0)$，我们就有

$$\text{(9.31)}\qquad \max_{\Omega} u(|u|)\leqslant\max\{M, \max_{\partial\Omega} u^+(|u|)\}.$$

9.2. 设 Ω 包含在半径为 R 的球 B_R 中，又假设 Q 在 Ω 中是椭圆的，并且

$$\text{(9.32)}\qquad (\operatorname{sign} z)b(x, z, p)\leqslant\frac{|p|}{R}\mathscr{T}(x, z, p),\ \mathscr{T}=[a^{ij}] \text{ 的迹}$$

对所有的 $x\in\Omega$, $|z|\geqslant M$, $|p|\geqslant L$ 成立, M 和 L 为常数. 则若 $u\in C^0(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu\geqslant 0(=0)$，我们就有([SE3])

$$\text{(9.33)}\qquad \max_{\Omega} u(|u|)\leqslant\max\{M, \max_{\partial\Omega} u^+(|u|)\}+2LR.$$

(提示：遵循定理 9.4 的证明，把半空间 $x>0$ 换为 B_R.)

9.3. 设 Q 是散度形式(9.5)的算子. 证明

$$\text{(9.34)}\qquad p\cdot\mathbf{A}(x, z, p)=\int_0^1 s^2\mathscr{E}(x, z, sp)ds+p\cdot\mathbf{A}(x, z, 0).$$

由此证明：若 $\mathscr{E}\geqslant C|p|^\alpha$，这里 $C>0$, $\alpha\geqslant 1$，则

$$\text{(9.35)}\qquad p\cdot\mathbf{A}(x,z,p)\geqslant\frac{C}{\alpha+3}|p|^\alpha+p\cdot\mathbf{A}(x, z, 0).$$

9.4. 验证 9.6 节末尾的断语.

第十章

拓扑不动点定理及其应用

在本章中，拟线性方程的古典 Dirichlet 问题的可解性归结为对解建立某些先验估计. 通过适当函数空间中拓扑不动点定理的应用，这种归结得以实现. 我们将首先阐述可解性的一般准则，尔后举例说明它在一种场合的应用，在那里，所需要的先验估计容易由我们前面的结果导出. 在更一般的假设之下，这些先验估计的导出将是下几章主要关心的问题.

这里的论述所需用的不动点定理都可以作为 Brouwer 不动点定理在无穷维空间的推广而得到，Brouwer 不动点定理断言，$\mathbb{R}^n$ 中一个闭球到自身中的连续映射至少有一个不动点.

10.1. Schauder 不动点定理

Brouwer 不动点定理可按多种方式推广到无穷维空间. 我们首先需要下列到 Banach 空间的推广.

定理 10.1 设 $\mathfrak{S}$ 是 Banach 空间 $\mathfrak{B}$ 中的一个紧凸集，又设 T 是 $\mathfrak{S}$ 到自身中的一个连续映射. 则 T 有一个不动点，即对某一 $x\in\mathfrak{S}$, $Tx=x$.

证明 设 k 是任一正整数. 因为 $\mathfrak{S}$ 是紧的，故存在有限多个点 $x_1, \cdots, x_N\in\mathfrak{S}$，这里 $N=N(k)$，使球 $B^i=B_{1/k}(x_i)$, $i=1, \cdots, N$，覆盖 $\mathfrak{S}$. 设 $\mathfrak{S}_k\subset\mathfrak{S}$ 是$\{x_1, \cdots, x_N\}$的凸包，定义映射 J_k: $\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}_k$ 如下:

$$J_kx=\frac{\sum\operatorname{dist}(x,\ \mathfrak{S}-B^i)x_i}{\sum\operatorname{dist}(x,\ \mathfrak{S}-B^i)},$$

显然 J_k 连续，且对任何 $x\in\mathfrak{S}$,

$$\|J_kx-x\|\leqslant\frac{\sum\operatorname{dist}(x,\ \mathfrak{S}-B^i)\|x_i-x\|}{\sum\operatorname{dist}(x,\ \mathfrak{S}-B^i)}<\frac{1}{k}. \tag{10.1}$$

映射 $J_k \circ T$ 限制在 $\mathfrak{S}_k$ 上时必定是 $\mathfrak{S}_k$ 到自身中的一个连续映射，因此由 Brouwer 不动点定理，它有一个不动点 $x^{(k)}$. (注意 $\mathfrak{S}_k$ 同胚于某一 Euclid 空间中的一个闭球.) 因 $\mathfrak{S}$ 是紧的，故序列 $x^{(k)}$ $(k=1, 2, \cdots)$ 的一个子序列收敛到某一 $x \in \mathfrak{S}$. 我们断言 x 是 T 的一个不动点. 因为, 对 $Tx^{(k)}$ 应用(10.1), 我们有

$$\|x^{(k)} - Tx^{(k)}\| = \|J_k \circ Tx^{(k)} - Tx^{(k)}\| < \frac{1}{k},$$

因为 T 是连续的，我们断言 $Tx=x$. ∎

在下章中将说明, 定理 10.1 可应用于广泛的一类两个变量的方程. 为后一目的我们指出定理 10.1 的以下推广.

推论 10.2 设 $\mathfrak{S}$ 是 Banach 空间 $\mathfrak{B}$ 中的一个闭凸集, 又设 T 是 $\mathfrak{S}$ 到自身中的一个连续映射, 使得象 $T\mathfrak{S}$ 是准紧的. 则 T 有一个不动点.

我们指出上述定理和压缩映射原理 (定理5.1) 的一个本质的不同, 就是: 在前者中断言存在的不动点未必是唯一的.

10.2. Leray-Schauder 定理: 一个特殊情形

两个 Banach 空间之间的一个连续映射称为紧的(或完全连续的), 如果有界集的象是准紧的(即其闭包是紧的). 由推论 10.2 导出的以下定理是拟线性方程 Dirichlet 问题研究中最常使用的不动点结果.

定理 10.3 设 T 是 Banach 空间 $\mathfrak{B}$ 到自身中的紧映射, 又设存在一个常数 M, 使得

$$\|x\|_{\mathfrak{B}} < M \tag{10.2}$$

对所有满足 $x=\sigma Tx$, $x \in \mathfrak{B}$, $\sigma \in [0, 1]$ 的 x 成立. 则 T 有一个不动点.

证明 不失一般性可设 $M=1$. 我们定义映射 T^* 如下:

$$T^*x = \begin{cases} Tx, & \|Tx\| \leqslant 1, \\ \dfrac{Tx}{\|Tx\|}, & \|Tx\| \geqslant 1. \end{cases}$$

那么 T^* 是 $\mathfrak{B}$ 中单位闭球 $\bar{B}$ 到自身中的一个连续映射. 因为 $T\bar{B}$

是准紧的，故 $T^*\overline{B}$ 亦然．因此由推论 10.2 知映射 T^* 有一个不动点 x．我们断言 x 也是 T 的不动点．因为，假设 $\|Tx\|\geqslant 1$．则 $x=T^*x=\sigma Tx$，若 $\sigma=1/\|Tx\|$，而 $\|x\|=\|T^*x\|=1$，这与(10.2)矛盾，因其中 $M=1$．因此 $\|Tx\|<1$，从而 $x=T^*x=Tx$．】

附注 定理 10.3 蕴涵：若 T 是 Banach 空间到自身中的紧映射(不论(10.2)成立与否)，则对某一 $\sigma\in(0,1]$，映射 σT 具有一个不动点．此外，若估计(10.2)成立，则对所有的 $\sigma\in[0,1]$，σT 有一个不动点．

为了把定理 10.3 应用于拟线性方程的 Dirichlet 问题，我们固定一个数 $\beta\in(0,1)$，并取 Banach 空间 $\mathfrak{B}$ 是 Hölder 空间 $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$，这里 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域．设 Q 是由下式给出的一个算子：

(10.3) $$Qu=a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u+b(x,u,Du),$$

并设 Q 在 $\overline{\Omega}$ 中是椭圆的，即系数矩阵 $[a^{ij}(x,z,p)]$ 对所有的 $(x,z,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 是正定的．我们还假设对某一 $\alpha\in(0,1)$，系数 a^{ij}，$b\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，边界 $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$ 且 φ 是给定在 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的一个函数．对所有的 $v\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$，算子 T 定义如下：设 $u=Tv$ 是线性 Dirichlet 问题

(10.4) $$\text{在 }\Omega\text{ 中 } a^{ij}(x,v,Dv)D_{ij}u+b(x,v,Dv)=0,$$
$$\text{在 }\partial\Omega\text{ 上 } u=\varphi$$

在 $C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ 中的唯一解．问题(10.4)的唯一可解性由线性存在性结果(定理 6.14)保证．这样，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，在空间 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的可解性就等价于方程 $u=Tu$ 在 Banach 空间 $\mathfrak{B}=C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ 中的可解性．$\mathfrak{B}$ 中的方程 $u=\sigma Tu$ 就等价于 Dirichlet 问题

(10.5) $$\text{在 }\Omega\text{ 中 } Q_\sigma u=a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u+\sigma b(x,u,Du)=0,$$
$$\text{在 }\partial\Omega\text{ 上 } u=\sigma\varphi.$$

应用定理 10.3，我们可以证明下述存在性准则．

定理 10.4 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域，Q 是 $\overline{\Omega}$ 中的一个椭圆算子，其系数 a^{ij}，$b\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，$0<\alpha<1$．设 $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$，

$\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 那么，如果对某一 $\beta>0$，存在一个不依赖于 u 和 σ 的常数 M，使得 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Q_\sigma u=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\sigma\varphi$ $(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$ 的每一 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 解满足

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})}<M, \tag{10.6}$$

则 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，在 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中是可解的.

证明 由于本定理之前的附注，留下要证明的仅是算子 T 是连续的和紧的. 由全局 Schauder 估计(定理 6.6)，T 把 $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ 中的有界集映入 $C^{2,\alpha\beta}(\bar{\Omega})$ 中的有界集，（由 Arzela 定理）后者在 $C^2(\bar{\Omega})$ 和 $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ 中是准紧的. 为证明 T 的连续性，我们设 v_m，$m=1, 2, \cdots$ 在 $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ 中收敛到 v. 于是，因为序列 $\{Tv_m\}$ 在 $C^2(\bar{\Omega})$ 中是准紧的，故每一子序列也有一收敛子序列. 设 $\{T\bar{v}_m\}$ 就是这样一个极限为 $u\in C^2(\bar{\Omega})$ 的收敛子序列. 则因

$$\begin{aligned}&a^{ij}(x, v, Dv)D_{ij}u+b(x, v, Dv)\\&\quad=\lim_{m\to\infty}\{a^{ij}(x, \bar{v}_m, D\bar{v}_m)D_{ij}T\bar{v}_m+b(x, \bar{v}_m, D\bar{v}_m)\}=0,\end{aligned}$$

我们必有 $u=Tv$，因此序列 $\{Tv_m\}$ 自身收敛到 u. ∎

10.3. 一个应用

定理 10.4 把 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 的可解性归结为有关问题族的解对某一 $\beta>0$ 在空间 $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ 中的先验估计. 在实践中，把先验估计的推导分为四个步骤是适宜的：

I. $\sup\limits_{\Omega}|u|$ 的估计；

II. $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$ 的估计，用 $\sup\limits_{\Omega}|u|$ 表示；

III. $\sup\limits_{\Omega}|Du|$ 的估计，用 $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$ 和 $\sup\limits_{\Omega}|u|$ 表示；

IV. 对某一 $\beta>0$，$[Du]_{\beta;\Omega}$ 的估计，用 $\sup\limits_{\Omega}|Du|$，$\sup\limits_{\Omega}|u|$ 表示.

步骤 I 业已在第 9 章中处理过；(见定理 9.1, 9.3 和 9.7). 步

骤 II 和 III 行将在第 13 和 14 章中讨论. 在第 12 章中将表明步骤 IV 可以在关于 Q 的非常一般的假设之下实现. 这里我们考察一个问题来举例说明整个程序, 这里所需要的估计不难从前几章的一些结果得出. 即, 假设 Q 具有特定的散度形式

$$Qu=\operatorname{div}\mathbf{A}(Du), \tag{10.7}$$

或 $n=2$ 而 Q 形为

$$Qu=a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u,\ i,\ j=1,\ 2. \tag{10.8}$$

我们将在第 13 章中阐明边界 $\partial\Omega$ 的几何条件在拟线性方程 Dirichlet 问题的可解性中起着重要的作用. 为了现在的目的, 我们将要求边界流形

$$\Gamma=(\partial\Omega,\ \varphi)=\{(x,\ z)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}\,|\,z=\varphi(x)\}$$

满足有界斜率条件, 即对每一点 $P\in\Gamma$, 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中存在过 P 的两个平面 $z=\pi_P^+(x)$ 和 $z=\pi_P^-(x)$, 使得

(i) $\pi_P^-(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\pi_P^+(x)\quad\forall x\in\partial\Omega$;

(ii) 这些平面的斜率为一个不依赖于 P 的常数 K 一致地界住; 即对所有的 $P\in\Gamma$, $|D\pi_P^{\pm}|\leqslant k$.

若 $\partial\Omega\in C^2$, $\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$ 且 $\partial\Omega$ 是一致凸的(即其主曲率有正下界), 则 Γ 满足有界斜率条件(见[HA]). 我们现在可以断言下述存在性结果.

定理 10.5 设 Q 或者有形式(10.7), 或者有形式(10.8), 又设 Q, Ω 和 φ 满足定理 10.4 的假设. 那么, 如果边界流形($\partial\Omega$, φ)还满足有界斜率条件, 则 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 在 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中是可解的.

证明 因为 $Q_\sigma=Q$, 我们必须估计 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\sigma\varphi(0\leqslant\sigma\leqslant1)$ 的解. 我们依次进行上述的各步.

I. 从弱极大值原理(定理 3.1 或 9.1), 我们有

$$\sup_\Omega|u|=\sigma\sup_{\partial\Omega}|\varphi|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|\varphi|. \tag{10.9}$$

II. 有界斜率条件提供一个线性闸函数, 它被用来估计 $\partial\Omega$ 上的 Du. 因显然有

$$a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}\pi_P^{\pm}=0,$$

故由弱极大值原理，对所有的 $x\in\Omega$，

$$\sigma\pi_P^-(x)\leqslant u(x)\leqslant\sigma\pi_P^+(x),$$

从而我们有

$$\sup_{\partial\Omega}|Du|\leqslant\sigma K\leqslant K, \tag{10.10}$$

其中 K 是 π_P^+ 的斜率的假设的界.

III. 步骤 III 和 IV 将从下述事实推得：即对 $k=1,\cdots,n$，导数 D_ku 是第 8 章中处理过的简单线性散度结构型方程的弱解. 我们首先假设 Q 有形式(10.7)并把方程 $Qu=0$ 写成积分形式

$$\int_\Omega \mathbf{A}(Du)\cdot D\eta\,dx=0,\ \ \forall\eta\in C_0^1(\Omega). \tag{10.11}$$

固定 k，把 η 代以 $D_k\eta$ 再分部积分，就得到

$$\int_\Omega D_{p_j}A^i(Du)D_{kj}uD_i\eta\,dx=0,\ \ \forall\eta\in C_0^1(\Omega),$$

或，若令 $w=D_ku$，

$$\int_\Omega a^{ij}(Du)D_jwD_i\eta\,dx=0,\ \ \forall\eta\in C_0^1(\Omega).$$

于是函数 $w\in C^1(\overline{\Omega})$ 是线性椭圆型方程

$$D_i(\bar{a}^{ij}(x)D_jw)=0 \tag{10.12}$$

的一个弱解，其中 $\bar{a}^{ij}(x)=a^{ij}(Du(x))$，因此由 3.6 节的弱极大值原理(又见定理 8.1)，我们有

$$\sup_\Omega|Du|=\sup_{\partial\Omega}|Du|\leqslant K. \tag{10.13}$$

其次，若 Q 有形式(10.8)，则方程 $Qu=0$ 等价于

$$\frac{a^{11}}{a^{22}}D_{11}u+\frac{2a^{12}}{a^{22}}D_{12}u+D_{22}u=0,$$

于是 $\displaystyle\int_\Omega\left(\frac{a^{11}}{a^{22}}D_{11}u+\frac{2a^{12}}{a^{22}}D_{12}u+D_{22}u\right)\eta\,dx=0,\ \ \forall\eta\in C_0^1(\Omega).$

将 η 代以 $D_1\eta$ 并分部积分，令 $w=D_1u$，我们得到

$$\int_\Omega\left\{\left(\frac{a^{11}}{a^{22}}D_1w+\frac{2a^{12}}{a^{22}}D_2w\right)D_1\eta+D_2wD_2\eta\right\}dx=0,$$

因此 w 是线性椭圆型方程

$$D_i(a_1^{ij}(x)D_jw)=0,\quad i,\ j=1,\ 2 \tag{10.14}$$

的一个弱解，其系数矩阵是

$$[a_1^{ij}(x)]=\begin{bmatrix} \dfrac{a^{11}}{a^{22}}(x,\ u(x),\ Du(x)) & \dfrac{2a^{12}}{a^{22}}(x,\ u(x),\ Du(x)) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

类似地，推得 D_2u 是对应的线性椭圆型方程的一个弱解，从而由弱极大值原理再一次得知估计(10.13)成立.

IV. 导数 D_ku 的方程(10.12)和(10.14)将满足定理 8.24 的条件；其中常数 λ 和 Λ 依赖于 $\sup\limits_{\Omega}|u|$, $\sup\limits_{\Omega}|Du|$ 和系数 a^{ij}. 因此我们获得 Du 的一个内部 Hölder 估计，即对任一子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$，有

$$[Du]_{\beta;\Omega'}\leqslant Cd^{-\beta}, \tag{10.15}$$

其中正的常数 C 和 β 不依赖于 u 和 σ，而 $d=\mathrm{dist}(\Omega',\ \partial\Omega)$. 但我们不能从第 8 章的结果直接推断 Du 的全局 Hölder 估计. 我们改而进行如下. 首先利用 $\partial\Omega$ 的光滑性把 $\partial\Omega$ 的部分映射到超平面 $x_n=0$ 中. 于是对 $k=1,\ \cdots,\ n-1$，关于新坐标 $y_1,\ \cdots,\ y_n$ 的导数 $D_{y_k}u$ 可用定理 8.29 来估计. 余下的导数 $D_{y_n}u$ 最后利用方程本身以及 Morrey 估计(定理 7.19)来估计. 这个程序的细节将在第 12 章对一般散度结构方程来实行. 所得估计是

$$[Du]_{\beta;\Omega}\leqslant C, \tag{10.16}$$

其中正常数 β 和 C 不依赖于 u 和 σ. 定理 10.5 的证明至此完成. ∎

在这里我们指出，从第 13 章的结果将推出：定理 10.5 假设中的有界斜率条件可代之以量

$$\frac{\Lambda(x,\ z,\ p)\,|p|}{\mathscr{E}(x,\ z,\ p)}$$

的有界性，其中 $x\in\overline{\Omega}$, $|z|\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$, $|p|\geqslant1$；(见定理 13.1). 此外，若 Ω 是凸的，则有界斜率条件可代之以量

$$\frac{\Lambda(x,\ z,\ p)}{a^{ij}(x,\ z,\ p)(p_i-D_i\varphi)(p_j-D_j\varphi)}$$

的有界性，其中 $x\in\overline{\Omega}$, $|z|\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$, $|p|\geqslant1$. (见定理 13.2.)

10.4. Leray-Schauder 不动点定理

对于某些应用来说，希望把定理 10.4 中用的 Dirichlet 问题族：在 Ω 中 $Q_\sigma u=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\sigma\varphi$，$0\leqslant\sigma\leqslant1$ 换成别的族，它按不同方式依赖于参数 σ. 因之我们需要定理 10.3 的下列推广.

定理 10.6 设 $\mathfrak{B}$ 是一个 Banach 空间，T 是从 $\mathfrak{B}\times[0,1]$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的一个紧映射，对所有的 $x\in\mathfrak{B}$，使得 $T(x,0)=0$. 假设存在一个常数 M 使得对满足 $x=T(x,\sigma)$ 的所有 $(x,\sigma)\in\mathfrak{B}\times[0,1]$，有

$$\|x\|_{\mathfrak{B}}<M. \tag{10.17}$$

则由 $T_1x=T(x,1)$ 给出的 $\mathfrak{B}$ 到自身中的映射 T_1 有一个不动点.

定理 10.6 将从推论 10.2 的下列推论导出.

引理 10.7 设 $B=B_1(0)$ 表示 $\mathfrak{B}$ 中的单位球，又设 T 是 $\bar{B}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的连续映射，它使 $T\bar{B}$ 是准紧的且 $T\partial B\subset B$. 则 T 有一个不动点.

证明 我们定义映射 T^* 如下：

$$T^*x=\begin{cases}Tx, & \|Tx\|\leqslant1,\\ \dfrac{Tx}{\|Tx\|}, & \|Tx\|\geqslant1.\end{cases}$$

虽然 T^* 是 $\bar{B}$ 到自身中的一个连续映射，因 $T\bar{B}$ 是准紧的，故 $T^*\bar{B}$ 也如此. 因此由推论 10.2，T^* 有一个不动点 x，又因为 $T\partial B\subset B$，我们必有 $\|x\|<1$，因而 $x=Tx$.

定理 10.6 的证明 不失一般性我们可设 $M=1$. 对 $0<\varepsilon\leqslant1$，我们定义一个从 $\bar{B}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的映射 T^* 如下：

$$T^*x=T^*_\varepsilon x=\begin{cases}T\left(\dfrac{x}{\|x\|},\ \dfrac{1-\|x\|}{\varepsilon}\right), & 1-\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant1,\\ T\left(\dfrac{x}{1-\varepsilon},\ 1\right), & \|x\|<1-\varepsilon.\end{cases}$$

映射 T^* 显然是连续的. 由 T 的紧性知 $T^*\bar{B}$ 是准紧的，且 $T^*\partial B=0$. 因此由引理 10.7，映射 T^* 有一个不动点 $x(\varepsilon)$. 现令

$$\varepsilon=\frac{1}{k},\quad x_k=x\left(\frac{1}{k}\right),\quad \sigma_k=\begin{cases}k(1-\|x_k\|), & 1-\dfrac{1}{k}\leqslant\|x_k\|\leqslant 1,\\ 1, & \|x_k\|<1-\dfrac{1}{k},\end{cases}$$

这里 $k=1, 2, \cdots$. 由 T 的紧性, 如有必要过渡到一个子序列, 我们可设序列 $\{(x_k, \sigma_k)\}$ 在 $\mathfrak{B}\times[0, 1]$ 中收敛到 (x, σ). 于是推得 $\sigma=1$. 因若 $\sigma<1$, 我们对充分大的 k 必有 $\|x_k\|\geqslant 1-1/k$, 因此 $\|x\|=1$, $x=T(x, \sigma)$, 此与(10.17)矛盾. 因为 $\sigma=1$, 则由 T 的连续性我们有 $T^*_{1\,k}x_k\to T(x, 1)$, 从而 x 也是 T_1 的一个不动点. ▌

我们指出, 定理 10.3 相当于定理 10.6 当 $T(x, \sigma)=\sigma T_1x$ 时的特殊情形. 现设 Q 是一个形为(10.3)的算子, 并假定 Q, Ω 和 φ 满足定理 10.4 的假设. 为了应用定理 10.6 到 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 我们把这一问题嵌入到以下问题族中,

在 Ω 中 $Q_\sigma u=a^{ij}(x, u, Du; \sigma)D_{ij}u+b(x, u, Du; \sigma)=0$,

在 Ω 上 $u=\sigma\varphi$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$,

使得:

(i) $Q_1=Q$, $b(x, z, p; 0)=0$;

(ii) 算子 Q_σ 对所有的 $\sigma\in[0, 1]$ 在 $\overline{\Omega}$ 中是椭圆的;

(iii) 系数 a^{ij}, $b\in C^0(C^\alpha(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n); [0, 1])$, 即对每一 $\sigma\in[0, 1]$, a^{ij}, $b\in C^\alpha(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, 且被看成从 $[0, 1]$ 到 $C^\alpha(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 中的映射, 函数 a^{ij}, b 是连续的.

对所有的 $v\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\sigma\in[0, 1]$, 算子 T 定义如下: 令 $u=T(v, \sigma)$ 是线性 Dirichlet 问题:

在 Ω 中 $a^{ij}(x, v, Dv; \sigma)D_{ij}u+b(x, v, Dv; \sigma)=0$,

在 $\partial\Omega$ 上 $u=\sigma\varphi$

在 $C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ 中的唯一解. 由上面的条件(i)我们看到, Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 在空间 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的可解性等价于方程 $u=T(u, 1)$ 在 Banach 空间 $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ 中的可解性, 并且对所有的 $v\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, 有 $T(u, 0)=0$. 映射 T 的连续性和紧性由条

件(ii)和(iii)保证;这个论证的细节类似于定理 10.4 的证明,留给读者. 因此由定理 10.6 我们可作出定理 10.4 的下述推广.

定理 10.8 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域, 具有边界 $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$, 又设 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. 设 $\{Q_\sigma, 0\leqslant\sigma\leqslant 1\}$ 是一族满足上述条件(i), (ii), (iii)的算子, 并设对某一 $\beta>0$, 存在一个不依赖于 u 和 σ 的常数 M, 使得 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Q_\sigma u=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\sigma\varphi$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 的每一 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 解满足

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})}<M.$$

那么 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 在 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中是可解的.

这里我们指出,借助拓扑度理论(见[LS]),定理 10.6 和 10.8 的假设可以稍许减弱. 但因如此得到的改进并不切合本书的特殊应用,因此我们选定完全避开拓扑度理论.

10.5. 变分问题

本节我们考虑变分问题,特别是,它们与椭圆型偏微分方程之间的关系. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域, F 是 $C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 中一个给定的函数. 我们考虑在 $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ 上定义的泛函 I:

$$I(u)=\int_\Omega F(x, u, Du)\,dx. \tag{10.18}$$

注意,因为 $u\in C^{0,1}(\overline{\Omega})$,故梯度 Du 几乎处处存在且有界可测;(见 7.3 节). 现设 φ 是一个给定的 $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ 函数,对集合

$$\mathscr{C}=\{u\in C^{0,1}(\overline{\Omega})\mid 在\ \partial\Omega\ 上\ u=\varphi\}$$

中的所有 u, 考虑 $I(u)$. 我们要讨论的问题是

$$\mathscr{P}: 求\ u\in\mathscr{C}\ 使得对所有的\ v\in\mathscr{C}, 有\ I(u)\leqslant I(v).$$

我们假设 u 是 $\mathscr{P}$ 的一个解,并设 η 属于空间

$$\mathscr{C}_0=\{\eta\in C^{0,1}(\overline{\Omega})\mid 在\ \partial\Omega\ 上\ \eta=0\};$$

则对每一 $t\in\mathbb{R}$, 函数 $v=u+t\eta$ 必属于 $\mathscr{C}$. 这样一来对所有的 $t\in\mathbb{R}$, $I(u)\leqslant I(u+t\eta)$, 或定义 $\mathscr{I}(t)=I(u+t\eta)$, 我们有 $\mathscr{I}(0)\leqslant\mathscr{I}(t)$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 成立, 即 $\mathscr{I}$ 在 0 有最小值, 从而 $\mathscr{I}'(0)=0$. 进

行微分，便得方程

$$(10.19)\qquad \int_\Omega \{D_{p_i}F(x,\ u,\ Du)D_i\eta + D_zF(x,\ u,\ Du)\eta\}\,dx = 0$$

对所有 $\eta\in\mathscr{C}_0$ 成立，即函数 u 是 Euler-Lagrange 方程

$$(10.20)\qquad Qu = \operatorname{div}D_pF(x,\ u,\ Du) - D_zF(x,\ u,\ Du) = 0$$

的弱解．此外，若 $F\in C^2(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 且 $u\in C^2(\Omega)\cap C^{0,1}(\bar\Omega)$，则 u 是古典 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 的解．因此问题 $\mathscr{P}$ 的可解性蕴涵着方程 (10.20) 的 Dirichlet 问题的可解性．

我们称泛涵 I 是正则的，若被积函数 F 关于变量 p 是严格凸的．显然，若 $F\in C^2(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，则 I 的正则性等价于 Euler-Lagrange 算子 Q 的椭圆性．现设函数 $u\in C^{0,1}(\Omega)$ 满足 (10.20)，且在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$．则

$$\mathscr{I}(t)=\mathscr{I}(0)+t\mathscr{I}'(0)+\frac{t^2}{2}\mathscr{I}''(\zeta)=\mathscr{I}(0)+\frac{t^2}{2}\mathscr{I}''(\zeta)$$

对某一满足 $|\zeta|\leqslant|t|$ 的 ζ 成立．若现设函数 F 对 z 和 p 是联合凸的，则矩阵

$$\begin{bmatrix} D_{p_ip_j}F & D_{p_iz}F \\ D_{p_jz}F & D_{zz}F \end{bmatrix}$$

在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中是非负的，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{I}''(\zeta)=\int_\Omega\{&D_{p_ip_j}F(x,\ u+\zeta\eta,\ Du+\zeta D\eta)D_i\eta D_j\eta\\ &+2D_{p_iz}F(x,\ u+\zeta\eta,\ Du+\zeta D\eta)\eta D_i\eta\\ &+D_{zz}F(x,\ u+\zeta\eta,\ Du+\zeta D\eta)\eta^2\}\,dx\geqslant 0,\end{aligned}$$

因此对所有的 $t\in\mathbb{R}$，$\mathscr{I}(0)\leqslant\mathscr{I}(t)$．从而函数 u 是变分问题 $\mathscr{P}$ 的一个解，并且若 I 是正则的，我们从定理 9.5 看出 u 是唯一确定的．因此我们已经证明了

定理 10.9 设 I 是正则的，并且 F 对 z 和 p 是联合凸的．则变分问题 $\mathscr{P}$ 至多有一个解．此外，$\mathscr{P}$ 的可解性等价于 Euler-Lagrange 方程的 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，在空间 $C^{0,1}(\bar\Omega)$ 中的可解性．

其它方法

利用变分法中的直接法，我们可以开辟研究变分算子 Q 的 Dirichlet 问题的其它途径. 直接法涉及到把集 $\mathscr{C}$ 扩大到一个适当的弱可微函数空间的子集上去，在[LU4]和[MY5]中曾如此处理. 我们简单描述另一方法，其优越性在于被积函数 F 不需要是 C^2 的并且所获得的解却自动地属于 $C^{0,1}(\overline{\Omega})$. 我们对 $K\in\mathbb{R}$ 定义

$$\mathscr{C}_K=\{u\in\mathscr{C}\mid\|u\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}\leqslant K\},$$

并考虑问题

$\mathscr{P}_K$: 求 $u\in\mathscr{C}_K$ 使对所有的 $v\in\mathscr{C}_K$ 有 $I(u)\leqslant I(v)$.

对 $\mathscr{P}_K$ 我们有下述存在性结果.

定理 10.10 设 $F\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，并假设 F, D_zF, $D_{p_i}F\in C^0(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $i=1,\cdots,n$. 那么，如果 F 关于 p 是凸的，问题 $\mathscr{P}_K$ 就对任何使 $\mathscr{C}_K$ 非空的 K 可解.

证明 我们证明泛函 I 相对于 Ω 中的一致收敛性在 $\mathscr{C}_K$ 上是下半连续的. 因为 I 在 $\mathscr{C}_K$ 上又是有下界的，且 $\mathscr{C}_K$ 在 $C^0(\overline{\Omega})$ 中是准紧的，故推得结果. 于是，设 $\{u_m\}\subset\mathscr{C}_K$ 一致收敛到一个函数 $u\in\mathscr{C}_K$，则有

$$\begin{aligned}(10.21)\qquad I(u_m)-I(u)&=\int_\Omega[F(x,u_m,Du_m)-F(x,u,Du)]dx\\&=\int_\Omega[F(x,u_m,Du_m)-F(x,u,Du_m)]dx\\&\quad+\int_\Omega[F(x,u,Du_m)-F(x,u,Du)]dx\\&\geqslant-\sup_{\Omega\times\mathscr{C}_K}|D_zF|\int_\Omega|u_m-u|dx\\&\quad+\int_\Omega D_{p_i}F(x,u,Du)D_i(u_m-u)dx,\end{aligned}$$

其中用到 F 关于 p 的凸性. 对固定的 i，令 $\varphi=D_{p_i}F(x,u,Du)$ 并首先设 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$. 进行分部积分，则

$$\int_\Omega\varphi D_i(u_m-u)dx=-\int_\Omega(u_m-u)D_i\varphi\,dx\to0\quad 当\ m\to\infty\ 时.$$

若$\varphi \notin C_0^1(\Omega)$，则因$\varphi \in L^\infty(\Omega)$，故对任一$\varepsilon>0$，存在函数$\varphi_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$，使

$$\int_\Omega |\varphi_\varepsilon - \varphi| dx < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

于是
$$\left|\int_\Omega \varphi D_i(u_m - u)\,dx\right| \leqslant \left|\int_\Omega \varphi_\varepsilon D_i(u_m - u)dx\right| + \int_\Omega |\varphi_\varepsilon - \varphi|\,|D_i(u_m - u)|\,dx.$$

但当$m \to \infty$时，$\int_\Omega \varphi_\varepsilon D_i(u_m - u)dx \to 0$，而且由于$u_m$，$u \in \mathscr{C}_K$，$|D_i(u_m - u)| \leqslant 2K$，从而

$$\int_\Omega |\varphi_\varepsilon - \varphi|\,|D_i(u_m - u)|dx < \varepsilon.$$

故
$$\limsup_{m\to\infty}\left|\int_\Omega \varphi D_i(u_m - u)\,dx\right| \leqslant \varepsilon,$$

又因ε可以任意选取，我们从(10.21)就得到结论

$$\liminf_{m\to\infty} I(u_m) \geqslant I(u),$$

即，I在$\mathscr{C}_K$上相对于一致收敛性是下半连续的. ∎

我们称问题$\mathscr{P}_K$的解为问题$\mathscr{P}$的一个K-拟解. 若存在某一个空间，在其中对$K \in \mathbb{R}$所有K-拟解族是相对紧的，我们就能够得到问题$\mathscr{P}$的一个广义解，它是对应于常数$\{K_m\}$，$(K_m \to \infty)$的拟解序列$\{u_m\}$的极限. 下述定理表明这样得到的问题$\mathscr{P}$的可解性是拟解在$C^{0,1}(\overline{\Omega})$中一个先验界的推论.

定理 10.11 设u是问题$\mathscr{P}$的一个K-拟解，满足

$$|u|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} < K. \tag{10.22}$$

那么，如果$F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$关于$z$和$p$是联合凸的，则函数$u$也是问题$\mathscr{P}$的解.

证明 设$v \in \mathscr{C}$. 则由(10.22)，对某一$\varepsilon>0$，有

$$w = u + \varepsilon(v - u) \in \mathscr{C}_K.$$

因u是$\mathscr{P}_K$的解，我们就有

$$\int_\Omega F(x, u, Du)dx \leqslant \int_\Omega F(x, w, Dw)dx,$$

但由于 $w=(1-\varepsilon)u+\varepsilon v$，而且 F 关于 (z, p) 是凸的，于是

$$\int_\Omega F(x, w, Dw)dx \leqslant (1-\varepsilon)\int_\Omega F(x, u, Du)dx + \varepsilon\int_\Omega F(x, v, Dv)dx.$$

因此
$$\int_\Omega F(x, u, Du)dx \leqslant \int_\Omega F(x, v, Dv)dx. \blacksquare$$

定理 10.10 和 10.11 的组合可以看作是定理 10.4 和 10.8 的类似．把寻求拟解的所需估计分为三步，相应于 10.3 节所述存在性证明中的步骤(i)，(ii)和(iii)，那是切实可行的．即：

(i)′ 估计 $\sup_\Omega |u|$；

(ii)′ 利用(i)′，估计

$$l'(u)=\sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|};$$

(iii)′ 利用(ii)′，估计

$$l(u)=\sup_{x, y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}.$$

原来，第 9、14 和 15 章中我们的许多估计（特别是比较原理——定理 9.5）可以改写得使之对于变分问题的拟解保持有效，从而使上述步骤易于进行．此外，在关于 Q 和 $\partial\Omega$ 的适当假设之下，利用正则性考虑我们能够获得 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 的古典解．

在这里我们还要指出上述方法借助单调算子理论可以推广到散度结构算子类，并且也包括障碍问题．在这些场合，问题 $\mathscr{P}_K$ 的可解性被推广为变分不等方程的可解性问题．详细内容读者可参考文献[BW3]，[HS]，[LL]，[LST]，[PA]，[WL]．

10.6. 附录：Brouwer 不动点定理

这个附录专用于证明 Brouwer 不动点定理，使用最少量的拓扑工具．先用行列式的一个性质建立 C^∞ 函数的结果，然后利用 C^∞ 函数一致逼近来建立任意连续函数的结果．我们需要以下

引理.

引理 10.12 设 $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ 是一个 C^∞ 函数. 若

(10.23) $A_i=\det[D_0\mathbf{F}, \cdots, D_{i-1}\mathbf{F}, D_{i+1}\mathbf{F}, \cdots, D_n\mathbf{F}]$,

则以下等式成立:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i D_i A_i=0. \tag{10.24}$$

证明 假定 $i, j\in\{0, 1, \cdots, n\}$, $i\neq j$. 对 $i<j$ 设

$$C_{ij}=\det[D_{ij}\mathbf{F}, D_0\mathbf{F}, \cdots, D_{i-1}\mathbf{F}, D_{i+1}\mathbf{F}, \cdots, D_{j-1}\mathbf{F}, D_{j+1}\mathbf{F}, \cdots, D_n\mathbf{F}].$$

若 $i>j$, 令 $C_{ij}=C_{ji}$, 这蕴涵对所有 $i\neq j$, $C_{ij}=C_{ji}$. 于是由行列式的熟知性质, 我们有

$$D_iA_i=\sum_{j<i}(-1)^jC_{ij}+\sum_{j>i}(-1)^{j-1}C_{ij}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma(i, j)C_{ij},$$

其中
$$\sigma(i, j)=\begin{cases}1, & j<i,\\ 0, & j=i,\\ -1, & j>i.\end{cases}$$

因此
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iD_iA_i=\sum_{i,j=0}^{n}(-1)^{i+j}\sigma(i, j)C_{ij}.$$

因为 $\sigma(i, j)=-\sigma(j, i)$ 且 $C_{ij}=C_{ji}$, 我们就有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=0}^{n}(-1)^{i+j}\sigma(i, j)C_{ij}&=\sum_{i,j=0}^{n}(-1)^{i+j}\sigma(j, i)C_{ji}\\&=(-1)\sum_{i,j=0}^{n}(-1)^{i+j}\sigma(i, j)C_{ij}.\end{aligned}$$

这蕴涵 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^iD_iA_i=0$. ∎

下述引理是对 C^∞ 函数这一特殊情形下的 Brouwer 不动点定理.

引理 10.13 设 T 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位闭球 B 到自身中的 C^∞ 函数. 则 T 有一个不动点, 即对某一 $x\in B$, $Tx=x$.

证明 设 T: $B\to B$ 是 C^∞ 的, 且对所有的 $x\in B$, $Tx\neq x$. 因 $x\neq Tx$, 所以点 x 和 Tx 确定 $\mathbb{R}^n$ 中一条唯一的直线 $y=x+\alpha(x-Tx)$, 它与球的边界 ∂B 恰交于两点. 设 $\alpha(x)$ 是直线与 ∂B 相交

处 a 的非负值. 则 $\alpha(x)$ 是二次方程

(10.25)
$$1=\|x+\alpha(x-Tx)\|^2 = \|x\|^2+2\alpha x\cdot(x-Tx)+\alpha^2\|x-Tx\|^2$$

的较大的解, 即

(10.26)
$$\alpha(x)=\frac{x\cdot(Tx-x)+([x\cdot(x-Tx)]^2+(1-\|x\|^2)\|x-Tx\|^2)^{1/2}}{\|x-Tx\|^2}.$$

因为 $\|x-Tx\|>0$, 二次方程(10.25)的判别式不为零, 因此 α: $B\to\mathbf{R}$ 作为 C^∞ 函数的复合仍是一个 C^∞ 函数. 几何上很显然 (图 2), 若 $x\in\partial B$, 则 $\alpha(x)=0$, 即 $\|x\|=1$, 这由 (10.26) 也可直接得到. 现在定义

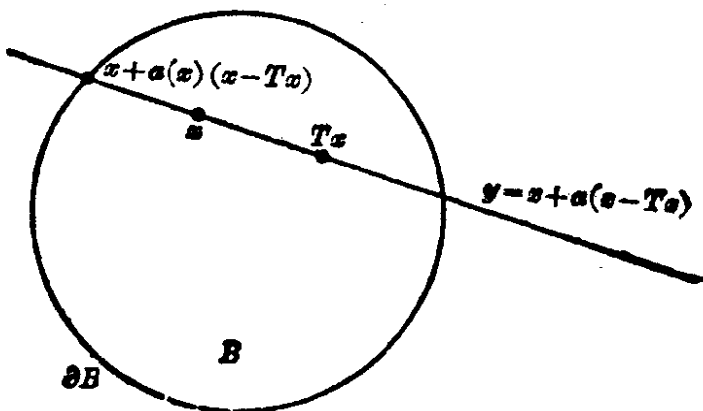


图 2

(10.27)
$$\mathbf{F}(t,x)=x+t\alpha(x)(x-Tx).$$

则 $\mathbf{F}$: $[0,1]\times B\to B$ 是一个 C^∞ 函数, 满足

(10.28)
$$\begin{cases} D_t\mathbf{F}(t,x)=0, \text{ 当 } \|x\|=1 \text{ 时, 因 } \alpha(x)=0; \\ \mathbf{F}(0,x)=x, \\ |\mathbf{F}(1,x)|=1, \text{ 由 } \alpha(x) \text{ 的定义.} \end{cases}$$

设 $A_0(t,x)=\det[D_1\mathbf{F}(t,x),\cdots,D_n\mathbf{F}(t,x)]$, 并考虑积分

(10.29)
$$I(t)=\int_B A_0(t,x)\,dx.$$

直接可见 $A_0(0,x)=\det I_n=1$, 因此 $I(0)$ 是 B 的体积, 它异于零. 因为 $|\mathbf{F}(t,x)|=1$, 故有 $A_0(1,x)\equiv 0$. 事实上, ∂B 是一个 $n-1$ 维曲面, 而 $A_0(1,x)$ 的行都是 ∂B 在 $\mathbf{F}(1,x)$ 的切空间中的向量, 从而必线性相关. 于是 $I(1)=0$. 我们来证明 $I(t)$ 是一个常数, 即 $I'(t)=0$, 以建立一个矛盾. 为证明这一点, 在(10.29)中的积分号下求微分, 由(10.24), 便得

$$I'(t)=\int_B D_t A_0(t,\ x)dx=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_B D_i A_i(t,\ x)dx,$$

其中

(10.30)

$$A_i(t,\ x)=\det[D_t\mathbf{F},\ D_1\mathbf{F},\ \cdots,\ D_{i-1}\mathbf{F},\ D_{i+1}\mathbf{F},\ \cdots,\ D_n\mathbf{F}].$$

令 $B_i=B\cap\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_i=0\}$，又对 $x\in B_i$ 定义

$$\varphi_i^+(x)=x+(0,\ \cdots,\ (1-\sum_{j\neq i}x_j^2)^{1/2},\ \cdots,\ 0),$$

$$\varphi_i^-(x)=x+(0,\ \cdots,\ -(1-\sum_{j\neq i}x_j^2)^{1/2},\ \cdots,0).$$

则 $$\int_B D_i A_i(t,x)dx=\int_{B_i}\int_{-(1-\sum_{j\neq i}x_j^2)^{1/2}}^{(1-\sum_{j\neq i}x_j^2)^{1/2}} D_i A_i(t,\ x)dx$$

$$=\int_{B_i}[A_i(t,\varphi_i^+(x))-A_i(t,\varphi_i^-(x))]dx_1\cdots dx_{i-1}d_{i+1}\cdots dx_n$$

$$=0,\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

事实上，因为 $\|\varphi_i^+(x)\|=\|\varphi_i^-(x)\|=1$，由 (10.28) 我们有 $D_t\mathbf{F}(t,\varphi_i^\pm(x))=0$. 因此 $A_i(t,\ \varphi_i^\pm(x))=0$，由(10.30)，只需注意这个行列式的第一行是 $D_t\mathbf{F}(t,\ \varphi_i^\pm(x))$.

我们至此便能够证明对于连续映射的 Brouwer 不动点定理了.

定理 10.14 设 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 中单位闭球 B 到自身中的一个连续映射. 则 T 有一个不动点，即对某一 $x\in B$, $Tx=x$.

证明 设

$$Tx=(t_1(x),\ t_2(x),\ \cdots,\ t_n(x))$$

是 T 的坐标函数分解. 由 Weierstrass 逼近定理[RY]，每一 t_i 是 $B\to[-1,\ 1]$ 的 C^∞ 函数 t_i^k 的一致收敛的极限，且对所有的 $i=1,\ \cdots,\ n$; $k=1,\ 2,\ \cdots,\ x\in B$, $|t_i^k(x)|\leqslant|t_i(x)|$. 因此

$$T=\lim_{k\to\infty}T_k$$

一致地成立，其中 $T_k=(t_1^k,\ \cdots,\ t_n^k)$: $B\to B$. 由引理 10.13，对每一整数 k，存在一点 $x_k\in B$，使

$$T_k(x_k)=x_k.$$

因为 B 是紧的，x_k 有一个子序列 x_{k_j} 收敛到一点 $x\in B$. 因此，当

$j\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|Tx-x\| &\leqslant \|Tx-Tx_{k_j}\|+\|Tx_{k_j}-T_{k_j}x_{k_j}\|+\|T_{k_j}x_{k_j}-x_{k_j}\| \\ &\quad +\|x_{k_j}-x\| \\ &=\|T(x-x_{k_j})\|+\|(T-T_{k_j})(x_{k_j})\|+\|x_{k_j}-x\|\to 0.\end{aligned}$$

于是 $Tx=x$, 因为左端是不依赖于 j 的. ▌

评注

以一个等价形式写出的 Brouwer 不动点定理首先由 Bohl 得到 [BO]. 10.6 节的证明是按照 [DS] 中介绍的方法进行的. Schauder 不动点定理, 即定理 10.1, 在 [SC1] 中建立并被 Schauder 在 [SC3] 中应用于非线性方程. 定理 10.3 和 10.7 是 Leray-Schauder 定理 [LS] 的特殊情形. 我们对这些结果的证明分别遵循 Schaefer [SH] 和 Browder [BW2] 的证明. 对 Dirichlet 问题的应用, 即定理 10.5, 系摘自 Gilbarg [GL2]. 对方程 (10.7), Merrey ([MY5] p. 98) 证明了定理 10.5, 他仅假设了有界斜率条件, 而没有作定理 10.4 中关于 Ω 和 φ 的正则性假设.

第十一章

两个变量的方程

二维拟线性椭圆型方程的理论比之高维情形在许多方面更为简单，并在某些方面更为一般．本章涉及该理论之体现二维特征的若干内容，尽管关于拟线性方程的基本结果都可以用另外的方法推广到高维去．将会看到，这个理论的特殊之点建立在对两个变量的一般线性方程有效的强先验估计之上．

11.1. 拟保角映射

许多函数论的概念和方法在两个变量的椭圆型方程理论中起着特殊的作用；(例如见[CH])．这里我们将主要涉及来源于拟保角映射理论的先验估计．从 $z=(x, y)$ 平面中一个区域 Ω 到 $w=(p, q)$ 平面的连续可微映射 $p=p(x, y)$，$q=q(x, y)$ 称为在 Ω 中是拟保角的，或 K-拟保角的，若对某一常数 $K>0$，有

$$p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2\leqslant 2K(p_xq_y-p_yq_x) \tag{11.1}$$

对所有的 $(x, y)\in\Omega$ 成立．虽然从当前目的来说，p 和 q 属于 $C^1(\Omega)$ 就够了，但本节所推演的结果同样可应用于在 $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ 中连续的 p, q，即有局部平方可积弱导数的连续函数 p, q.

当 $K<1$ 时，可以看出(11.1)蕴涵 p 和 q 是常数，因此我们将假设 $K\geqslant1$．对 $K=1$，映射 $w(z)=p(z)+iq(z)$ 定义 z 的一个解析函数．当 $K\geqslant1$ 时，不等式(11.1)的几何意义是：在 Jacobi 行列式非零的点上，z 平面和 w 平面之间的映射保持定向，并使无穷小圆变为离心率一致有界的无穷小椭圆，其短轴与长轴之比以 $\alpha=K-(K^2-1)^{1/2}>0$ 为下界．这段议论可由直接计算来验证．

考虑由下述不等式定义的更一般类型的映射 $(x, y)\to(p, q)$ 是有意义的：

(11.2) $$p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2\leqslant 2K(p_xq_y-p_yq_x)+K',$$

其中 K，K' 是常数，$K\geqslant 1$，$K'\geqslant 0$. 虽然其几何意义已不再相同，但我们仍称遵从(11.2)的映射是(K, K')-拟保角的. 在下面的讨论中将会看出，满足(11.1)和(11.2)的映射自然地来自两个变量的椭圆型方程，而 p 和 $-q$ 表示解的一阶导数.

本节的目的是推导(K, K')-拟保角映射的先验 Hölder 内估计. 主要结果将是关于 Dirichlet 积分

(11.3) $$\mathfrak{D}(r; z)=\iint\limits_{B_r(z)}|Dw|^2dx\,dy=\iint\limits_{B_r(z)}(|w_x|^2+|w_y|^2)dx\,dy$$

的引理的推论，(11.3)是(K, K')-拟保角映射 w 在圆域 $B_r(z)$ 上取的积分. 当无二义时，把 $\mathfrak{D}(r, z)$ 写成 $\mathfrak{D}(r)$，把 $B_r(z)$ 写成 B_r.

引理 11.1 设 $w=p+iq$ 在一个圆域 $B_R=B_R(z_0)$ 中是(K, K')-拟保角的，满足(11.2)，其中 $K>1$，$K'\geqslant 0$，又设在 B_R 中 $|p|\leqslant M$. 则对所有 $r\leqslant R/2$，

(11.4) $$\mathfrak{D}(r)=\iint\limits_{B_r}|Dw|^2dx\,dy\leqslant C\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha},\ \alpha=K-(K^2-1)^{1/2},$$

其中 $C=C_1(K)(M^2+K'R^2)$. 若 $K'=0$，结论对 $K=1$ 仍成立.

证明 我们首先建立在半径为 $R/2$ 的圆域中 Dirichlet 积分的一个估计. 从(11.2)，在任一同心圆 $B_r\subset B_R$ 中我们有

(11.5) $$\mathfrak{D}(r)=\iint\limits_{B_r}|Dw|^2dx\,dy\leqslant 2K\iint\limits_{B_r}\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)}dx\,dy+K'\pi r^2$$
$$=2K\int_{C_r}p\frac{\partial q}{\partial s}ds+K'\pi r^2,$$

其中 s 表示沿圆周 $C_r=\partial B_r$ 依反时针方向扩出的弧长. 利用 $\mathfrak{D}'(r)=\int_{C_r}|Dw|^2ds$ 这一事实，注意到

(11.6) $$\int_{C_r}p\frac{\partial q}{\partial s}ds\leqslant\left(\int_{C_r}p^2ds\int_{C_r}|Dq|^2ds\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\left(\int_{C_r}p^2ds\int_{C_r}|Dw|^2ds\right)^{1/2}\leqslant M(2\pi r\mathfrak{D}'(r))^{1/2}.$$

在(11.5)中利用这一估计并把右端第二项中的 r 代以 R，就得

$$(11.7) \qquad [\mathfrak{D}(r)-k_1]^2 \leqslant k_2 r \mathfrak{D}'(r),$$

其中 $k_1=\pi R^2 K'$, $k_2=8\pi M^2 K^2$. 现在或者 $\mathfrak{D}(R/2)\leqslant k_1$, 这时我们有所需要的估计；或者，若不是这样，则对某一 $r=r_0<R/2$, $\mathfrak{D}(r)>k_1$, 因而对所有更大的 r 也如此. 微分不等式(11.7)，从而可以在 $r_0<r_1\leqslant r\leqslant r_2<R$ 中积分，即得

$$\frac{1}{\mathfrak{D}(r_1)-k_1}\geqslant\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathfrak{D}'(r)dr}{[\mathfrak{D}(r)-k_1]^2}\geqslant\frac{1}{k_2}\log\frac{r_2}{r_1}.$$

取 $r_1=R/2$, $r_2=R$, 我们得到

$$(11.8) \qquad \mathfrak{D}(R/2)\leqslant\frac{8\pi}{\log 2}M^2K^2+\pi R^2K'.$$

我们指出在导出这个估计时除去 K 的非负性外对 K, K' 没有其它限制. 还要指出一般说来不可能在整个圆 B_R 中得到一个这样的估计. 这由解析函数 $w_n=z^n$, $n=1, 2, \cdots$ 的下述集合即可说明，它们在 $|z|\leqslant 1$ 中都满足 $|w_n|\leqslant 1$, 但当 $n\to\infty$ 时，

$$\iint_{|z|<1}|Dw_n|^2\,dx\,dy\to\infty;$$

另一方面，$\displaystyle\iint_{|z|<1-\delta}|Dw_n|^2\,dx\,dy\leqslant C(\delta)<\infty$ 对任一固定的 $\delta>0$ 成立，这里 $C(\delta)$ 不依赖于 n.

我们现在从 Dirichlet 积分在 $B_{R/2}$ 中的界 (11.8) 进行对 $\mathfrak{D}(r)$ 的增长的估计. 从不等式

$$|p_xq_y|\leqslant\frac{\alpha}{2}p_x^2+\frac{1}{2\alpha}q_y^2,\quad |p_yq_x|\leqslant\frac{\alpha}{2}q_x^2+\frac{1}{2\alpha}p_y^2,\quad (\alpha>0),$$

我们得到 $\qquad J=p_xq_y-p_yq_x\leqslant\dfrac{\alpha}{2}|w_x|^2+\dfrac{1}{2\alpha}|w_y|^2.$

因此，把(11.2)写成形式

$$|w_x|^2+|w_y|^2\leqslant 2KJ+K',$$

并令 $\alpha=K-(K^2-1)^{1/2}$(或等价地, $K=(1+\alpha^2)/2\alpha$), 我们发现

$$|w_x|^2\leqslant\frac{1}{\alpha^2}|w_y|^2+\frac{2K'}{1-\alpha^2}.$$

于是

$$(11.9)\qquad |w_x|^2=\frac{1}{1+\alpha^2}(|w_x|^2+\alpha^2|w_x|^2)$$
$$\leqslant\frac{1}{1+\alpha^2}\left(|Dw|^2+\frac{2\alpha^2K'}{1-\alpha^2}\right).$$

因为(11.2)在旋转下是不变的，故这个不等式当 w_x 代之以任何方向导数 w_s 时仍然有效.

我们将应用(11.9)来求得(11.5)中 $\int_{C_r} pq_s ds$ 的一个更精确的估计. 设 $\bar{p}=\bar{p}(r)$ 表示 p 在圆周 C_r 上的平均值. 则

$$(11.10)\qquad \int_{C_r} pq_s ds=\int_{C_r}(p-\bar{p})\,q_s ds\leqslant\frac{1}{2}\int_{C_r}\left[\frac{(p-\bar{p})^2}{r}+rq_s^2\right]ds.$$

现在使用 Wirtinger 不等式[HLP]

$$\int_0^{2\pi}[p(r,\ \theta)-\bar{p}]^2 d\theta\leqslant\int_0^{2\pi} p_\theta^2 d\theta,$$

即

$$(11.11)\qquad \int_{C_r}(p-\bar{p})^2 ds\leqslant r^2\int_{C_r} p_s^2 ds.$$

(把 $p=p(r,\ \theta)$展成关于 θ 的 Fourier 级数并应用 Parseval 等式，容易证明这个结果.)将(11.11)插入(11.10)中，我们看出

$$\int_{C_r} pq_s ds\leqslant\frac{r}{2}\int_{C_r}(p_s^2+q_s^2)\,ds=\frac{r}{2}\int_{C_r}|w_s|^2 ds,$$

因此由(11.9)，

$$\int_{C_r} pq_s ds\leqslant\frac{r}{2(1+\alpha^2)}\int_{C_r}|Dw|^2 ds+\frac{2\pi\alpha^2K'}{1-\alpha^4}r^2.$$

现在把这个不等式代入(11.5)，并再次利用关系式

$$\int_{C_r}|Dw|^2 ds=\mathfrak{D}'(r),$$

我们即得微分不等式

$$(11.12)\qquad \mathfrak{D}(r)\leqslant\frac{r}{2\alpha}\mathfrak{D}'(r)+kr^2,\quad k=\pi K'\left(1+\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right).$$

这蕴涵着 $$-\frac{d}{dr}(r^{-2\alpha}\mathfrak{D}(r))\leqslant 2\alpha kr^{1-2\alpha},$$

在 r 和 r_0 之间积分这个不等式即得

(11.13) $$\mathfrak{D}(r)\leqslant\left[\mathfrak{D}(r_0)+\frac{\alpha}{1-\alpha}kr_0^2\right]\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\alpha}.$$

令 $r_0=R/2$ 并插入界(11.8),我们就得到所希望的估计(11.4),其中 $C=\max\{C_2(K),\ C_3(K)\}(M^2+K'R^2)$, 而

$$C_2=\frac{32\pi}{\log 2}K^2,\ C_3=\pi\left[4+\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1+\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right)\right].$$

最后我们注意当 $K'=0$ 时, 若允许 $K=1$, 而 C 化为 C_2M^2, 上述推理将不受影响. ∎

Morrey 的下述引理提供了从 Dirichlet 积分的增长的估计过渡到关于函数本身的 Hölder 估计的本质的一步.

引理 11.2 设 $w\in C^1(\Omega)$, $\tilde{\Omega}\subset\subset\Omega$, $\operatorname{dist}(\tilde{\Omega},\ \partial\Omega)>R$. 假设存在正的常数 C, α 和 R', 使得对于中心 $z\in\tilde{\Omega}$ 半径 $r\leqslant R'\leqslant R$ 的所有圆有

$$\mathfrak{D}(r;\ z)=\iint\limits_{B_r(z)}|Dw|^2\,dx\,dy\leqslant Cr^{2\alpha},$$

则对所有使得 $|z_2-z_1|\leqslant R'$ 的 z_1, $z_2\in\tilde{\Omega}$, 我们有

$$|w(z_2)-w(z_1)|\leqslant 2\sqrt{\frac{C}{\alpha}}|z_2-z_1|^{\alpha}.$$

这个引理是应用 Schwarz 不等式从 $n=2$ 情形的定理 7.19 所得的直接推论. 以上面形式叙述的引理,其证明在[FS]中给出.

前述几个引理汇综在 $(K,\ K')$-拟保角映射的下列 Hölder 先验估计之中.

定理 11.3 设 w 是在区域 Ω 中的 $(K,\ K')$-拟保角映射, $K>1$, $K'\geqslant 0$, 并设 $|w|\leqslant M$. 设 $\tilde{\Omega}\subset\subset\Omega$, $\operatorname{dist}(\tilde{\Omega},\ \partial\Omega)>d$. 则对所有的 z_1, $z_2\in\tilde{\Omega}$, 我们有

(11.14) $$|w(z_2)-w(z_1)|\leqslant C\left|\frac{z_2-z_1}{d}\right|^{\alpha},\quad \alpha=K-(K^2-1)^{1/2},$$

其中 $C=C_1(K)(M+d\sqrt{K'})$. 若 $K'=0$, 则 $C=C_1(K)M$ 且结论对 $K=1$ 也有效.

证明 首先假设 $|z_2-z_1|\leqslant d/2$. 于是引理 11.1 和 11.2 的条件对 $R=d$ 和 $R'=d/2$ 成立, 因而有

$$|w(z_2)-w(z_1)|\leqslant L\left|\frac{z_2-z_1}{d}\right|^\alpha,$$

其中 $\quad L=C(K)(M^2+K'd^2)^{1/2}\leqslant C(K)(M+d\sqrt{K'})$.

若 $|z_2-z_1|>d/2$, 则

$$|w(z_2)-w(z_1)|\leqslant 2M\leqslant 2M\left|\frac{z_2-z_1}{\frac{1}{2}d}\right|^\alpha\leqslant 4M\left|\frac{z_2-z_1}{d}\right|^\alpha,$$

因而定理得证, 其中 $C_1(K)=\max(4,\ C(K))$. ▌

附注 (1) 指数 $\alpha=K-(K^2-1)^{1/2}$ 对于引理 11.1 和定理 11.3 的成立来说是最好的(即最大的). 这可由 K-拟保角映射 $w(z)=r^\alpha e^{i\theta}$ 这一例子看出, 其中 $\alpha=K-(K^2-1)^{1/2}$, 它在 $z=0$ 刚好有 Hölder 指数 α. 带有较小指数 α 的同样结果 (对 $K\geqslant1$, $K'\geqslant0$) 可从引理 11.1 的一个稍微更直接的证明(从(11.5)着手, 省略(11.9)) 得到; 在这种情形, 强形式的 Wirtinger 不等式(11.11)是不需要的(见[NI1]).

(2) 反例表明引理 11.1 和定理 11.3 当 $K=1$, $K'>0$ 时对于指数 $\alpha=K-(K^2-1)^{1/2}$ (即对 $\alpha=1$) 不真 (见习题 11.1). 但若一个映射满足 $K=1$ 的(11.2), 它便对任一更大的 K 值满足这样的不等式, 从而引理 11.1 和定理 11.3 的结果对于任意接近于 1 的指数 α 可以应用.

(3) 若 $\widetilde{\Omega}$ 有界, 并可用 N 个直径为 $d/2$ 的圆域覆盖, 则从证明可以看出, 定理 11.3 在较弱的假设 $|p|\leqslant M$ 之下仍然有效, 这时(11.14)中的常数 C 还依赖于 N, 从而依赖于 $\widetilde{\Omega}$ 的直径.

(4) 全局估计. 若 $w=p+iq$ 是在 C^1 区域 Ω 上的(K, K')-拟保角映射, 且 $w\in C^1(\overline{\Omega})$, 则定理 11.3 可以加强为对 w 的全局先验 Hölder 估计. 特别, 若 $|w|\leqslant M$ 并且在 $\partial\Omega$ 上 $p=0$, 则 w 满足全局 Hölder 条件, 其中 Hölder 系数和指数仅依赖于 K, K', M 和 Ω. 为指出证明的轮廓, 设 $\partial\Omega$ 是有限个彼此部分重迭的弧的并, 每一弧可用在该弧邻域中定义的一个适当的 C^1 微分同胚 $(x, y)\to(\xi, \eta)$ 拉直. 函数 w 关于变量 (ξ, η) 是拟保角的, 相应的常数 $\varkappa$, $\varkappa'$ 依赖于 K, K' 和 Ω. 通过 $\eta=0$ 作反射, 于是在扩张

了的(ξ, η)平面上$p(\xi, -\eta)=-p(\xi, \eta)$且$q(\xi, -\eta)=q(\xi, \eta)$，由此看出函数$p+iq$定义一个$(\varkappa, \varkappa')$-拟保角映射，前述的内估计对它适用．回到$(x, y)$平面，于是我们得到在$\overline{\Omega}$有效的$w$的Hölder估计；即

$$|w(z_1)-w(z_2)|\leqslant C|z_1-z_2|^\alpha,\quad z_1,\ z_2\in\overline{\Omega},$$

其中$\alpha=\alpha(K, K', \Omega)$，$C=C(K, K', \Omega, M)$．若在$\partial\Omega$上$p=\tilde{p}$，其中$\tilde{p}\in C^1(\overline{\Omega})$，且$|\tilde{p}|_{1,\Omega}\leqslant M'$，则考虑$p-\tilde{p}$代替$p$，我们看到$w$满足同类的全局估计，现在$\alpha$和$C$依赖于$K$，$K'$，$M$，$M'$和$\Omega$．

11.2. 线性方程梯度的 Hölder 估计

上节的结果现在要用来求一致椭圆型方程

$$Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=f \tag{11.15}$$

的解的一阶导数的Hölder内估计，其中a，b，c，f定义在$z=(x, y)$平面的一个区域Ω中．设$\lambda=\lambda(z)$，$\Lambda=\Lambda(z)$表示系数矩阵的特征值，于是

$$\lambda(\xi^2+\eta^2)\leqslant a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2\leqslant\Lambda(\xi^2+\eta^2)\quad \forall(\xi, \eta)\in\mathbb{R}^2; \tag{11.16}$$

并假设L在Ω中是一致椭圆的，对某一常数$\gamma\geqslant1$有

$$\frac{\Lambda}{\lambda}\leqslant\gamma. \tag{11.17}$$

我们还假设$\sup\limits_{\Omega}(|f|/\lambda)\leqslant\mu<\infty$．将(11.15)除以最小特征值$\lambda$，我们可设$\lambda=1$并且(11.16)对$\lambda=1$和$\Lambda=\gamma$成立，同时$|f|\leqslant\mu$．以下即作此种假设．令

$$p=u_x,\quad q=u_y,$$

我们可以把(11.15)写成方程组

$$\frac{a}{c}p_x+\frac{2b}{c}p_y+q_y=\frac{f}{c},\quad p_y=q_x. \tag{11.18}$$

形式地进行微分，可以看出p是散度形式的一致椭圆型方程

$$\left(\frac{a}{c}p_x+\frac{2b}{c}p_y-\frac{f}{c}\right)_x+(p_y)_y=0$$

(在弱意义下)的一个解. 类似的方程对 q 也成立; (见定理 10.5 的证明). 本节所导出的 p 和 q 的 Hölder 估计也可用第 8 章中对散度形式方程所沿用的方法来获得. 对 $n=2$, 其细节与这里介绍的基于拟保角映射的方法并无根本的差异.

将(11.18)两端乘以 cp_x, 我们得

$$p_x^2+p_y^2\leqslant ap_x^2+2bp_xp_y+cp_y^2=cJ+fp_x,\ J=q_xp_y-q_yp_x,$$

类似地有

$$q_x^2+q_y^2\leqslant aJ+fq_y.$$

把这两个不等式相加并注意到 $2\leqslant a+c=1+\Lambda\leqslant 1+\gamma$, 我们就有

$$(11.19)\quad \begin{aligned}|Dp|^2+|Dq|^2&\leqslant(a+c)J+f(p_x+q_y)\\&\leqslant(1+\gamma)J+\frac{1}{2}(1+\gamma)\mu(|p_x|+|q_y|).\end{aligned}$$

插入不等式

$$(1+\gamma)\mu(|p_x|+|p_y|)\leqslant\varepsilon(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2\varepsilon}(1+\gamma)^2\mu^2,\ \varepsilon>0,$$

并固定 $\varepsilon=1$ ($\varepsilon<2$ 的特殊选择对我们的目的是非本质的), 我们从(11.19)得到

$$(11.20)\qquad |Dp|^2+|Dq|^2\leqslant 2(1+\gamma)J+(1+\gamma)^2\mu^2/2.$$

因此 $w=p-iq$(或 $q+ip$)定义一个$(K,\ K')$-拟保角映射, 它满足(11.2), 其中的常数是

$$(11.21)\qquad K=1+\gamma,\ K'=(1+\gamma)^2\mu^2/2.$$

取 ε 充分小, 可使常数 K 任意接近$(1+\gamma)/2$.

若 $f=0$, 从(11.16)和(11.17)直接可得不等式

$$|Dw|^2=|Dp|^2+|Dq|^2\leqslant(a+c)J\leqslant(1+\gamma)J.$$

在这情形下映射 $w=p-iq$ 是 K-拟保角的, 其常数 $K=(1+\gamma)/2$. 一个初等但更仔细的计算表明最小拟保角性常数不超过 $K=(\gamma+1/\gamma)/2$(见习题 11.3, 又见[TA1]).

我们现在建立(11.15)的解的基本估计, 那是后面非线性理论所需要的. 我们用记号 $d_z=\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega)$, $d_{1,2}=\min(d_{z_1},\ d_{z_2})$, 以及在(4.17)和(6.10)中定义的内部范数和拟范数; 特别是

$$[u]_{1,\alpha}^*=\sup_{z_1,z_2\in\Omega}d_{1,2}^{1+\alpha}\frac{|Du(z_2)-Du(z_1)|}{|z_2-z_1|^\alpha},\quad |f/\lambda|_0^{(2)}=\sup_{z\in\Omega}d_z^2|f/\lambda|.$$

定理 11.4 设 u 是

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f$$

的有界 $C^2(\Omega)$ 解，其中 L 是在 $\mathbb{R}^2$ 的一个区域 Ω 中满足(11.16)和(11.17)的一致椭圆算子. 则对某一 $\alpha = \alpha(\gamma) > 0$，我们有

$$[u]^*_{1,\alpha} \leqslant C(|u|_0 + |f/\lambda|^{(2)}_0), \quad C = C(\gamma). \tag{11.22}$$

这个结果的显著特征是估计 (11.22) 仅依赖于系数的界而不依赖于任何正则性质. 这与 Schauder 估计(定理 6.2)相反，后者同时还依赖于系数的 Hölder 常数. 第 8 章对于 n 个变量散度形式方程的 Hölder 估计 (定理 8.24) 也不依赖于系数的正则性质，但这些估计仅关系解本身而不是它的导数. 定理 11.4 当 $n>2$ 时的类似结果的有效性尚属疑问.

定理 11.4 的证明 设 z_1, z_2 是 Ω 的任一对点，令 $2d = d_{1,2}$，并定义 $\Omega' = \{z \in \Omega \mid d_z > d\}$, $\Omega'' = \{z \in \Omega' \mid \mathrm{dist}(z, \partial\Omega') > d\}$. 我们注意 z_1, $z_2 \in \overline{\Omega}''$. 我们现在应用定理 11.3，不过 Ω', Ω'' 分别代替了其中的 Ω, $\tilde{\Omega}$ 而 $K = 1+\gamma$, $K' = [(1+\gamma)\sup\limits_{\Omega'}|f/\lambda|]^2/2$. $w = p - iq$ 所满足的用梯度 Du 表述的不等式 (11.14) 在 $\alpha = (1+\gamma) - (\gamma^2 + 2\gamma)^{1/2}$ 时变成

$$d^\alpha \frac{|Du(z_2) - Du(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \leqslant C(\sup_{\Omega'}|Du| + d\sup_{\Omega'}|f/\lambda|), \ (C = C(\gamma)),$$

$$\leqslant \frac{C}{d}(\sup_{\Omega'} d_z|Du(z)| + \sup_{\Omega'} d_z^2|f/\lambda|);$$

因此

$$d_{1,2}^{1+\alpha} \frac{|Du(z_2) - Du(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \leqslant C(\sup_{\Omega} d_z|Du(z)| + \sup_{\Omega} d_z^2|f/\lambda|),$$

这就蕴涵着 $\qquad [u]^*_{1,\alpha;\Omega} \leqslant C([u]^*_{1;\Omega} + |f/\lambda|^{(2)}_{0;\Omega})$.

对 $j = k = 1$, $\beta = 0$ 的内插不等式(6.8)，即

$$[u]^*_1 \leqslant \varepsilon[u]^*_{1,\alpha} + C_1|u|_0, \quad (C_1 = C_1(\varepsilon)), \tag{11.23}$$

给出 $\qquad [u]^*_{1,\alpha} \leqslant C(\varepsilon[u]^*_{1,\alpha} + C_1|u|_0 + |f/\lambda|^{(2)}_0)$.

选 ε 满足 $C\varepsilon = \frac{1}{2}$，我们对一适当的常数 $C = C(\gamma)$ 得到

$$[u]^*_{1,\alpha} \leqslant C(|u|_0 + |f/\lambda|^{(2)}_0),$$

此即所需要的结果(11.22).]

从(11.22)和内插不等式(11.23)推出范数估计

$$|u|^*_{1,\alpha}\leqslant C(|u|_0+|f/\lambda|^{(2)}_0),\quad C=C(\gamma). \tag{11.24}$$

全局估计

定理 11.4 在关于边值和解本身的适当光滑性假设下可推广为 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 估计. 因为, 在定理 11.4 的条件之外, 再设 $u\in C^2(\overline{\Omega})$, Ω 是一个 C^2 区域, 并设在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$. 则可断言有全局估计: $|u|_{1,\alpha;\Omega}\leqslant C$, 这里 $\alpha=\alpha(\gamma,\Omega)$, $C=C(\gamma,\Omega,|u|_0,|f/\lambda|_0)$. 证明轮廓如下. 为了规范化, 我们令 $v=u/(1+|Du|_0)$, 于是 v 满足 $Lv=f/(1+|Du|_0)$ 且 $|Dv|\leqslant 1$. 设边界曲线 $\partial\Omega$ 可被有限个相互部分重迭的弧覆盖, 其中每一弧可用定义在它的邻域内的一个适当的 C^2 微分同胚 $(x,y)\to(\xi,\eta)$ 拉直成 $\eta=0$ 上的线段. 与(11.20)的推导一样, 映射 $p=p(\xi,\eta)$, $q=q(\xi,\eta)$ (其中 $p=v_\xi$, $q=-v_\eta$) 在 (ξ,η) 平面中是 $(\varkappa,\varkappa')$-拟保角的, 常数 $\varkappa=\varkappa(\gamma,\Omega)$, $\varkappa'=\varkappa'(\gamma,\Omega,|f/\lambda|_0)$ (我们记住 $|Dv|\leqslant 1$). 还有在 $\eta=0$ 上 $p=0$. 与 11.1 节末尾附注 4 中同样的论证表明: p 和 q, 从而 Dv, 满足 Ω 中的全局 Hölder 估计, 其中 Hölder 指数 α 仅依赖于 γ 和 Ω, 而 Hölder 系数还依赖于 $|f/\lambda|_0$. 于是

$$[u]_{1,\alpha}\leqslant C(1+|Du|_0),\quad C=C(\gamma,\Omega,|f/\lambda|_0),$$

再通过内插(见引理 6.35), 我们得到估计

$$|u|_{1,\alpha;\Omega}\leqslant C(\gamma,\Omega,|u|_0,|f/\lambda|_0),\quad \alpha=\alpha(\gamma,\Omega).$$

若 $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 那么, 考虑用 $u-\varphi$ 来代替前面的 u, 并记住 $|u|_0$ 可通过 $\sup_{\partial\Omega}|\varphi|$ 和 $|f/\lambda|_0$ 来估计(定理 3.7), 我们就推出了先验全局界

$$|u|_{1,\alpha;\Omega}\leqslant C=C(\gamma,\Omega,|\varphi|_2,|f/\lambda|_0),\quad \alpha=\alpha(\gamma,\Omega).$$

应当强调的是这个估计不依赖于 f 和 L 的系数的任何正则性. 从证明的细节显然可见: 对 Ω 的依赖性可通过 Ω 的维数以及映射 $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ 的一阶和二阶导数的界(即 $\partial\Omega$ 的 C^2 性质)表述出来.

本章后面我们要用上述结果的下列推论．设 Ω 对某一 $\beta>0$ 是一个 $C^{2,\beta}$ 区域，f 和 L 的系数属于 $C^{\beta}(\Omega)$．设 $u\in C^{2}(\Omega)\cap C^{0}(\overline{\Omega})$，$\varphi\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Lu=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$．则 $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 并且 $|u|_{1,\alpha;\Omega}\leqslant C$，这里 $\alpha=\alpha(\gamma,\ \Omega)$，$C=C(\gamma,\ \Omega,\ |\varphi|_{2},\ |f/\lambda|_{0})$．我们注意 u 仅假设在 $\partial\Omega$ 上是连续的．由前段内容经过一个逼近论证可得证明．即，如果 a_m，b_m，c_m，f_m，$m=1,\ 2,\ \cdots$ 是在 $C^{\beta}(\overline{\Omega})$ 中适当选择的在 Ω 的紧子集上一致收敛到 $a,\ b,\ c,\ f$ 的函数序列，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $L_mu_m=f_m$，在 Ω 上 $u_m=\varphi$ 对应的解 u_m 属于 $C^{2}(\overline{\Omega})$，并且（由前述结果）有一致的 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 界 $|u_m|_{1,\alpha}\leqslant C$，其中 α 和 C 是不依赖于 m 的常数．由 Schauder 内估计和唯一性，序列 $\{u_m\}$ 收敛到 $Lu=f$ 的给定解 u．由此推出 u 也有同样的 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 界，$|u|_{1,\alpha}\leqslant C$，这正是我们的断言．

11.3. 一致椭圆型方程的 Dirichlet 问题

本节我们用第 10 章中概述的手续的一种变形来证明存在性．这里处理 Dirichlet 问题的细节一般比在第 10 章的 Dirichlet 问题中更简单，那里所用手续的某些步骤可以省去．

我们考虑定义在 $(x,\ y)$ 平面有界区域 Ω 中的一般形式

$$(11.25)\quad \begin{aligned} Qu=&a(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)u_{xx}+2b(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)u_{xy}\\ &+c(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)u_{yy}+f(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)=0\end{aligned}$$

的拟线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题．关于算子 Q 我们将假设：

(i) 函数 $a=a(x,\ y,\ u,\ p,\ q)$，$\cdots$，$f=f(x,\ y,\ u,\ p,\ q)$ 对所有的 $(x,\ y,\ u,\ p,\ q)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2}$ 有定义，另外，对某一 $\beta\in(0,1)$，$a,\ b,\ c,\ f\in C^{\beta}(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2})$．

(ii) 算子 Q 对有界的 u 在 Ω 中是一致椭圆的；即系数矩阵的特征值 $\lambda=\lambda(x,\ y,\ u,\ p,\ q)$，$\Lambda=\Lambda(x,\ y,\ u,\ p,\ q)$ 满足

$$(11.26)\quad 1\leqslant\frac{\Lambda}{\lambda}\leqslant\gamma(|u|),\ \forall(x,\ y,\ u,\ p,\ q)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2},$$

这里 γ 是非减的．

(iii) 函数 f 满足结构条件

(11.27) $$\frac{|f|}{\lambda}\leqslant\mu(|u|)(1+|p|+|q|),$$

(11.28) $$\frac{f}{\lambda}\operatorname{sign}u\leqslant\nu(1+|p|+|q|),$$

$$\forall(x,\ y,\ u,\ p,\ q)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,$$

这里 μ 是非减函数而 ν 是非负常数. 这些对应着线性方程中关于低阶项的条件. 满足(11.28)的方程曾在 9.1 节讨论过.

我们现在建立下述存在定理.

定理 11.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个满足外部球条件的区域, 又设 φ 是 $\partial\Omega$ 上的连续函数. 若 Q 是一个满足条件(i)～(iii)的椭圆型拟线性算子,则 Dirichlet 问题

(11.29) $$\text{在 }\Omega\text{ 中 }Qu=0,\ \text{在 }\partial\Omega\text{ 上 }u=\varphi,$$

有一个解 $u\in C^{2,\beta}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$.

证明 我们首先在比(11.27)更强的假设

(11.30) $$\frac{|f|}{\lambda}\leqslant\mu<\infty\quad(\mu=\text{常数})$$

之下证明定理. 推理的基础是归结为 Schauder 不动点定理(定理 10.1). 为定义出现在该定理陈述中的映射 T, 我们做下列考察. 设 v 是在 Ω 中有局部 Hölder 连续一阶导数的任一有界函数, 并设 $\bar{a}=\bar{a}(x,\ y)=a(x,\ y,\ v,\ v_x,\ v_y)$, $\cdots$ 是把 v 代替 Q 系数中的 u 所得的 Ω 中的局部 Hölder 连续函数. 因为 $|f|/\lambda$ 有界, 由定理 6.13 推出线性 Dirichlet 问题

(11.31) $$\text{在 }\Omega\text{ 中 }\bar{a}u_{xx}+2\bar{b}u_{xy}+\bar{c}u_{yy}+\bar{f}=0,\ \text{在 }\partial\Omega\text{ 上 }u=\varphi,$$

有唯一解 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$. 由定理 3.7 我们注意到

$$|u|_0=\sup_{\Omega}|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|\varphi|+C_1\mu=M_0,\ C_1=C_1(\operatorname{diam}\Omega).$$

此外, 若 $\sup_{\Omega}|v|\leqslant M_0$ 且若令 $\gamma_0=\gamma(M_0)$, 从定理 11.4 我们有

(11.32) $$|u|^*_{1,\alpha}\leqslant C(|u|_0+\mu(\operatorname{diam}\Omega)^2),\ \alpha=\alpha(\gamma_0),\ C=C(\gamma_0),$$
$$\leqslant C(M_0+\mu(\operatorname{diam}\Omega)^2)=K.$$

我们特别指出这个估计仅依赖于定义方程(11.31)的系数时所用的函数 v 的界 M_0.

现在我们引进 Banach 空间

$$C_*^{1,\alpha}=C_*^{1,\alpha}(\Omega)=\{u\in C^{1,\alpha}(\Omega)\mid |u|_{1,\alpha;\Omega}^*<\infty\},$$

其中 α 是(11.32)中的 Hölder 指数. 我们可以在集合

$$\mathfrak{S}=\{v\in C_*^{1,\alpha}\mid |v|_{1,\alpha}^*\leqslant K,\quad |v|_0\leqslant M_0\}$$

上定义映射 T 如下: 设 $u=Tv$ 是线性 Dirichlet 问题 (11.31) 对 $v\in\mathfrak{S}$ 的唯一解. 由于(11.32)和界 $|u|_0\leqslant M_0$, 我们有 $u\in\mathfrak{S}$, 因此 T 把 $\mathfrak{S}$ 映到自身中. 因为 $\mathfrak{S}$ 是凸的且在 Banach 空间

$$C_*^1=\{u\in C^1(\Omega)\mid |u|_{1;\Omega}^*<\infty\}$$

中是闭的, 只要 T 在 C_*^1 中是连续的且象 $T\mathfrak{S}$ 是准紧的, 我们就可以从 Schauder 不动点定理(推论 10.2)得出 T 在 $\mathfrak{S}$ 中有一个不动点, $u=Tu$. 这将为问题(11.29)在假设(11.30)之下给出一个解.

为证明 $T\mathfrak{S}$ 在 C_*^1 中是准紧的, 我们首先注意到集合 $\mathfrak{S}$, 从而 $T\mathfrak{S}$, 在 Ω 的每一个点是等度连续的. 我们断定 $T\mathfrak{S}$ 中的函数在每一点 $z_0\in\partial\Omega$ 也都是等度连续的. 因为设 w 是在定理 6.13 论证中的闸函数, 函数 w 仅依赖于(方程(11.31)中)椭圆性模数 γ_0 和在 z_0 的外圆的半径, 它有性质: 对任何 $\varepsilon>0$ 和不依赖于 $v\in\mathfrak{S}$ 的适当的常数 k_ε, (11.31)的解 $u=Tv$ 在 Ω 中满足不等式

$$|u(z)-\varphi(z_0)|\leqslant\varepsilon+k_\varepsilon w(z). \tag{11.33}$$

因为当 $z\to z_0$ 时 $w(z)\to 0$, 这就蕴涵集合 $T\mathfrak{S}$ 在 z_0 的等度连续性. 从而 $T\mathfrak{S}$ 的函数在 $\overline{\Omega}$ 上是等度连续的. 因为 $T\mathfrak{S}$ 是 $C_*^{1,\alpha}$ 中的有界等度连续集, 它在 C_*^1 中必是准紧的(见引理 6.33).

T 在 C_*^1 中的连续性用类似的方式来证明: 设 $v,v_n\in\mathfrak{S}$, $n=1,2,\cdots$, 并设 $|v_n-v|_1^*\to 0\,(n\to\infty)$. 考虑 $u=Tv$ 和序列 $u_n=Tv_n$, $n=1,2,\cdots$; 我们要证明 $|u_n-u|_1^*\to 0$. 由 Schauder 内估计和推论 6.3 之后的附注推出, 一个适当的(重新编号的)子序列 $\{u_m\}\subset\{u_n\}$ 连同其一阶和二阶导数在 Ω 的紧子集中一致收敛到极限方程(11.31)的一个 Ω 中的解 $\tilde{u}$, 该方程是把 v 插入 Q 系数中得到的. 我们断定对所有的 $z_0\in\partial\Omega$, $\tilde{u}(z)\to\varphi(z_0)$, 因此(由唯一性) $\tilde{u}=u=Tv$. 这是因为, 由如上的同样闸函数论证, 我们可以断定(11.33)当 u 代之以 u_m 时成立, 由此过渡到极限我们得 $\tilde{u}(z)\to\varphi(z_0)$ $(z\to$

x_0). 于是 $\tilde{u}=u$. 我们在 $\overline{\Omega}$ 上得到 $Tv_m\to Tv$ 对子序列 $\{v_m\}$ 成立.

因为序列 $\{Tv_m\}$ 包含在 $T\mathfrak{S}$ 中, 而 $T\mathfrak{S}$ 在 C^1_* 中是准紧的, $\{Tv_m\}$ 的一个适当的子序列将按 C^1_* 范数收敛到 Tv. 对 $\{v_n\}$ 的任意子序列重复同一论证, 表明 $|Tv_n-Tv|_1^*\to 0$ 对整个序列成立. 这就建立了 T 在 C^1_* 上的连续性, 正如已经注意到的, 由此即可得出在 $\mathfrak{S}$ 中存在不动点 $u=Tu$.

这样定理在 $|f|/\lambda$ 于 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 上有界这一特殊情形下, 特别当 $f\equiv 0$ 时被证明了. 现回到原始假设(iii). 以下假设在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 中 $\lambda(x, y, u, p, q)\equiv 1$ 是方便的, 因为函数 a, b, c, f 除以 λ 总可作到这一点. 这时(11.27)(11.28)变成

(11.34) $$|f|\leqslant\mu(|u|)(1+|p|+|q|).$$

(11.35) $$f\operatorname{sign}u\leqslant\nu(1+|p|+|q|),\quad \nu=\text{常数}.$$

我们通过 f 的截断来把给定的问题 (11.29) 归结为前述 f 有界的情形. 即, 设 ψ_N 表示函数

$$\psi_N(t)=\begin{cases} t, & |t|\leqslant N,\\ N\operatorname{sign}t, & |t|>N,\end{cases}$$

并定义 f 的截断为

$$f_N(x, y, u, p, q)=f(x, y, \psi_N(u), \psi_N(p), \psi_N(q)).$$

从(11.34)我们有 $|f_N|\leqslant\mu(N)(1+2N)$. 现考虑问题族

(11.36) $$\begin{aligned} Q_Nu=a(x, y, u, Du)u_{xx}+2b(x, y, u, Du)u_{xy}\\ +c(x, y, u, Du)u_{yy}+f_N(x, y, u, Du)=0,\end{aligned}$$
$$\text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } u=\varphi.$$

由 (11.35) 和定理 9.1, 这个族的任一解 u 受制于不依赖于 N 的界

(11.37) $$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|\varphi|+C_1(\nu, \operatorname{diam}\Omega)=M.$$

从前面 f 有界时问题(11.29)的讨论, 可以看出问题(11.36)——其中 f_N 有界——有一个解 $u_N\in C^{1,\alpha}_*(\Omega)\cap C^{2,\beta}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $\alpha=\alpha(\gamma)$, $\gamma=\gamma(M)$. 而且, 从定理 11.4 我们推出估计

(11.38) $$[u_N]^*_{1,\alpha}\leqslant C(|u_N|_0+|f_N|^{(2)}_0),$$

其中 $C=C(\gamma)$, $f_N=f_N(x, y, u_N, Du_N)$. 由(11.34)和(11.37),

这个不等式变成

$$[u_N]^*_{1,\alpha}\leqslant C(1+[u_N]^*_1),\quad C=C(M,\ \gamma,\ \mu,\ \mathrm{diam}\,\Omega),$$
$$\mu=\mu(M).$$

内插不等式(11.23)，其中令 $C_\varepsilon=\frac{1}{2}$，现给出不依赖于 N 的一致界

$$|u_N|^*_{1,\alpha}\leqslant C=C(M,\ \gamma,\ \mu,\ \mathrm{diam}\,\Omega). \tag{11.39}$$

将前面的估计和 Schauder 内估计 (推论 6.3) 在一个紧子集上应用于方程 $Q_Nu_N=0$ 的族，我们得到(重新编号的)子序列$\{u_n\}\subset\{u_N\}$，它收敛到 $Qu=0$ 在 Ω 中满足估计(11.39)的解 u.

留下的是证明 u 还满足边界条件 $u=\varphi$. 为此目的，我们利用与上面给出的十分类似的闸函数论证. 由于 (11.34) 和 (11.37)，每一 u_n 是线性方程

$$Q_nv=a^{ij}_nD_{ij}v+b^i_nD_iv+f_n=0,\qquad i,\ j=1,\ 2,$$

的解，其中 $a^{ij}_n(x,\ y)=a(x,\ y,\ u_n,\ Du_n)$，…，并且 $b^i_n(x,\ y)$，$f_n(x,\ y)$ 有与 n 无关的界. 在任一点 $z_0\in\partial\Omega$，前面定理 6.13 中的闸函数论证可应用于有同一闸函数 w 的这一族方程，w 仅依赖于 γ，μ 和在 z_0 的外圆半径. 因此我们在 Ω 中对任意 $\varepsilon>0$ 和适当的不依赖于 n 的常数 k_ε 得到不等式

$$|u_n(z)-\varphi(z_0)|\leqslant\varepsilon+k_\varepsilon w(z).$$

令 $n\to\infty$，我们可断言同一不等式当 u_n 代之以 u 时也成立，因此当 $z\to z_0$ 时，$u(z)\to\varphi(z_0)$. 这就完成了定理的证明. ▌

附注 (1)上述定理的证明仅基于导数的内估计，这样，关于系数和边值就允许更一般的条件. 使用全局估计，证明经简单修改即可得出一个 $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$解，只要 $\partial\Omega$ 和 φ 属于 $C^{2,\beta}$ 并且 a, b, c, $f\in C^\beta(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$；(见习题 11.5). 在这些同样的假设下，由定理 11.5 提供的解必属于 $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$. 为证明这一断语，我们首先注意在把 u 代入到系数中之后方程 $Qu=0$ 有属于 $C^\beta(\Omega)$ 的系数，同时 $u\in C^{2,\beta}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，且在 $\partial\Omega$ 上，$u=\varphi$，其中 $\varphi\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$. 按照 11.2 节末尾关于线性方程全局估计的结果，对某一 α，解 u 属于

$C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. 因而 Qu 的系数在 $C^{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ 中. 从定理 6.14 和唯一性推出 $u\in C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$, 因此 Qu 的系数在 $C^{\beta}(\overline{\Omega})$ 中. 同样我们推断 $u\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, 这正是我们所断言的.

(2) 加上条件 (11.28) 是为了保证 $Q_N u=0$ 的 Dirichlet 问题的所有可能解一致有界. 一旦这样的界预先知道, 条件 (11.28) 即可省略.

(3) 关于 $|f|/\lambda$ 的线性增长条件 (11.27) 是求得界 (11.39) 所需要的, 而界 (11.39) 是通过用 $[u]^*_{1,\alpha}$ 和 $|u|_0$ 所表示的 $[u]^*_1$ 的内插来得到的. 一旦知道了关于方程族 $Q_N u=0$ 解的梯度的先验界, 这个增长条件就是多余的了; (这种例子将在第 14 章中讨论).

(4) Ω 满足外部球条件的假设可代之以任何其它条件, 只需这个条件保证严格椭圆型线性方程 $Lu=f$ 闸函数的存在性, 这里 f 和 L 的系数有界. 例如, 只需 Ω 满足一个外部锥条件 (见习题 6.3).

11.4. 非一致椭圆型方程

在非一致椭圆型方程的研究中, 我们将看到, 与上节中区域是本质上任意的这一点不同, Dirichlet 问题的可解性一般与区域的几何性质有紧密的联系. 非一致椭圆型问题的这一特征在线性问题中已被观察到了 (6.6 节). 本节的结果强调区域的凸性对于保证 (11.40) 形式的一般拟线性椭圆型方程 Dirichlet 问题可解性的重要作用.

$$(11.40)\quad Qu=a(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)u_{xx}+2b(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)u_{xy}+c(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)u_{yy}=0.$$

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域, φ 是一个定义在 $\partial\Omega$ 上的函数. 方程 (11.40) 的 Dirichlet 问题将用边界曲线

$$\Gamma=(\partial\Omega,\ \varphi)=\{(z,\ \varphi(z))\in\mathbb{R}^3\,|\,z\in\partial\Omega\}$$

来表述. 我们仍然称(与 10.3 节中一样) Γ 和 φ 满足有界斜率条件 (带有常数 K), 如果对每一点 $P=(z_0,\ \varphi(z_0))\in\Gamma$, 存在 $\mathbb{R}^3$ 中

两张过 P 的平面

$$u=\pi_P^{\pm}(z)=\mathbf{a}^{\pm}\cdot(z-z_0)+\varphi(z_0),\quad \mathbf{a}^{\pm}=\mathbf{a}^{\pm}(z_0),$$

使得

$$(11.41)\qquad \begin{aligned}&\text{(i)}\quad \pi_P^-(z)\leqslant\varphi(z)\leqslant\pi_P^+(z),\quad \forall z\in\partial\Omega;\\ &\text{(ii)}\quad |D\pi_P^{\pm}|=|\mathbf{a}^{\pm}(z_0)|\leqslant K,\ \forall z_0\in\partial\Omega.\end{aligned}$$

条件(i)是说对每一 P, 曲线 Γ 在柱面 $\partial\Omega\times\mathbb{R}$ 上被平面 $u=\pi_P^+(z)$ 和 $u=\pi_P^-(z)$ 从上、下界住, 且在 P 与它们重合. 条件(ii)是说两平面的斜率是通过一个不依赖于 P 的常数 K 而一致有界. 显然有界斜率条件蕴涵 φ 的连续性.

我们对有界斜率条件作下列几点注释.

(1) 无论什么区域 Ω, Γ 位于一个平面上(且满足有界斜率条件), 当且仅当 φ 是一个线性函数在 $\partial\Omega$ 上的限制. 但若 Γ 不位于一个平面上且满足有界斜率条件, 则 Ω 必定是凸的. 这是因为从(11.41)我们有

$$0\not\equiv\pi_P^+(z)-\pi_P^-(z)=(\mathbf{a}^+-\mathbf{a}^-)\cdot(z-z_0)\geqslant0,\ \forall z\in\partial\Omega,$$

于是在每一点 $z_0\in\partial\Omega$, 存在一个支撑线 $(\mathbf{a}^+-\mathbf{a}^-)\cdot(z-z_0)=0$, 此即蕴涵 Ω 的凸性.

(2) 设 $\partial\Omega$ 是凸的而 $\Gamma=(\partial\Omega,\varphi)$ 满足有界斜率条件. 设 $P_i=(z_i,\varphi(z_i))$, $i=1, 2, 3$, 是 Γ 上三个不同的点. 若 z_1, z_2, z_3 共线, 则 P_1, P_2, P_3 亦在 Γ 上共线, 因为否则这些点将确定一个铅直平面, 此与 (11.41) 矛盾. 于是 φ 在 $\partial\Omega$ 的直线段上是线性的.

(3) 与有界斜率条件紧密相关且事实上与之等价的是下述三点条件, 它经常出现在关于极小曲面和两个自变量的非参数变分问题的文献中. 设 Ω 是有界的凸的; 若 $\Gamma=(\partial\Omega,\varphi)$ 上的每三个相异的点的集合都位于一个斜率$\leqslant K$ 的平面上, 则说曲线 Γ 满足带有常数 K 的三点条件. 本节末尾我们要证明带同一常数 K 的有界斜率条件和三点条件之间的等价性.

从三点条件推出由 Γ 上任何三个不共线的点确定的平面必有斜率$\leqslant K$. 于是, 若 Ω 是严格凸的(即连接 $\partial\Omega$ 的任何两点的开

直线段完全位于 Ω 中)，则每个与 Γ 至少交于三点的平面，其斜率不超过 K，反之，三点条件的这一强形式显然蕴涵 $\partial\Omega$ 是严格凸的.

(4) 不难证明若 $\varphi\in C^2$, $\partial\Omega\in C^2$ 并且 $\partial\Omega$ 的曲率处处为正，则 $\Gamma=(\partial\Omega, \varphi)$ 满足有界斜率条件，相应常数依赖于 $\partial\Omega$ 的最小曲率和 φ 的一阶、二阶导数的界；(见[SC3]，[HA]).

对 (11.40) 的 Dirichlet 问题的解将需要梯度的一个先验界，由下列引理给出.

引理 11.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域, φ 是定义在 $\partial\Omega$ 上且满足带有常数 K 的有界斜率条件的函数. 假设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足线性椭圆型方程

$$Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0, \tag{11.42}$$

在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 则

$$\sup_{\Omega}|Du|\leqslant K. \tag{11.43}$$

我们着重指出，这里只要求 L 是椭圆型的，没有其它条件加在系数上. 有趣的是这个结果甚至更一般地对任意鞍面 (saddle surface) $u=u(x, y)$ 成立(见[RA]，[NU]).

引理 11.6 的证明 首先注意，若 φ 是一个线性函数在 $\partial\Omega$ 上的限制，则由唯一性(定理 3.3)，解 u 与这个函数必在 Ω 中重合，结论(11.43)显然成立. 从上面的附注(1)得出，Ω 可以假设是凸的.

从(11.42)和 L 的椭圆性我们有

$$0\leqslant au_{xx}^2+2bu_{xx}u_{xy}+cu_{xy}^2=c(u_{xy}^2-u_{xx}u_{yy}),$$
$$0\leqslant au_{xy}^2+2b_{xy}u_{yy}+cu_{yy}^2=a(u_{xy}^2-u_{xx}u_{yy}).$$

因此 $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2\leqslant 0$, 等号仅在使 $D^2u=0$ 的点上成立. (我们注意 $u=u(x, y)$ 是一个鞍面.) 现考虑任一点 $z_0=(x_0, y_0)\in\Omega$, 在这点 $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2<0$, 并设 $u_0(x, y)=Ax+By+C$ 定义曲面 $u=u(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的切平面 Π. 函数 $w=u-u_0$ 是 (11.42) 在 Ω 中的一个解，而使 $w=0$ 的点的集合把环绕 z_0 的一个小圆恰好分为四个

区域 $D_1, \cdots, D_4$, w 在其中交错地取正值和负值, 比如说, 在 D_1, D_3 中 $w>0$, 在 D_2, D_4 中 $w<0$. 设 $D_1'\supset D_1$, $D_3'\supset D_3$ 是 Ω 中使 $w>0$ 的点的集合的(连通)成分(component), 而 $D_2'\supset D_2$, $D_4'\supset D_4$ 类似地定义. 则区域 $D_1', \cdots, D_4'$ 的每一个至少有两个边界点在 $\partial\Omega$ 上, 在那里 $w=0$, 因为否则弱极大值原理(定理 3.1)将蕴涵在该区域上 $w\equiv 0$. 由此推出 Π 与边界曲线 $\Gamma=(\partial\Omega, \varphi)$ 至少交于四个点. 由上面的附注(3)我们断言, 若这些点中的任三点是不共线的, 则 Π 的斜率不超过 K. 另一方面, 若 $\partial\Omega$ 上使 $w=0$ 的点组成一个共线集 Σ, 则(由附注(2)) φ 和 u 是线性的并在 $\partial\Omega$ 的包含 Σ 的线段上与 u_0 重合. 这将蕴涵在一个区域 D_i' 上 $w\equiv 0$, 这是一个矛盾. 于是解曲面在使 $D^2u\neq 0$ 的点上的切平面的斜率不能超过 K.

现考虑点集 S, 在其上 $D^2u=0$. 我们可以假设 $S\neq\Omega$, 因为否则 $u(x, y)$ 将是线性的而结论显然. 若 $z_0\in S$ 是使 $D^2u\neq 0$ 的点的极限, 则由连续性, 在 z_0 的切平面的斜率必不超过 K. 留下的可能性是 z_0 为 S 的内点, 这时, z_0 包含在使 $D^2u=0$ 的点的集合的一个开(连通)成分 G 中. 在 G 上, u 是线性的而其切平面与曲面 $u=u(x, y)$ 重合. 因为既是 G 的边界点又是 Ω 的内点的那些点是使 $D^2u\neq 0$ 的点的极限, 故我们得出在 G 上处处 $|Du|\leqslant K$, 特别是在 z_0 也如此. 这就完成了证明. ∎

现在能够建立方程(11.40)的存在定理, 对于 $n=2$ 的情形它推广了定理 10.5.

定理 11.7 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域, 并设方程

$$Qu=a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx}+2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy}$$
$$+c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy}=0$$

在 Ω 中是椭圆的, 对某 $\beta\in(0, 1)$, 其系数 $a, b, c\in C^{\beta}(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$. 设 φ 是定义在 $\partial\Omega$ 上满足常数为 K 的有界斜率条件的函数. 则 Dirichlet 问题:

$$\text{在 } \Omega \text{ 中 } Qu=0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上 } u=\varphi$$

有一个解 $u\in C^{2,\beta}(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$, 并且 $\sup\limits_{\Omega}|Du|\leqslant K$.

证明 假设 Ω 是凸的就够了，因为否则 φ 是一个线性函数的限制，结果是平凡的. 我们用最大特征值 $\Lambda=\Lambda(x, y, u, p, q)$ 除系数 a, b, c, 并仍以 $Qu=0$ 记所得方程. 现在算子 Q 就有最大特征值 1, 但最小特征值 λ 可以在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 中趋近零. 我们考虑方程族

$$Q_\varepsilon u=Qu+\varepsilon\Delta u=0, \quad \varepsilon>0, \tag{11.44}$$

边界条件是在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 对每一 ε, 这方程是一致椭圆的, 定理 11.5 断言在 $\partial\Omega$ 上适合 $u_\varepsilon=\varphi$ 的解 $u_\varepsilon\in C^{2,\beta}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 的存在性. (这里仅需定理 11.5 证明的第一部分.) 由引理 11.6, 解 u_ε 满足一致梯度估计,

$$\sup_{\Omega}|Du_\varepsilon|\leqslant K, \tag{11.45}$$

K 不依赖于 ε. 由极大值原理, 我们还有 $|u_\varepsilon|\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$. 作为推论, 令 $a_\varepsilon(x, y)=a(x, y, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)$, … 而得到的线性方程

$$Q_\varepsilon u=a_\varepsilon u_{xx}+2b_\varepsilon u_{xy}+c_\varepsilon u_{yy}+\varepsilon\Delta u=0 \tag{11.46}$$

在每一子区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 中有最小特征值 $\lambda_\varepsilon=\lambda(x, y, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)$, $(x, y)\in\Omega'$, 它们以一个仅依赖于 Ω' 的常数 $\lambda(\Omega')>0$ 作为一致下界; 当然最大特征值对所有 $\varepsilon<1$ 以 2 为上界. 现在定理 11.4 断言在子集 $\Omega''\subset\Omega'$ 中, (11.46)的在 $\partial\Omega$ 上满足 $u=\varphi$ 的解, 特别是解 u_ε, 满足梯度的一致(与 ε 无关的) Hölder 估计

$$[Du]_{\alpha;\Omega''}\leqslant C, \ \alpha=\alpha(\lambda(\Omega')),$$

这里 $C=C(\lambda(\Omega'), \sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|, \operatorname{dist}(\Omega'', (\partial\Omega')))$. 从而, 系数 $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon$ 在 Ω' 中局部 Hölder 连续(指数为 $\alpha\beta$), 且在 $C^{\alpha\beta}(\overline{\Omega}'')$ 中一致有界. 因为 Ω' 和 Ω'' 是任意的, 从推论 6.3 和其后的附注推出, (11.46)的解 u_ε 连同其一阶, 二阶导数的族在 Ω 的紧子集上等度连续, 因此由通常的对角线手续, 存在族 $\{u_\varepsilon\}$ 的一个序列 $\{u_{\varepsilon_n}\}$, 当 $\varepsilon\to0$ 时它在 Ω 上收敛到 $Qu=0$ 的解 u_0. 梯度的一致界(11.45)保证了在 $\overline{\Omega}$ 上的一致收敛性, 因此在 $\partial\Omega$ 上 $u_0=\varphi$. 这就完成了定理的证明. ∎

附注 (1) 关于 Ω 的某些几何条件, 诸如凸性, 一般必须加

上，这由以下经典的反例即可指出．例如，在环形区域$a<r<b$，$r=(x^2+y^2)^{1/2}$中考虑极小曲面方程

$$(11.47)\qquad (1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0.$$

若边界条件是当$r=a$时$\varphi=h$（=常数>0），当$r=b$时，$\varphi=0$，而且h充分小，边值问题的解是熟知的悬链面．但若h充分大，便没有取给定边值的解．在第13章中将看到极小曲面方程(11.47)的Dirichlet问题对任意C^2边值可解，当且仅当Ω是凸的．

(2) 在有界斜率条件中隐含的光滑性假设一般不能放松到允许连续边值φ．反例表明：甚至当边界曲线是圆周且方程的系数任意光滑时，Dirichlet问题对连续边值也未必有解；（见[FN2]）．连续边值的可解性将在第14和15章中讨论．

(3) 在定理11.7的证明中，实质的一步是把问题归结为一致椭圆情形，之所以可能，是由于存在一个先验全局梯度的界（引理11.6）．这样的梯度的界在关于算子Q的适当结构条件以及关于区域Ω的适当几何假设之下也可建立起来．这将在第13和14章中讨论．在Ω为凸的情形，有时可以用关于Q和φ的适当的上函数和下函数来代替有界斜率条件的平面，并且以本质上相同的论证来进行．例如，若Ω是凸的，而算子Q满足$\Lambda/\lambda\leqslant\mu(|u|)(1+p^2+q^2)$，则不论有界斜率条件满足与否，方程(11.40)的Dirichlet问题对任意$\varphi\in C^2$都是可解的（见13.2节）．这包括，例如，极小曲面方程(11.47)．

(4) 若Q，$\partial\Omega$和φ满足定理10.4附加的光滑性假设，即a，b，$c\in C^\beta(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$，$\partial\Omega\in C^{2,\beta}$，$\varphi\in C^{2,\beta}(\partial\Omega)$，则定理11.7提供的解属于$C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$．注意到梯度的界$|Du|\leqslant K$使$Qu=0$成为一致椭圆型方程之后，论证本质上可按定理11.5后的附注1进行．

有界斜率条件和三点条件的等价性

首先假设$\Gamma=(\partial\Omega,\varphi)$满足常数为$K$的有界斜率条件，$\Omega$是凸的．设$z_1$，$z_2$，$z_3$是$\partial\Omega$上三个不共线的点，并设

$$u=\pi_i^{\pm}(z)=\mathbf{a}_i^{\pm}\cdot(z-z_i)+\varphi(z_i),\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

是在点 $P_i=(z_i, \varphi(z_i))\in\Gamma$ 满足 (11.41) 的对应的上平面和下平面. 又设

$$u=\pi(z)=\mathbf{a}\cdot z+b=\mathbf{a}\cdot(z-z_i)+\varphi(z_i),\quad i=1, 2, 3,$$

是通过 P_1, P_2, P_3 的平面. 我们要证明 $|\mathbf{a}|\leqslant K$. (若 z_1, z_2, z_3, 从而 P_1, P_2, P_3 共线, 则可由连续性确定平面 $u=\pi(z)$ 的斜率 $\leqslant K$.) 从(11.41)推出

$$\text{(11.48)}\quad \mathbf{a}_i^-\cdot(z_j-z_i)\leqslant\mathbf{a}\cdot(z_j-z_i)\leqslant\mathbf{a}_i^+(z_j-z_i),\quad i, j=1, 2, 3.$$

因为 z_1, z_2, z_3 是一个非退化三角形的顶点, 又 $\mathbf{a}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个向量, 对某一 $i=1, 2$, 或 3, 我们有

$$\mathbf{a}=\sum_j c_j(z_j-z_i)\quad 或\quad \mathbf{a}=\sum_j c_j(z_i-z_j),\ c_j\geqslant 0.$$

从(11.48)我们断言: 或者

$$|\mathbf{a}|^2\leqslant\mathbf{a}_i^+\cdot\sum_j c_j(z_j-z_i)=\mathbf{a}_i^+\cdot\mathbf{a}\leqslant K|\mathbf{a}|,$$

或者

$$|\mathbf{a}|^2\leqslant\mathbf{a}_i^-\cdot\sum_j c_j(z_i-z_j)=\mathbf{a}_i^-\cdot\mathbf{a}\leqslant K|\mathbf{a}|,$$

因此 $|\mathbf{a}|\leqslant K$. 于是有界斜率条件蕴涵带有同一常数 K 的三点条件.

反之, 设 $\Gamma=(\partial\Omega, \varphi)$ 在凸区域 Ω 上满足常数为 K 的三点条件. 设 $A=(z_A, \varphi(z_A))$ 是 Γ 的任一这样的点, 使得 z_A 不是 $\partial\Omega$ 的一个直线段的内点. 存在一列三角形它们以不共线点 $A, B_i, C_i\in\Gamma$, $i=1, 2, \cdots$ 为顶点, 使当 $i\to\infty$ 时, $B_i, C_i\to A$, 并且由 A, B_i, C_i 确定的平面 Δ_i 收敛于一极限平面 Δ. 可以假设线段 AB_i 有一极限方向, 它在 Δ 上确定一条过 A 的直线 L, L 在 z 平面的投影 L_z 是 Ω 的一条支撑线. 显然 L 与 Γ 在 A 的切线重合, 只要这个切线存在. 设 $Q\in\Gamma$, $Q\notin L$, 又设 Π 表示由 Q 和 L 确定的平面. Π 的斜率不超过 K, 这是因为由 A, Q 和 B_i 确定的平面序列有与 Π 一样的极限斜率. 现考虑包含 L 和点 $Q\in\Gamma$, $Q\notin L$ 的平面的集合, 设这些平面由线性函数 $u=\pi_Q(z)$ 定义. 用 H 表示在 z 平面中在 L_z 包含 Ω 的一侧的半平面. 若对某一 $z\in H$, 有 $\pi_Q(z)\geqslant\pi_{Q'}(z)$, 则同一不等式对所有的 $z\in H$ 成立, 而特别是对所有的 $z\in\partial\Omega$ 成立. 这样在 A 就存在由下式定义的上平面和下平面:

$$\pi^+(z)=\sup_{\substack{Q\in\Gamma\\ Q\neq L}}\pi_Q(z),\ \pi^-(z)=\inf_{\substack{Q\in\Gamma\\ Q\neq L}}\pi_Q(z),\ z\in H.$$

由上面的讨论知平面 $u=\pi^+(z)$ 和 $u=\pi^-(z)$ 的斜率不超过 K 并且分别(在 $\partial\Omega$ 之上)位于 Γ 的上方和下方. 因此它们在 A 满足常数为 K 的有界斜率条件. 显然, 若 A 在 Γ 的直线段上,则包含这个线段的直线可以代替上述论证中的 L. 于是三点条件蕴涵带有同一常数 K 的有界斜率条件.

评注

拟保角映射的 Hölder 估计 (11.1 节) 从 Morrey[MY1] 开始已以各种方式被推导出来; (参考 [FS]). 这里的讨论属于 Finn 和 Serrin[FS], 他们推导出带有最优 Hölder 指数的估计(11.14), 当(11.2)中的 $K'=0$ 时, 它们得到的这个结果带有 Hölder 系数 CM, 而 C 是一个绝对常数.

11.2 节中线性方程的解的基本 $C^{1,\alpha}$ Hölder 估计属于 Morrey [MY1], 而在更简单的形式下, 属于 Nirenberg[NI1]. 这里的介绍是后者的一个变形, 但仿照 Morrey 使用了关于 Dirichlet 积分增长的估计. 把线性方程的这些先验 $C^{1,\alpha}$ 估计应用到拟线性方程(11.40)的 Dirichlet 问题的想法出现在[MY1]中,但它有些缺陷. 这一想法由 Nirenberg 详细地加以完善和简化, 他用 Schauder 不动点定理得到了后面叙述的一般的存在定理. 这一方法是 11.3 和 11.4 节论证的基础.

直到五十年代, 非线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题的理论主要局限于两个自变量的情形. Bernstein 的开创性工作 [BE1–4] (在他的假设下这些结果有某种局限性) 被 Leray 和 Schauder [SC3], [LS] 推广, 他们象在 Bernstein 的工作中那样使用基于解的二阶导数的先验估计的方法在系数属于 $C^{2,\beta}$ 和边值充分光滑的假设之下得到了 (11.40) 的 Dirichlet 问题的解. 这些结果由 Morrey 和 Nirenberg 的上述贡献所改善和简化, 后者证明: 若 (11.40)在 $\overline{\Omega}$ 中是椭圆的,其系数属于 $C^\beta(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$, $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\beta}$

一致凸曲线，以及 $\varphi\in C^{2,\beta}(\partial\Omega)$，则(11.40)的 Dirichlet 问题有一个属于 $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ 的解；(若 $\varphi\in C^{1,1}(\partial\Omega)$，则存在一个属于 $C^{2,\beta}(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ 的解)．定理 11.7 减弱了关于系数和边值的假设，推广了这一结果，它仅要求边值满足有界斜率条件，而不需附加正则性假设．当假设与 Nirenberg 的定理中一样时，这样得到的解仍属于 $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$；(见定理 11.7 后的附注 4)．定理 11.7 的证明仅依赖线性方程的先验内部 $C^{1,\alpha}$ 估计(定理 11.4)．Nirenberg 已经注意到这样的估计对证明存在性是足够的了 ([NI1] p. 146)．

关于对一致椭圆型方程(11.25)的 Dirichlet 问题，我们要谈到 Bers 和 Nirenberg [B, N]，Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva [LU4] 以及 von Wahl [WA] 的贡献．在 [BN] 中，存在性结果——对 Dirichlet 和 Neumann 问题二者——是对 $W^{2,2}$ 解得到的 (当 (11.25) 中的系数属于 C^α 时解也属于 $C^{2,\alpha}$)．这些结果对 $f(x, y, u, p, q)$ 假设了类似于 (11.27) 的线性增长条件．[BN] 中的证明方法和定理 11.5 是类似的，都是基于线性方程的 $C^{1,\alpha}$ 估计和 Schauder 不动点定理．[BN] 和定理 11.5 二者关于解都未作先验的假设．但若假定对(11.29)的所有解 u 有一个关于 $\sup_\Omega|u|$ 的一致的界，在下列假设下：(11.25)中的 $a, b, c, f\in C^\beta(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$，$\partial\Omega\in C^{2,\beta}$，$\varphi\in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$，及 $|f/\lambda|\leqslant C(1+p^2+q^2)$ (减弱了条件 (11.27))，则 [WA] 建立了一个关于 Dirichlet 问题的解的先验 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 界，因此推广了 [LU4] 中的一个类似结果．(不用一个先验梯度的界，这一估计用本章的方法推不出来.) Dirichlet 问题 (11.29) 的 $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ 解的存在性现在能够利用 Leray-Schauder 不动点定理来得到．

引理 11.6 中梯度界的证明受到 [FN2] 中 Finn 的引导性注解的启示．它通常从 Radó [RA] 的一个定理推断出来，该定理断言，若 $u=u(x, y)$ 是凸区域 Ω 上的一个鞍面，而且 u 在 $\bar{\Omega}$ 上连续，其边值满足常数为 K 的三点条件，则 u 在 Ω 中满足常数为 K 的 Lipschitz 条件．本定理中，所谓 $u(x, y)$ 定义了一个鞍面，是指它

连续并且对所有常数 a, b, c, 函数 $u(x, y)-(ax+by+c)$ 满足弱极大-极小值原理, 特别, 若 $u(x, y)$ 满足(11.42)或它表示一个有非正 Gauss 曲率的曲面, 就是这种情形. 一个初等(但仍非简单的)证明属于 von Neumann[NU]. Hartman 和 Nirenberg[HN], [NI4]把这一结果推广到了高维的情形.

关于有界斜率条件, Hartman[HA]分析了当 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界凸区域的边界 $\partial\Omega$ 之上满足有界斜率条件时, φ 和 $\partial\Omega$ 二者正则性之间的关系. 从这一分析, 他建立了有界斜率条件和 $(n+1)$ 点条件 $(n\geqslant 2)$ 的等价性; 但是当 $n>2$ 时, 两条件中的常数之间的关系仍是不清楚的. 在有关结果中我们指出下面这些: (i) 若 $\partial\Omega\in C^{1,\alpha}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 且 φ 在 $\partial\Omega$ 上满足有界斜率条件, 则 $\varphi\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. (ii) 若 $\partial\Omega\in C^{1,1}$ 且是一致凸的, 则 φ 在 $\partial\Omega$ 上满足有界斜率条件当且仅当 $\varphi\in C^{1,1}$. 后一结果可从 (i) 及下述事实推出: 若 Ω 是任何一致凸区域, φ 是一个 $C^{1,1}$ 函数在 $\partial\Omega$ 上的限制, 则 φ 在 $\partial\Omega$ 上满足有界斜率条件.

习　　题

11.1. 证明函数 $w(z)=z\log z$ 是 (K, K')-拟保角的, 其中 $K=1$, $K'>0$ 但不满足指数 $\alpha=1$ 的(11.14).

11.2. 对满足(11.2)的拟保角映射, 证明定理 11.3, 其中 p, q 连续且属于 $W^{1,2}_{\text{loc}}$(参阅[FS]).

11.3. 设 $Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}$ 是区域 Ω 中的一致椭圆算子, $\gamma=\sup\limits_{\Omega}(\Lambda/\lambda)$, 其中 $\lambda=\lambda(x, y)$ 和 $\Lambda=\Lambda(x, y)$ 是系数矩阵的最小和最大特征值. 若 $Lu=0$, 证明 $p-iq=u_x-iu_y$ 在 Ω 中对所有 $K\geqslant\frac{1}{2}(\gamma+1/\gamma)$ 是 K-拟保角的. [只要证明

$$\sup\frac{r^2+2s^2+t^2}{s^2-rt}=\frac{\lambda}{\Lambda}+\frac{\Lambda}{\lambda}$$

就够了. 其中上确界是对固定的 $(x, y)\in\Omega$, 关于满足 $ar+2bs+ct=0$ 的所有 r, s, t 取的.] 由此断言当 $f=0$ 时定理 11.4 对任何 Hölder 指数 $\alpha\leqslant 1/\gamma$ 成立(对 $f\neq 0$ 参阅[TA1]).

11.4. 在定理 11.4 中假设 $f/\lambda\in L^p(\Omega)$, $p>2$. 若 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 证明对某一 $\alpha\in$

$(0, 1)$，我们有

$$|u|_{1,\alpha;\Omega'} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + \|f/\lambda\|_{L^p(\Omega)}),$$

这里 $C = C(\gamma, p, \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega))$，$\alpha = \alpha(\gamma, p)$.（可以假设或者 $u \in C^2(\Omega)$，或者 $u \in W^{2,2}(\Omega)$.）

11.5. 在定理 11.5 中，假设 $\Omega \in C^{2,\beta}$，$\varphi \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$，而且 $a, b, c, f \in C^{\beta}(\bar{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2)$. 应用定理 11.4 后所讨论的 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 估计，并修改定理 11.5 的证明，证明问题 (11.29) 有一属于 $C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ 的解. [以 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 代替 C^1_* 和 $C^{1,\alpha}_*$，并相应定义集合 $\mathfrak{S}$ 和算子 T. 代替定理 6.13 而使用定理 6.14，代替内部 Schauder 估计而用全局估计. 一个更简单的证明可如下得到：考虑对应于 Dirichlet 问题

$$\text{在 } \Omega \text{ 中 } Q_\sigma u = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \sigma f = 0, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } u = \sigma\varphi$$

的方程族 $u = \sigma T u$，$\sigma \in [0, 1]$，其中 $a = a(x, y, u, u_x, u_y)$，等等. 证明解在 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中一致有界并应用定理 10.3.]

11.6. 假设方程(11.40) 中的算子 Q 在 $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ 的有界子集上是一致椭圆的. 证明定理 11.7，但不用定理 11.5. 证明中将第 254 页的集合 $\mathfrak{S}$ 代之以

$$\mathfrak{S}' = \{v \in C^{1,\alpha}_* \mid |v|^*_{1,\alpha} \leqslant K', \ |Dv| \leqslant K\},$$

这里 K 是有界斜率条件中的常数，而 K' 是在(11.32)中确定的常数.

第十二章

梯度的 Hölder 估计

本章我们推导有界区域 Ω 内形为

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du) = 0 \tag{12.1}$$

的拟线性椭圆型方程解的导数的内部和全局 Hölder 估计. 如果除定理 10.4 的假设外, 或者假定系数 a^{ij} 属于 $C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, 或者假定 Q 是散度形式的, 或假定 $n=2$, 那么由全局估计我们将看到第 10 章中叙述的证明解的存在性方法的第 IV 步能够实现. 我们将通过把问题化为第 8 章的结果, 特别是定理 8.18, 8.24, 8.26 和 8.29, 来建立本章的估计.

12.1. 散度形式的方程

现在我们假定 Q 等价于形为

$$Qu = \operatorname{div}\mathbf{A}(x, u, Du) + B(x, u, Du) \tag{12.2}$$

的椭圆算子, 其中向量函数 $\mathbf{A}\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 而 $B\in C^0(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. 那么, 如果 $u\in C^1(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$, 我们有

$$\int_\Omega \{\mathbf{A}(x, u, Du)D\zeta - B(x, u, Du)\zeta\}dx = 0,\ \forall\zeta\in C_0^1(\Omega).$$

固定 k, $1\leqslant k\leqslant n$, 用 $D_k\zeta$ 代替 ζ 并分部积分, 得到

$$\int_\Omega \{(D_{p_j}A^iD_{jk}u + \delta_kA^i)D_i\zeta + BD_k\zeta\}dx = 0,\ \ \forall\zeta\in C_0^1(\Omega),$$

其中 δ_k 是微分算子, 由下式定义:

$$\delta_kA^i(x, z, p) = p_kD_zA^i(x, z, p) + D_{x_k}A^i(x, z, p),$$

而 $D_{p_j}A^i$, δ_kA^i 和 B 的变元都是 x, $u(x)$, $Du(x)$. 所以, 记

$$\bar{a}^{ij}(x) = D_{p_j}A^i(x, u(x), Du(x)),$$

$$f_k^i(x) = \delta_kA^i(x, u(x), Du(x)) + \delta_k^iB(x, u(x), Du(x)),$$

其中 $[\delta_k^i]$ 是单位矩阵, 我们就看出导数 $w=D_ku$ 满足

$$(12.3)\qquad \int_\Omega (\bar{a}^{ij}(x)D_jw+f_k^i(x))D_i\zeta\,dx=0,\quad \forall\zeta\in C_0^1(\Omega);$$

即 w 是线性椭圆型方程

$$Lw=D_i(\bar{a}^{ij}D_jw)=-D_if_k^i$$

的广义解. 如果需要的话用一个严格包含在 Ω 内的子区域来代替 Ω, 我们可以假定 L 在 Ω 中是严格椭圆的, 并假定系数 $\bar{a}^{ij}$, f_k^i 是有界的, 即满足定理 8.22 和 8.24 的假设. 因此, 选择 λ_K, Λ_K, μ_K 使得对所有的 $x\in\Omega$, $|z|+|p|\leqslant K$, $i, j=1, 2, \cdots, n$,

$$(12.4)\qquad \begin{aligned} &0<\lambda_K\leqslant\lambda(x, z, p),\\ &\Lambda_K\geqslant|D_{p_j}A^i(x, z, p)|,\\ &\mu_K\geqslant|\delta_jA^i(x, z, p)|+|B(x, z, p)|, \end{aligned}$$

我们就得到下面的内估计.

定理 12.1 设 $u\in C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$, 其中 Q 在 Ω 中是椭圆的, 而且关于 $\mathbf{A}\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $B\in C^0(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 为散度形式(12.2). 则对于任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 有估计

$$(12.5)\qquad [Du]_{\alpha;\Omega'}\leqslant C,$$

其中

$$C=C(n,\ K,\ \Lambda_K/\lambda_K,\ \mu_K/\lambda_K,\ d),$$

$$K=|u|_{1;\Omega}=\sup_\Omega(|u|+|Du|),$$

$$d=\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)\quad 而\quad \alpha=\alpha(n,\ \Lambda_K/\lambda_K)>0.$$

为了把定理 12.1 推广为 Ω 中的全局 Hölder 估计, 我们假定在 $\bar{\Omega}$ 上 Q 是椭圆的, 且有 $\mathbf{A}\in C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $B\in C^0(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\partial\Omega\in C^2$ 以及在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 其中 $\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$. 把 u 换成 $u-\varphi$, 不失一般性, 我们可以假定在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$. 因为 $\partial\Omega\in C^2$, 故对每一点 $x_0\in\partial\Omega$, 存在一个球 $B=B(x_0)$ 和一个从 B 到开集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的一对一映射 ψ, 使得

$$\psi(B\cap\Omega)\subset\mathbb{R}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n>0\},$$

$$\psi(B\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbb{R}_+^n\ 以及\ \psi\in C^2(B),\ \psi^{-1}\in C^2(D).$$

记 $y=\psi(x)$, $v(y)=u\circ\psi^{-1}(y)$, $B^+=B\cap\Omega$, $D^+=\psi(B^+)$, 在 $\partial D^+\cap\partial\mathbb{R}_+^n$ 上我们有 $D_{y_k}v=0$, $k=1, 2, \cdots, n-1$, 而且在 B^+ 中的方程 $Qu=0$ 等价于在 D^+ 中的方程

(12.6) $\bar{Q}v = D_{y_i}\bar{A}^i(x, u, Du) + \bar{B}(x, u, Du) = 0, \ x = \psi^{-1}(y),$

其中 $\bar{\mathbf{A}}$ 和 $\bar{B}$ 由下式给出:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial y_i}{\partial x_r} A^r, \quad \bar{B} = -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_r}\right) A^r + B.$$

所以导数 $w = D_{y_k}v$, $k=1, \cdots, n-1$ 将是 D^+ 中线性椭圆型方程

$$Lw = D_i(\bar{a}^{ij}D_j w) = -D_i f_k^i$$

的广义解,其中

$$\bar{a}^{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_r}\frac{\partial y_j}{\partial x_s} D_{p_s}A^r$$

$$f_k^i(y) = \frac{\partial y_i}{\partial x_r}\frac{\partial x_s}{\partial y_k}\left(\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_j \partial x_s} D_{p_j}A^r D_{y_l}u + \delta_s A^r\right) + \delta_k^i B$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_r}\right) - \delta_k^i \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_r}\right)\right] A^r,$$

$D_{p_s}A^r$, $\delta_s A^r$, A^r 和 B 的变元是 $x = \psi^{-1}(y)$, $u(x) = v(y)$ 以及 $Du(x) = Du(\psi^{-1}(y))$. 若有必要用一较小的同心球来代替 $B(x_0)$, 我们可以假定 Jacobi 矩阵 $[D\psi] = [\partial y_i/\partial x_j]$ 在 B 中被正常数从上、下两边界住,所以在 D^+ 中带有有界系数为 $\bar{a}^{ij}$, f_k^i 的算子 L 是严格椭圆的. 因此,应用定理 8.29, 对于任何 $D' \subset\subset D$ 我们有

(12.7) $$[D_{y_k}v]_{\alpha; D'\cap D^+} \leqslant C, \quad k=1, \cdots, n-1,$$

其中 $C = C(n, K, \Lambda_K/\lambda_K, \mu_K/\lambda_K, \Omega, d)$, $K = |u|_{1;\Omega}$, $d = \mathrm{dist}(D' \cap D^+, \partial D)$ 和 $\alpha = \alpha(n, \Lambda_K/\lambda_K, \Omega) > 0$.

剩下的导数 $D_{y_n}v$ 可估计如下. 设 $y_0 \in D^+ \cap D'$, $R \leqslant d/3$, $B_{2R} = B_{2R}(y_0)$, $\eta \in C_0^1(B_{2R})$, 又设 c 是一个常数, 如果 $B_{2R} \subset D^+$, 则 $c = w(y_0)$, 如果 $B_{2R} \cap \partial\mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$, 则 $c = 0$. 那么对于 $w = D_{y_k}v$, $k=1, \cdots, n-1$, 函数 $\zeta = \eta^2(w-c)$ 属于 $W_0^{1,2}(D^+)$. 代入 $\Omega = D^+$ 的积分恒等式(12.3), 于是, 我们有

$$\int_{D^+} \eta^2 \bar{a}^{ij} D_i w D_j w \, dy \leqslant \int_{D^+} \{|2\eta(w-c)\bar{a}^{ij}D_i\eta D_j w|$$

$$+ |\eta^2 f_k^i D_i w| + |2\eta(w-c) f_k^i D_i \eta|\} dy,$$

所以由 Schwarz 不等式(7.6)和 L 的椭圆性, 我们得到

$$\int_{D^+} \eta^2 |Dw|^2 dy \leqslant C\int_{D^+} (\eta^2 + |D\eta|^2 (w-c)^2) dy,$$

其中 $C=C(n, K, \Lambda_K/\lambda_K, \mu_K/\lambda_K, \Omega)$. 现在我们进一步要求 η 满足 $0\leqslant\eta\leqslant1$, 在 $B_R=B_R(y_0)$ 中 $\eta=1$ 而且 $|D\eta|\leqslant2/R$. 因此, 由于(12.7), 我们得到

$$\int_{B_R}|Dw|^2dy\leqslant CR^{n-2}(R^2+\sup_{B_{2R}}(w-c)^2)\leqslant CR^{n-2+2\alpha},$$

其中 C 和 α 依赖于(12.7)中的 C 所依赖的那些量. 所以, 因为 $k=1, \cdots, n-1$, 假如 $j\neq n$, 我们就有

$$\int_{B_R}|D_{ij}v|^2dy\leqslant CR^{n-2+2\alpha}. \tag{12.8}$$

为了进一步进行下去, 我们对 $D_{nn}v$ 解方程(12.6), 因此, 能写

$$D_{nn}v=b^{ij}D_{ij}v+b, \quad i=1, \cdots, n, \ j=1, \cdots, n-1$$

其中 b^{ij}, b 是被 $D\psi$, K, Λ_K/λ_K 和 μ_K/λ_K 所界住的某些函数. 所以由(12.8)有

$$\int_{B_R}|D_{ni}v|^2dy\leqslant CR^{n-2+2\alpha}, \ i=1, \cdots, n,$$

因此利用不等式(7.8)和 Morrey 估计(定理 7.19), 我们能够断定估计(12.7)对于 $k=n$ 也是对的. 通过映射 ψ^{-1} 回到区域 Ω, 因此对于任何同心球 $B'\subset\subset B$, 我们有

$$[Du]_{\alpha;B'\cap\Omega}\leqslant C, \tag{12.9}$$

其中 $C=C(n, K, \Lambda_K/\lambda_K, \mu_K/\lambda_K, \Omega, B')$. 最后, 选有限个点 $x_0\in\partial\Omega$ 以及球 B' 盖住 $\partial\Omega$, 从(12.5)和(12.9)我们得到下面的全局 Hölder 估计.

定理 12.2 设 $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$, 其中 Q 在 $\overline{\Omega}$ 是椭圆的, 而且关于 $\mathbf{A}\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $B\in C^0(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 为散度形式(12.2). 那么, 如果 $\partial\Omega\in C^2$, 而且在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 其中 $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$, 我们就有估计

$$[Du]_{\alpha;\Omega}\leqslant C, \tag{12.10}$$

其中 $C=C(n, K, \Lambda_K/\lambda_K, \mu_K/\lambda_K, \Omega, \Phi)$,

$$K=|u|_{1;\Omega}, \ \Phi=|\varphi|_{2;\Omega} \text{ 而 } \alpha=\alpha(n, \Lambda_k/\lambda_k, \Omega)>0.$$

检查定理 12.1 和 12.2 的证明表明: 如果我们只假定 $u\in C^{0,1}(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$, 对某个 $\alpha_0>0$, $\partial\Omega\in C^{1,\alpha_0}$ 以及对某个

$q>n$, $\varphi\in W^{2,q}(\Omega)$，那么估计(12.5)和(12.10)仍然成立．在这种一般情形，我们必须取 $\Phi=\|\varphi\|_{W^{2,q}}(\Omega)$，而且 α 还依赖于 α_0 和 q．

12.2. 两个变量的方程

如果 $u\in C^2(\Omega)$ 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 中满足椭圆型方程(12.1)，则导数 $w_1=D_1u$, $w_2=D_2u$ 是线性椭圆型方程

$$
\begin{aligned}
L_1w_1&=D_1\left(\frac{a^{11}}{a^{22}}D_1w_1+\frac{2a^{12}}{a^{22}}D_2w_1\right)+D_{22}w_1=-D_1\frac{b}{a^{22}},\\
L_2w_2&=D_{11}w_2+D_2\left(\frac{2a^{12}}{a^{11}}D_1w_2+\frac{a^{22}}{a^{11}}D_2w_2\right)=-D_2\frac{b}{a^{11}}
\end{aligned}
\tag{12.11}
$$

在 Ω 中的广义解．从而散度形式方程的方法这里也可以用．因此，如果对所有的 $x\in\Omega$, $|z|+|p|\leqslant K$, $i, j=1, 2$, λ_K, Λ_K 和 μ_K 满足

$$
\begin{aligned}
&0<\lambda_K<\lambda(x, z, p),\\
&\Lambda_K\geqslant|a^{ij}(x, z, p)|,\\
&\mu_K\geqslant|b(x, z, p)|,
\end{aligned}
\tag{12.12}
$$

我们有下面的估计．

定理 12.3 设 $u\in C^2(\Omega)$ 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 中满足 $Qu=0$，其中 Q 在 Ω 中是椭圆的而且系数 a^{ij}, $b\in C^0(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$．则对任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$，我们有

$$[Du]_{\alpha;\Omega'}\leqslant C, \tag{12.13}$$

其中 $C=C(K, \Lambda_K/\lambda_K, \mu_K/\lambda_K, d)$,

$K=|u|_{1;\Omega}$, $d=\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 以及 $\alpha=\alpha(\Lambda_K/\lambda_K)>0$．

定理 12.4 设 $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 中满足 $Qu=0$，其中 Q 在 $\overline{\Omega}$ 是椭圆的而且系数 a^{ij}, $b\in C^0(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$．那么，如果 $\partial\Omega\in C^2$, $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$ 而且在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，我们有估计

$$[Du]_{\alpha;\Omega}\leqslant C, \tag{12.14}$$

其中 $C=C(K, \Lambda_K/\lambda_K, \mu_K/\lambda_K, \Omega, \Phi)$,

$K=|u|_{1;\Omega}$, $\Phi=|\varphi|_{2;\Omega}$ 以及 $\alpha=\alpha(\Lambda_K/\lambda_K, \Omega)>0$．

注意在第 11 章中利用拟保角映射的方法我们已给出定理 12.3 的另一个证明．我们还要指出在两个变量的情况下，线性散

度形式方程的 Hölder 估计的证明比多个变量的情形简单(见习题 8.5). 定理 12.2 后面的附注当然同样可以用到定理 12.3 和 12.4 上去.

12.3. 一般形式的方程; 内估计

我们将证明一般形式的方程(12.1)的解的导数的某种组合是散度形式的线性椭圆型方程的广义下解, 据此来处理一般形式的椭圆型方程(12.1). 然后应用弱 Harnack 不等式(定理 8.18 和 8.26)来求得所要的 Hölder 估计.

假定 Q 的系数 a^{ij} 和 b 分别属于 $C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 和 $C^0(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. 设在 Ω 中 $Qu=0$ 而且最初假定 $u\in C^3(\Omega)$. 对 x_k, $k=1, \cdots, n$ 求微商, 我们得

$$
\begin{aligned}
(12.15)\qquad & a^{ij}(x, u, Du)D_{kij}u+D_{p_l}a^{ij}(x, u, Du)D_{lk}uD_{ij}u \\
& +\delta_k a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u+D_k b(x, u, Du)=0,
\end{aligned}
$$

其中 δ_k 是由下式定义的微分算子:

$$\delta_k g(x, z, p)=D_{x_k}g(x, z, p)+p_k D_z g(x, z, p).$$

方程(12.15)可以写成下面的散度形式:

$$
\begin{aligned}
(12.16)\qquad & D_i(a^{ij}D_{kj}u)+(D_{p_l}a^{ij}-D_{p_j}a^{il})D_{lk}uD_{ij}u \\
& +\delta_k a^{ij}D_{ij}u-\delta_i a^{ij}D_{kj}u+D_k b=0.
\end{aligned}
$$

现在我们记 $v=|Du|^2$, 用 $D_k u$ 乘方程(12.16)并且从 $k=1$ 到 n 把所得方程加起来. 于是得到

$$
\begin{aligned}
(12.17)\qquad & -a^{ij}D_{ki}uD_{kj}u+\frac{1}{2}D_i(a^{ij}D_j v)+\frac{1}{2}(D_{p_l}a^{ij}-D_{p_j}a^{il})D_{ij}uD_l v \\
& +D_k u\delta_k a^{ij}D_{ij}u-\frac{1}{2}\delta_i a^{ij}D_j v+D_k(bD_k u)-b\Delta u \\
& =0.
\end{aligned}
$$

其次对 $\gamma\in\mathbb{R}$ 和 $r=1, \cdots, n$ 我们定义函数

$$(12.18)\qquad w=w_r=\gamma D_r u+v,$$

把(12.16)和(12.17)结合起来得到方程

$$(12.19)\qquad -2a^{ij}D_{ki}uD_{kj}u+D_i(a^{ij}D_jw+(2D_iu+\gamma\delta^{ir})b) \\ +(D_{p_i}a^{ij}-D_{p_j}a^{il})D_{ij}uD_lw+[(2D_ku+\gamma\delta^{kr})\delta_ka^{ij} \\ -2b\delta^{ij})]D_{ij}u-\delta_ia^{ij}D_jw=0.$$

令 $\bar{a}^{ij}=a^{ij}(x,\ u(x),\ Du(x)),$

$a_l^{ij}(x)=(D_{p_l}a^{ij}-D_{p_j}a^{il})(x,\ u(x),\ Du(x)),$

$f_r^i(x)=(2D_iu(x)+\gamma\delta^{ir})b(x,\ u(x),\ Du(x)),$

$b^{ij}(x)=[(2D_ku(x)+\gamma\delta^{kr})\delta_ka^{ij}-2\delta^{ij}b](x,\ u(x),\ Du(x)),$

$c^j(x)=\delta_ia^{ij}(x,\ u(x),\ Du(x)),$

我们把方程(12.19)写成积分形式，对所有的 $\zeta\in C_0^1(\Omega)$,

$$(12.20)\qquad \int_\Omega\{(\bar{a}^{ij}D_jw+f_r^i)D_i\zeta+(2\bar{a}^{ij}D_{ki}uD_{kj}u-a_l^{ij}D_{ij}uD_lw \\ +c^iD_iw-b^{ij}D_{ij}u)\zeta\}dx=0.$$

我们现在断言，如果只假定 $u\in C^2(\Omega)$，积分恒等式(12.20)仍然是对的．为了证明这一点，设 $\{u_m\}\subset C^3(\Omega)$ 在 $C^2(\Omega)$ 的意义下趋于 u，即对所有的 $|\beta|\leqslant 2$，在 Ω 的紧子集上 $\{D^\beta u_m\}$ 一致收敛到 $D^\beta u$. 因为在 Ω 中 $Qu=0$，我们在 Ω 的紧子集上一致地有 $Qu_m\to 0$，因此在相应于 (12.20) 的 u_m 的积分恒等式中令 $m\to\infty$，我们就得到 (12.20)．我们指出，类似的逼近推理表明实际上只需假定 $u\in C^{0,1}(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$.

为了进一步进行，需要从(12.20)中去掉包含 $D_{ij}u$ 的项．因为 Q 是椭圆的，故有

$$\bar{a}^{ij}D_{ki}uD_{kj}u\geqslant\lambda|D^2u|^2\geqslant 0,$$

其中 $\lambda=\lambda(x,\ u(x),\ Du(x))$．利用Schwarz不等式，从(12.20)，对于所有非负的 $\zeta\in C_0^1(\Omega)$ 我们有

$$(12.21)\qquad \int_\Omega(\bar{a}^{ij}D_jw+f_r^i)D_i\zeta dx \\ \leqslant\int_\Omega\left\{\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\sum|a_l^{ij}|^2\right)|Dw|^2+\frac{1}{\lambda}\sum(|c^i|^2+|b^{ij}|^2)\right\}\zeta\,dx.$$

在(12.21)中用 $\zeta e^{2\chi w}$ 代替 ζ，其中 $\chi=\sup_\Omega(1+\lambda^{-2}\sum|a_l^{ij}|^2)$，最终就把问题化归为线性理论中的问题．令

$$\tilde{a}^{ij}(x)=e^{2\chi w(x)}\bar{a}^{ij}(x),$$
$$\tilde{f}^i(x)=e^{2\chi w(x)}f_r^i(x),$$
$$\tilde{g}(x)=\frac{1}{\lambda}e^{2\chi w(x)}(\chi\sum|f_r^i|^2+\sum|c^i|^2+\sum|b^{ij}|^2),$$

这样，对于所有非负的 $\zeta\in C_0^1(\Omega)$，就有

$$\int_\Omega\{(\tilde{a}^{ij}D_jw+\tilde{f}^i)D_i\zeta-\tilde{g}\zeta\}dx\leqslant 0;\tag{12.22}$$

即函数 w 在广义意义下满足不等式

$$Lw=D_i(\tilde{a}^{ij}D_jw)\geqslant-(\tilde{g}+D_i\tilde{f}^i).\tag{12.23}$$

如果有必要用一个严格包含在 Ω 内的子区域代替 Ω，就能够假定算子 L 在 Ω 中是严格椭圆的，而且假定系数 $\tilde{a}^{ij}$，$\tilde{f}^i$ 和 $\tilde{g}$ 是有界的.

取 $\gamma>0$ 并记 $w_r^\pm=\pm\gamma D_ru+v$. 现在我们来证明：为了推出导数 D_ru，$r=1,2,\cdots,n$，的 Hölder 估计，只要证明对于所有充分大的 $\gamma\in\mathbb{R}$ 和 $r=1,\cdots,n$，不等式(12.23)成立就够了. 因为选 γ 充分大，我们能保证在某种意义下函数 $w_r^\pm$ 的行为和 $\pm D_ru$ 的行为是一样的. γ 的适当选取就是 $\gamma=10nM$，其中 $M=\sup|Du|$. 对于这样选取的 γ，如果 $\mathfrak{S}$ 是 Ω 的一个任意子集，又取 r 使得

$$\operatorname*{osc}_{\mathfrak{S}}D_ru\geqslant\operatorname*{osc}_{\mathfrak{S}}D_iu,\ i=1,\cdots,n.$$

就容易证明

$$8nM\operatorname*{osc}_{\mathfrak{S}}D_ru\leqslant\operatorname*{osc}_{\mathfrak{S}}w_r^\pm\leqslant 12nM\operatorname*{osc}_{\mathfrak{S}}D_ru.\tag{12.24}$$

此外，为简单起见记 $w^\pm=w_r^\pm$，并令 $W^\pm=\sup\limits_{\mathfrak{S}}w^\pm$，我们有

$$\begin{aligned}\inf_{\mathfrak{S}}\sum_{+,-}(W^\pm-w^\pm)&\geqslant 10nM(\sup_{\mathfrak{S}}D_ru-\inf_{\mathfrak{S}}D_ru)\\&\quad+2\inf_{\mathfrak{S}}v-2\sup_{\mathfrak{S}}v\\&\geqslant 6nM\operatorname*{osc}_{\mathfrak{S}}D_ru\geqslant\frac{1}{2}\operatorname*{osc}_{\mathfrak{S}}w^\pm.\end{aligned}\tag{12.25}$$

现在我们能够方便地应用弱 Harnack 不等式(定理 8.18)了. 取 $\mathfrak{S}=B_{4R}(y)\subset\Omega$. 函数 $u=W^\pm-w^\pm$ 将是方程

$$Lu=(\tilde{g}+D_i\tilde{f}^i)$$

在 $\mathfrak{S}$ 中的非负上解. 相应地选 λ_K 和 μ_K 使得对于所有的 $x\in\Omega$, $|z|+|p|\leqslant K$, $i, j, k=1, \cdots, n$,

$$0<\lambda_K<\lambda(x, z, p),$$

$$(12.26)\qquad \begin{aligned}\mu_K\geqslant &|a^{ij}(x, z, p)|+|D_{p_k}a^{ij}(x, z, p)|\\ &+|D_z a^{ij}(x, z, p)|+|D_{x_k}a^{ij}(x, z, p)|\\ &+|b(x, z, p)|,\end{aligned}$$

并在定理 8.18 中令 $p=1$, 就得到估计

$$(12.27)\qquad R^{-n}\int_{B_{2R}}(W^{\pm}-w^{\pm})dx\leqslant C(W^{\pm}-\sup_{B_R}w^{\pm}+\sigma(R)).$$

其中 $C=C(n, K, \mu_K/\lambda_K)$, $K=|u|_{1;\Omega}$ 和 $\sigma(R)=R+R^2$. 利用 (12.25), 我们看到或者对 w^+ 或者对 w^- 不等式

$$\frac{1}{\omega_n(2R)^n}\int_{B_{2R}}(W^{\pm}-w^{\pm})\,dx\geqslant\frac{1}{4}\operatorname*{osc}_{B_{4R}}w^{\pm}$$

成立. 我们假定不等式对 w^+ 成立. 那么从 (12.27) 有

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{B_{4R}}w^+&\leqslant C(W^+-\sup_{B_R}w^++\sigma(R))\\ &\leqslant C(\operatorname*{osc}_{B_{4R}}w^+-\operatorname*{osc}_{B_R}w^++\sigma(R)).\end{aligned}$$

因此, 记 $\omega(R)=\operatorname*{osc}_{B_R}w^+$, 我们有

$$\omega(R)\leqslant\gamma\omega(4R)+\sigma(R),$$

其中 $\gamma=1-C^{-1}$, $C=C(n, K, \mu_K/\lambda_K)$.

我们现在需要引理 8.23 的下述推广.

引理 12.5 设 $\omega_1, \cdots, \omega_N, \bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_N\geqslant0$ 是区间 $(0, R_0)$ 上的非减函数, 使得对每个 $R\leqslant R_0$, 可求得一个函数 $\bar{\omega}_r$, 满足不等式

$$(12.28)\qquad \begin{aligned}&\bar{\omega}_r(R)\geqslant\delta_0\omega_i(R),\ i=1, \cdots, N,\\ &\bar{\omega}_r(\delta R)\leqslant\gamma\bar{\omega}_r(R)+\sigma(R),\end{aligned}$$

其中 σ 也是非减的, $\delta_0>0$ 而 $0<\gamma, \delta<1$. 则对于任何 $\mu\in(0, 1)$ 和 $R\leqslant R_0$, 有

$$(12.29)\qquad \omega_i(R)\leqslant C\left\{\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\omega_0+\sigma(R^{\mu}R_0^{1-\mu})\right\},$$

其中 $C=C(N, \delta_0, \delta, \gamma)$ 和 $\alpha=\alpha(N, \delta_0, \delta, \gamma, \mu)$ 是正常数, 而 $\omega_0=\max_{i=1,\cdots,N}\bar{\omega}_i(R_0)$.

简单修改一下引理 8.23 立即得到引理 12.5 的证明，所以这里从略．如果现在设 $B_0=B_{R_0}(y)$ 是任何一个包含在 Ω 中的球，那么从引理 12.5 取 $N=2n$，$\delta_0=8nM$，$\delta=\frac{1}{4}$ 而 $\mu=\frac{1}{2}$ 立即得到：对任何 $R\leqslant R_0$，$i=1, \cdots, n$，

$$\underset{B_R(y)}{\operatorname{osc}} D_i u\leqslant CR^\alpha, \tag{12.30}$$

其中 $C=C(n, K, \mu_K/\lambda_K, R_0)$，$\alpha=\alpha(n, K, \mu_K/\lambda_K)$．因此我们得到了在下述定理中断言的所要内估计．

定理 12.6 设 $u\in C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$，其中 Q 在 Ω 中是椭圆的，又系数 $a^{ij}\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，$b\in C^0(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$．则对任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$，我们有估计

$$[Du]_{\alpha;\Omega'}\leqslant C, \tag{12.31}$$

其中 $C=C(n, K, \mu_K/\lambda_K, d)$，$K=|u|_{1;\Omega}$，$d=\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 以及 $\alpha=\alpha(n, K, \mu_K/\lambda_K)$．

12.4. 一般形式的方程；边界估计

现在假定在 $\overline{\Omega}$ 上 Q 是椭圆的，并假定系数 a^{ij} 和 b 分别属于 $C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 和 $C^0(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$．设 $\partial\Omega\in C^2$，并设在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，其中 $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$．用 $u-\varphi$ 代替 u，不失一般性我们可以假定在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$．此外，如果 $\mathscr{U}$ 是 Ω 的一个开子集，而 $x\to y=\psi(x)$ 定义一个 $C^2(\mathscr{U})$ 坐标变换，对于 $x\in\mathscr{U}$，我们有

$$\begin{aligned} Qu=&a^{kl}(x, u, Du)\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_l}D_{y_iy_j}u \\ &+a^{ij}(x, u, Du)\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}D_{y_k}u+b(x, u, Du). \end{aligned} \tag{12.32}$$

因此 $\mathscr{U}$ 中的方程 $Qu=0$ 变换成 $\psi(\mathscr{U})$ 中的方程 $\widetilde{Q}v=0$，其中 $v=u\circ\psi^{-1}$，并且 $\widetilde{Q}$ 满足和 Q 同样的假设．所以只要在平直边界部分的一个邻域中来考虑方程(12.1)就够了．因此，设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，使得 $D^+=D\cap\Omega\subset\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n|x_n>0\}$ 而且 $D\cap\partial\Omega\subset\partial\mathbb{R}^n_+$．定义函数 v' 和 w 如下：

(12.33) $$v' = \sum_{i=1}^{n-1} |D_i u|^2,$$

$$w = w_r = \gamma D_r u + v', \ r = 1, \cdots, n-1, \ \gamma \in \mathbb{R}.$$

显然, 在 $D \cap \partial\Omega$ 上 $w=0$, 如对指标 k 从 1 到 $n-1$ 求和, w 就满足方程(12.20). 于是, 在这些限制下我们有

$$\tilde{a}^{ij} D_{ki} u D_{kj} u \geqslant \lambda \sum_{j \neq n} |D_{ij} u|^2.$$

把方程(12.1)写成形式

(12.34) $$D_{nn} u = -\frac{1}{a^{nn}} \Big(\sum_{(i,j) \neq (n,n)} a^{ij} D_{ij} u + b \Big)$$

来估计缺少的导数 $D_{nn}u$. 把(12.34)插入到(12.20)中, 同上节一样进行, 我们得到积分不等式(12.22), 其中 Ω 用 D' 来代替而 χ 和 $\tilde{g}$ 分别换为

$$\chi = \sup_{\Omega} (1 + \lambda^{-2} \sum |a_i^{ij}|^2)(1 + \lambda^{-2} \sum |a^{ij}|^2),$$

$$\tilde{g} = \lambda^{-1} e^{2\chi w} (\chi \sum |f_r^i|^2 + \sum |c^i|^2 + b^2 (1 + \lambda^{-2} \sum |a_i^{ij}|^2)$$
$$+ \sum |b^{ij}|^2 (1 + \lambda^{-2} \sum |a^{ij}|^2)).$$

考虑中心在 $y \in D \cap \partial\Omega$ 的球, 用边界弱 Harnack 不等式(定理 8.26)代替内 Harnack 不等式(定理 8.18), 遵循上节的证明, 我们得到 u 的切向导数的一个边界 Hölder 估计. 即, 对于任何中心在 $y \in D \cap \partial\Omega$ 的球 $B_0 = B_{R_0}(y) \subset D$, 任何 $R \leqslant R_0$, 有

(12.35) $$\operatorname*{osc}_{D^+ \cap B_R(y)} D_i u \leqslant C R^{\alpha}, \ i = 1, \cdots, n-1,$$

其中 $C = C(n, K, \mu_K/\lambda_K, R_0)$, $K = |u|_{1;\Omega}$ 而 $\alpha = \alpha(n, K, \mu_K/\lambda_K) > 0$.

从(12.35)过渡到剩下的导数 $D_n u$ 的估计类似于 12.1 节中散度形式方程的相应步骤. 设 $D' \subset\subset D$, $d = \operatorname{dist}(D' \cap D^+, \partial D)$, $y \in D^+ \cap D'$, $R \leqslant d/3$, $B_{2R} = B_{2R}(y)$, $\eta \in C_0^1(B_{2R})$, 又设 c 是一常数, 使得如果 $B_{2R} \subset D^+$, 则 $c = \inf_{B_{2R}} w$, 如果 $B_{2R} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, 则 $c = 0$. 对于由(12.33)给出的 w, 函数 $\zeta = \eta^2 (w-c)^+ = \eta^2 \sup(w-c, 0)$ 是非负的并且属于 $W_0^{1,2}(D^+)$. 代入 $\Omega = D^+$ 的积分不等式(12.22)中, 则有

$$\int_{w>c}\eta^2|Dw|^2dx\leqslant C\int_{D^+}(\eta^2+|D\eta|^2(w-c)^2)dx,$$

其中 $C=C(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K)$. 现在进一步要求 η 使得 $0\leqslant\eta\leqslant 1$, 在 $B_R=B_R(y)$ 中 $\eta=1$ 以及 $|D\eta|\leqslant 2/R$. 那么

$$(12.36)\quad \int_{B_R^+}|Dw|^2dx\leqslant CR^{n-2}(R^2+\sup_{B_{2R}}(w-c)^2),$$

其中 $B_R^+=\{x\in B_R|w(x)\geqslant c\}$

$$\leqslant CR^{n-2}(R^2+(\operatorname*{osc}_{B_{2R}}w)^2)$$

$$\leqslant CR^{n-2+2\alpha}\quad 由(12.30)和(12.35),$$

其中 $C=C(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K,\ d)$ 和 $\alpha=\alpha(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K)$. 在(12.36)中取 $\gamma=0$ 和 $\gamma=1$, 那么对 $B_{2R}\subset D^+$(在这种情形 $B_R^+=B_R=D^+\cap B_R$), 我们有

$$(12.37)\quad \int_{D^+\cap B_R}|DD_ru|^2dx\leqslant 2\int_{D^+\cap B_R}(|Dv'|^2+|Dw|^2)dx$$

$$\leqslant CR^{n-2+2\alpha},\ r=1,\ \cdots,\ n-1.$$

如果 $B_{2R}\cap\partial\Omega\neq\emptyset$, 在(12.36)中我们要求 $\gamma=0,\ \pm 1$. 则再次得到估计(12.37), 因为在 $D'\cap B_R$ 的每个点上函数 $w^\pm=\pm D_ru+v'$ 中至少有一个是非负的. 所以, 只要 $j\neq n$, 对任何 $y\in D'\cap D^+$, $R\leqslant d/3$, 我们就有估计

$$(12.38)\quad \int_{D^+\cap B_R}|D_{ij}u|^2dx\leqslant CR^{n-2+2\alpha}.$$

由于(12.34), 对 $i=j=n$, 估计(12.38)也成立. 因此, 由定理 **7.19** 有

$$(12.39)\quad [Du]_{\alpha;D'\cap D^+}\leqslant C,$$

其中 $C=C(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K,\ d)$, $\alpha=\alpha(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K)>0$. 最后, 回到原来的区域 D 和边值 φ, 我们得到 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva 的基本全局 Hölder 估计.

定理 12.7 设 $u\in C^2(\bar\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$, 其中 Q 在 $\bar\Omega$ 上是椭圆的, 而系数 $a^{ij}\in C^1(\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $b\in C^0(\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. 那么, 如果 $\partial\Omega\in C^2$, $\varphi\in C^2(\bar\Omega)$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 我们就有估计

$$(12.40)\quad [Du]_{\alpha;\Omega}\leqslant C,$$

其中 $C=C(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K,\ \Omega,\ \Phi)$, $K=|u|_{1;\Omega}$, $\Phi=|\varphi|_{2;\Omega}$, $\alpha=\alpha(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K,\ \Omega)>0$.

检查定理 12.6 和 12.7 的证明表明：如果只假定 $u\in C^{0,1}(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$ 以及对某个 $q>n$, $\varphi\in W^{2,q}(\Omega)$, 则估计 (12.31) 和 (12.40) 仍然成立. 在这种一般情形中，我们必须取 $\Phi=\|\varphi\|_{W^{2,q}(\Omega)}$, 而常数 C 和 α 将依赖于 q.

此外，从本章的发展来说以下事情是明显的：全局和内部 Hölder 估计能够作为部分内估计的特殊情形来实现. 也就是，假定算子 Q 满足定理 12.7 的假设条件，又设 T 是 $\partial\Omega$ 的 C^2 边界部分使得 $u,\ \varphi\in C^2(\Omega\cup T)$, 在 T 上 $u=\varphi$. 那么，如果在 Ω 中 $Qu=0$, 则对于任何 $\Omega'\subset\subset\Omega\cup T$, 我们有内估计

$$[Du]_{\alpha;\Omega'}\leqslant C, \tag{12.41}$$

其中 $$C=C(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K, T,\ \Phi,\ d).$$

$d=\operatorname{dist}(\Omega',\ \partial\Omega-T)$ 及 $\alpha=\alpha(n,\ K,\ \mu_K/\lambda_K,\ T)>0$.

12.5. 对 Dirichlet 问题的应用

把定理 10.4, 12.2, 12.4, 12.7 结合起来，我们得到下面的基本存在定理.

定理 12.8 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，并设算子 Q 在 $\overline{\Omega}$ 上是椭圆的，其系数 $a^{ij}\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $b\in C^\alpha(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $0<\alpha<1$. 设 $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$, $\varphi\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 那么，如果存在与 u 和 σ 无关的常数 M, 使得 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{在 }\Omega\text{ 中}, Q_\sigma u=a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u+\sigma b(x,\ u,\ Du)=0,\\&\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}, u=\sigma\varphi,\ 0\leqslant\sigma\leqslant 1\end{aligned} \tag{12.42}$$

的每一个 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 解满足

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}=\sup_\Omega|u|+\sup_\Omega|Du|<M, \tag{12.43}$$

则 Dirichlet 问题——在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$——在 $C^{2,\alpha}(\Omega)$ 中是可解的. 如果 Q 是散度形式的或者如果 $n=2$, 我们只需假定 $a^{ij}\in C^\alpha(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

Dirichlet 问题的可解性通过定理 12.8 被归结为有关的一族

问题的解在空间 $C^1(\overline{\Omega})$ 中的先验估计.假如定理 12.8 的假设条件成立,那么我们只需实现在第 10 章第 3 节中叙述的存在性方法中的头三步就够了.而且引用更一般的定理 10.8 来代替定理 10.4,我们看到在定理 12.8 的陈述中,问题组(12.42)可以用任何形为

$$
\begin{aligned}
&\text{在 } \Omega \text{ 中 } Q_\sigma u = a^{ij}(x, u, Du; \sigma) D_{ij}u + b(x, u, Du; \sigma) \\
&\qquad\qquad = 0, \\
&\text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \quad u = \sigma\varphi, \ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1
\end{aligned} \tag{12.44}
$$

的问题组来代替,其中

(i) $Q_1 = Q$, $b(x, z, p; 0) = 0$,

(ii) 对于所有的 $\sigma \in [0, 1]$,算子 Q_σ 在 $\overline{\Omega}$ 上是椭圆的,

(iii) 系数 a^{ij}, b 都充分光滑; 例如, a^{ij}, $b \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1])$.

评注

定理 12.1, 12.2, 12.6 和 12.7 中的 Hölder 估计属于 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva[LU2, 3, 4]. 我们关于定理 12.6 和 12.7 的推导是[TR1]的改写, 虽然我们保留了化为散度结构不等式这个关键思想,但和他们的推导多少有点不同.

第十三章

边界梯度估计

检查定理 10.5 的证明表明：对于形为(10.7)或(10.8)的椭圆算子来说，带有光滑数据的古典 Dirichlet 问题的可解性只依赖于存在性方法第 II 步的完成，即依赖于边界梯度估计的存在性．本章对 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中的一般方程

$$Qu=a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u+b(x,\ u,\ Du)=0 \tag{13.1}$$

提供各种假设，它们保证了解的边界梯度估计．这些假设都是关于 Q 的结构条件和关于区域 Ω 的几何条件的组合．将会看到在拟线性椭圆型方程理论的梯度界方面的结果没有其它方面的结果——例如第 6 和 12 章中的 Hölder 估计——深刻．边界梯度估计是通过古典极大值原理而和闸函数的审慎而且一般说是自然的选择联系在一起的．尽管如此，这些估计却是相当重要的，因为它们在确定 Dirichlet 问题的可解性特征中看来是主要的因素．本章末的非存在性结果将证明这一点．

在这个时候描述一下后面要采用的*闸函数方法*是合适的．这是在第 2 和 6 章中已经遇到过的那些思想的修改．设 Q 是一个椭圆算子，形为

$$Qu=a^{ij}(x,\ Du)D_{ij}u+b(x,\ u,\ Du), \tag{13.2}$$

其中 $b(x,\ z,\ p)$ 关于 z 是非增的，并假定 $u\in C^{(2)}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$．假设在一点 $x_0\in\partial\Omega$ 的某个邻域 $\mathcal{N}=\mathcal{N}_{x_0}$ 中存在两个函数 $w^\pm=w^\pm_{x_0}\in C^2(\mathcal{N}\cap\Omega)\cap C^1(\mathcal{N}\cap\overline{\Omega})$，使得

(i) 在 $\mathcal{N}\cap\Omega$ 中 $\pm Qw^\pm<0$,

(ii) $w^\pm(x_0)=u(x_0)$,

(iii) $w^-(x)\leqslant u(x)\leqslant w^+(x)$, $x\in\partial(\mathcal{N}\cap\Omega)$.

那么，把比较原理(定理 9.2)应用到区域 $\mathcal{N}\cap\Omega$ 上，就得出

对所有的 $x\in\mathscr{N}\cap\Omega$, $w^-(x)\leqslant u(x)\leqslant w^+(x)$,

所以，由(ii)得

$$\frac{w^-(x)-w^-(x_0)}{|x-x_0|}\leqslant\frac{u(x)-u(x_0)}{|x-x_0|}\leqslant\frac{w^+(x)-w^+(x_0)}{|x-x_0|}.$$

从而，只要 $w^\pm$ 和 u 的法向导数在 x_0 点存在，则它们满足

$$(13.3)\qquad \frac{\partial w^-}{\partial\nu}(x_0)\leqslant\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)\leqslant\frac{\partial w^+}{\partial\nu}(x_0).$$

我们分别把 $w^\pm$ 叫做算子 Q 和函数 u 在 x_0 点的上闸函数和下闸函数. 它们在所有点 $x_0\in\partial\Omega$ 上的存在性与一致有界的梯度一起就蕴涵着 u 的所需边界梯度估计，这里 u 在 Ω 中满足 $Qu=0$.

在决定闸函数的构造之前，有一个合用的变换公式是方便的. 首先，设 I 是 $\mathbb{R}$ 中的某个区间，又设 $u=\psi(v)$, 其中 $\psi\in C^2(I)$, 在 I 上 $\psi'\neq0$. 那么对于 $v(x)\in I$ 我们有

$$(13.4)\qquad Qv=\psi' a^{ij}D_{ij}v+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}+b,$$

其中 a^{ij}, $\mathscr{E}$ 和 b 的变元是 x, $u=\psi(v)$ 和 $Du=\psi' Dv$. 其次，对于某个 $\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$, 我们令 $u=v+\varphi$. 那么，对于 $x\in\Omega$ 我们有

$$(13.5)\qquad \tilde{Q}v=Qu=a^{ij}D_{ij}v+a^{ij}D_{ij}\varphi+b,$$

其中 a^{ij} 和 b 的变元是 x, $u=v+\varphi$ 和 $Du=Dv+D\varphi$. 定义函数 $\mathscr{F}$ 如下:

$$(13.6)\qquad \mathscr{F}(x,z,p,q)=a^{ij}(x,z,p)(p_i-q_i)(p_j-q_j),$$
$$(x,z,p,q)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,$$

我们知道对于(13.5)中的变换算子 $\tilde{Q}$, 有

$$(13.7)\qquad \tilde{\mathscr{E}}(x,v,Dv)=\mathscr{F}(x,u,Du,D\varphi).$$

虽然在第12章中为了进行边值的减法已经隐含地用了公式(13.5)，但就我们这里的目的而言，显式关系(13.7)是重要的. 我们不久即将看清楚，公式(13.4)和(13.5)在某种程度上预示着为构造闸函数所需要的结构条件的本质. 在本章我们将处处假定算子 Q 在区域 Ω 中是椭圆的.

13.1. 一般区域

我们从构造一个可用于任意光滑区域的闸函数开始. 假设 Ω 在点 $x_0\in\partial\Omega$ 满足外部球条件, 所以存在一个球 $B=B_R(y)$, 使有 $x_0\in\bar{B}\cap\bar{\Omega}=\bar{B}\cap\partial\Omega$. 我们定义距离函数 $d(x)=\operatorname{dist}(x, \partial B)$ 和集合 $w=\psi(d)$, 其中 $\psi\in C^2[0, \infty)$而且$\psi'>0$. 由于公式(13.4), 对于任何 $u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
(13.8)\qquad \tilde{Q}w &= a^{ij}(x, u(x), Dw)D_{ij}w+b(x, u(x), Dw)\\
&=\psi' a^{ij}D_{ij}d+b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}\\
&\leqslant\frac{(n-1)}{R}\psi'\Lambda+b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E};
\end{aligned}
$$

因为 $\qquad D_{ij}d=|x-y|^{-3}(|x-y|^2\delta_{ij}-(x_i-y_i)(x_j-y_j))$,

就得到(13.8)中最后的不等式. 现在假定 Q 满足一个结构条件, 即, 假定存在一个非减函数 μ, 使得对所有满足 $|p|\geqslant\mu(|z|)$ 的 $(x, z, p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$(13.9)\qquad |p|\Lambda+|b|\leqslant\mu(|z|)\mathscr{E}.$$

在(13.8)中利用条件(13.9), 假如 $\psi'\geqslant\mu=\mu(M)$, 我们就得到

$$(13.10)\qquad \tilde{Q}w\leqslant\left(\frac{\psi''}{(\psi')^2}+\nu\right)\mathscr{E},$$

其中 $\nu=(1+(n-1)/R)\mu$, $M=\sup\limits_{\Omega}|u|$. 现在考虑函数 ψ:

$$(13.11)\qquad \psi(d)=\frac{1}{\nu}\log(1+kd),\ k>0,$$

和邻域 $\mathscr{N}=\mathscr{N}_{x_0}=\{x\in\bar{\Omega}\,|\,d(x)<a\}$, $a>0$. 显然在 $\mathscr{N}$ 中 $\psi''=-\nu(\psi')^2$. 此外, 如果 $ka\leqslant e^{\nu M}-1$, 则

$$(13.12)\qquad \psi(a)=\frac{1}{\nu}\log(1+ka)\leqslant M,$$

从而

$$
\begin{aligned}
(13.13)\qquad \psi'(d)&=\frac{k}{\nu(1+kd)}\geqslant\frac{k}{\nu(1+ka)}\quad \text{在 } \mathscr{N}\cap\Omega \text{ 中}\\
&\geqslant\frac{k}{\nu e^{\nu M}}\geqslant\mu\quad \text{如果 } k\geqslant\mu\nu e^{\nu M}.
\end{aligned}
$$

因此, 如果选 k 和 a 满足不等式

(13.14) $$k\geqslant\mu\nu e^{\nu M},\ ka\leqslant e^{\nu M}-1,$$

只要在 $\mathscr{N}\cap\partial\Omega$ 上 $u=0$, 则函数 $w^+=\psi(d)$ 是算子 $\bar{Q}$ 和函数 u 在 x_0 的一个上闸函数. 类似地, 函数 $w^-=-\psi(d)$ 是一个对应的下闸函数. 因此, 如果在 Ω 中还有 $Qu=0$, 从(13.3)我们就得到估计

(13.15) $|Du(x_0)|\leqslant\psi'(0)=\mu e^{\nu M}$ 如果在(13.14)中等号成立.

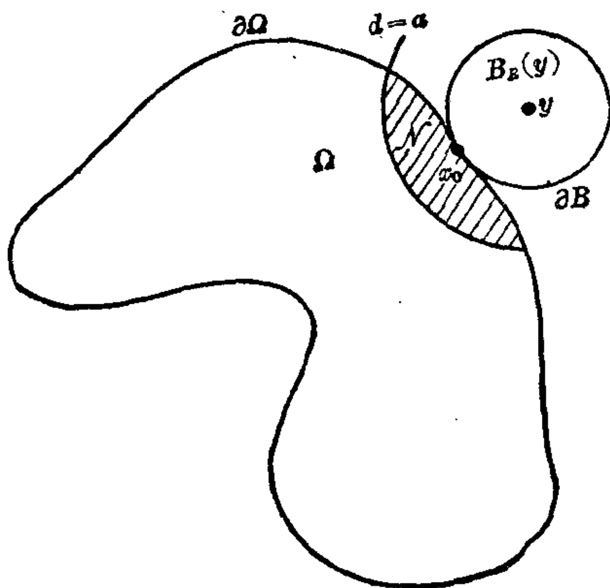


图 3

因为整个本章的估计本质上都是用上面所说的论证推导出来的, 但是要用别的曲面代替曲面 ∂B, 这种情况可用图 3 来说明.

现在我们把估计(13.15)推广到非零边值. 设 $\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$, 并设在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 那么我们要求由(13.5)给出的变换算子满足结构条件(13.9). 所以对于所有的 $(x, z, p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 和满足 $|p-D\varphi|\geqslant\bar{\mu}(|z|)$ 的某个非减函数 $\bar{\mu}$, 成立

(13.16) $$(|p-D\varphi|+|D^2\varphi|)\Lambda+|b|\leqslant\bar{\mu}(|z|)\mathscr{F}(x, z, p, D\varphi)$$

就够了. 因为

(13.17) $$\begin{aligned}\mathscr{F}(x, z, p, q)&=a^{ij}(x, z, p)(p_i-q_i)(p_j-q_j)\\&\geqslant\frac{1}{2}\mathscr{E}-a^{ij}q_iq_j\quad\text{由 Schwarz 不等式,}\\&\geqslant\frac{1}{2}\mathscr{E}-\Lambda|q|^2,\end{aligned}$$

我们看出: 只要选

$$\bar{\mu}=4(\mu(1+|\varphi|_1^2)+|\varphi|_2),$$

结构条件(13.9)就缊涵(13.16). 因此, 用 $u-\varphi$ 代 u, 用 $\bar{\mu}$ 代 μ, 估计式 (13.15) 将成立. 所以我们能够断言下面的边界梯度估计.

定理 13.1 设$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$在$\Omega$中满足$Qu=0$，在$\partial\Omega$上$u=\varphi$. 假如$\Omega$满足一致的外部球条件而且$\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$. 那么，如果结构条件(13.9)成立，在$\partial\Omega$上就有

(13.18) $$|Du|\leqslant C,$$

其中$C=C(n, M, \mu(M), \Phi, \delta)$, $M=\sup_\Omega|u|$, $\Phi=|\varphi|_{2;\Omega}$而$\delta$是所假定的外部球的半径.

把条件(13.9)写成以下形式常常是方便的:

(13.19) $$p\Lambda,\ b=o(\mathscr{E})\quad \text{当}|p|\to\infty\text{时},$$

其中关于$|p|$的极限行为应理解为对任何$N>0$在$\Omega\times(-N, N)$中是一致的. 特别，如果Q对任何$N>0$在$\Omega\times(-N, N)\times\mathbb{R}^n$中是一致椭圆的，即$\Lambda=O(\lambda)$，又若还有$b=O(\lambda|p|^2)$，则满足结构条件(13.9).

13.2. 凸区域

本节中我们考虑可用于凸区域和一致凸区域的闸函数的构造. 假定Ω在点$x_0\in\partial\Omega$处满足外部平面条件，因而存在一个超平面$\mathscr{P}$使$x_0\in\mathscr{P}\cap\bar{\Omega}=\mathscr{P}\cap\partial\Omega$. 令$d(x)=\mathrm{dist}(x, \mathscr{P})$, $w=\psi(d)$，那么对于任何$u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，我们得到

(13.20) $$\bar{Q}w=\psi'a^{ij}D_{ij}d+b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}=b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}.$$

因此若$b=O(\mathscr{E})$，因而对某个非减函数μ，当$|p|\geqslant\mu(|z|)$时我们有

(13.21) $$|b|\leqslant\mu(|z|)\mathscr{E},$$

取$\nu=\mu(M)$, $M=\sup_\Omega|u|$，上节的闸函数论证是可以用的. 从而假如在Ω中$Qu=0$，在$\partial\Omega$上$u=0$，我们就得到$Du(x_0)$的一个估计. 为了把这个结果推广到非零边值φ，我们要求$\Lambda D^2\varphi$和$b=O(\mathscr{F})$，即对于某个非减函数$\bar{\mu}$，当$|p-D\varphi|\geqslant\bar{\mu}(|z|)$时，

(13.22) $$\Lambda|D^2\varphi|+|b|\leqslant\bar{\mu}(|z|)\mathscr{F}$$

成立. 所以有下述估计.

定理 13.2 设$u, \varphi\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$在$\Omega$中满足$Qu=0$，在

$\partial\Omega$ 上满足 $u=\varphi$, 并假定 Ω 是凸的. 那么, 如果结构条件(13.22)成立, 我们在 $\partial\Omega$ 上就有

$$(13.23)\qquad |Du|\leqslant C,$$

其中 $C=C(n, M, \bar{\mu}(M), |\varphi|_{1;\Omega})$, $M=\sup_{\Omega}|u|$.

与上节中一样, 在定理 13.2 的假设中, 结构条件(13.22)可以用与边值 φ 无关的条件来代替. 特别, 或者是条件

$$(13.24)\qquad \Lambda=o(\mathscr{E}),\ b=O(\mathscr{E})\quad \text{当}\ |p|\to\infty\ \text{时},$$

或者是条件

$$(13.25)\qquad \Lambda,\ b=O(\lambda|p|^2)\quad \text{当}\ |p|\to\infty\ \text{时},$$

蕴涵着对于某个依赖于 $|\varphi|_{2;\Omega}$ 的函数 $\bar{\mu}$, (13.22)式的正确性. 前一个蕴涵关系是不等式(13.17)的一个推论; 从不等式

$$(13.26)\qquad \mathscr{F}(x, z, p, q)\geqslant\lambda(x, z, p)|p-q|^2,$$
$$(x, z, p, q)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

得出第二个蕴涵关系. 所以我们能够断言定理 13.2 的下述推论.

推论 13.3 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 假如 Ω 是凸的而且 $\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$. 那么, 如果结构条件(13.24)或(13.25)成立, 我们在 $\partial\Omega$ 上就有

$$(13.27)\qquad |Du|\leqslant C,$$

其中 $C=C(n, M, \bar{\mu}, |\varphi|_{2;\Omega})$.

推论 13.3 特别可应用于由

$$(13.28)\qquad \mathfrak{M}u=(1+|Du|^2)\Delta u-D_iuD_juD_{ij}u$$

定义的极小曲面算子 $\mathfrak{M}$. 这里 $\lambda=1$, $\Lambda=1+|p|^2$(见第 9 章例(i)和(iii)), 所以对于方程 $\mathfrak{M}u=0$, 在凸区域中边界梯度估计是成立的. 在二维情形中已经是很强的这个结果, 对于高维的情形将在下一节中得到改进.

下面我们假定区域 Ω 在点 $x_0\in\partial\Omega$ 满足一个封闭球条件, 即存在一个球 $B=B_R(y)\supset\Omega$, 使 $x_0\in\partial\Omega$. 令 $d(x)=\operatorname{dist}(x, \partial B)$ 和 $w=\psi(d)$, 于是对任何 $u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 得到

(13.29) $$\bar{Q}w = \psi' a^{ij} D_{ij} d + b + \frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}$$
$$\leqslant -\frac{\psi'}{R}(\mathscr{T} - \mathscr{E}^*) + b + \frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E},$$
其中 $\mathscr{T}(x, z, p) = [a^{ij}(x, z, p)]$ 的迹 $= a^{ii}(x, z, p)$ 而 $\mathscr{E}^* = \mathscr{E}/|p|^2$. 由于
$$D_{ij}d = -|x-y|^{-3}(|x-y|^2\delta_{ij} - (x_i - y_i)(x_j - y_j)),$$
就得到了最后那个关系式. 如果 b 或者用 $\mathscr{T}$ 或者用 $\mathscr{E}$ 界住, 现在就可从(13.29)导出边界梯度估计. 确实, 设 $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ 并假定存在一个非减函数 $\bar{\mu}$ 使得对于 $|p - D\varphi| \geqslant \bar{\mu}$,

(13.30) $$|a^{ij}D_{ij}\varphi + b| \leqslant \frac{1}{R}|p - D\varphi|\mathscr{T} + \bar{\mu}\mathscr{T}.$$

区域 Ω 叫做一致凸的, 如果它在每个边界点处满足带有固定半径 R 的封闭球条件. 于是, 我们前面的闸函数构造产生下面的估计.

定理 13.4 设 $u, \varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = \varphi$. 假定 Ω 是一致凸的. 那么, 如果结构条件(13.30)成立, 我们在 $\partial\Omega$ 上就有

(13.31) $$|Du| \leqslant C,$$

其中 $C = C(n, M, \bar{\mu}(M), R, |\varphi|_{1;\Omega})$.

显然带有依赖于 $|\varphi|_{2;\Omega}$ 的 $\bar{\mu}$ 的结构条件(13.30)或者被条件

(13.32) $$b = o(\Lambda|p|) \quad 当 |p| \to \infty 时,$$

或者被条件

(13.33) $$\Lambda = O(\lambda|p|^2), \ |b| \leqslant \frac{|p|}{R}\mathscr{T} + O(\lambda|p|^2) \quad 当 |p| \to \infty 时$$

所蕴涵. 所以我们有定理 13.4 的下述推论.

推论 13.5 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u = \varphi$. 假定 Ω 是一致凸的, $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$. 那么, 如果结构条件(13.32)或(13.33)成立, 我们在 $\partial\Omega$ 上就有

(13.34) $$|Du| \leqslant C,$$

其中 $C = C(n, M, \bar{\mu}(M), |\varphi|_{2;\Omega}, R)$.

推论 13.5 特别可用于规定了平均曲率的方程

$$(13.35)\qquad \mathfrak{M}u = nH(x, u, Du)(1+|Du|^2)^{3/2}.$$

这里 $\mathscr{T}=1+(n-1)(1+|p|^2)$，因而只要 H 对于 $|p|\geqslant\mu(|z|)$ 满足

$$(13.36)\qquad |H|\leqslant\frac{(n-1)}{nR},$$

则对于一致凸区域中(13.35)的解，边界梯度估计成立．在高于二维的情形，这个结果将在下一节中得到改进．

当 $b=0$ 时结构条件(13.32)显然被满足．这时，借助线性闸函数可以导出推论 13.5，因为边界流形 $(\partial\Omega,\ \varphi)$ 将满足有界斜率条件．而且当推论 13.5 中条件(13.32)成立时，对充分大的 k，形为 $w=kd(d=\operatorname{dist}(x,\ \partial B))$ 的闸函数对于证明来说就足够了．从上面的证明中看出以下事实也是清楚的：如果定理的假设中所假定的结构条件只对 $\partial\Omega$ 的某个邻域中的 x 成立，本节的各结果将继续有效．

附注 稍作修改后本节和上节的考虑可以结合起来，因而边界梯度估计只是由边界 $\partial\Omega$ 的局部行为所确定的．这里确切陈述一下 C^2 区域的这种结果是合适的．设 $\varkappa=\varkappa(x_0)$ 是 $\partial\Omega$ 在 x_0 处的主曲率中的最小值，又设 $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(x_0)$ 表示 $\partial\Omega$ 在 x_0 处的内法向．假定存在一个非减函数 $\bar{\mu}$，使得对每个 $x_0\in\partial\Omega$，有一个 $\varepsilon>0$，对此

$$(13.37)\qquad |a^{ij}D_{ij}\varphi+b|<\varkappa\mathscr{T}|p|+\bar{\mu}(|z|)\mathscr{F},\qquad \forall(x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

且满足 $|x-x_0|<\varepsilon$，$\left|\dfrac{p-D\varphi}{|p-D\varphi|}\pm\boldsymbol{\nu}\right|<\varepsilon$ 以及 $|p-D\varphi|\geqslant\bar{\mu}$，

那么在 $\partial\Omega$ 上有估计

$$(13.38)\qquad |Du|\leqslant C,$$

其中 $C=C(n,\ M,\ \bar{\mu}(M),\ \varkappa)$．如果对所有的 $x_0\in\partial\Omega$，$\varkappa(x_0)\geqslant\varkappa_0=$ 常数，只要用 $\varkappa_0$ 代替 $\varkappa$，我们就可以在(13.37)中取非严格的不等式．作为这里行为的可能类型的一个说明，我们考虑方程

$$(13.39)\qquad Qu=D_{11}u+(1+|D_2u|^N)D_{22}u=0,\ N\geqslant0.$$

这时，对于凸区域 Ω 和任意的 $\varphi\in C^2(\Omega)$，边界梯度估计将是成立

的，只要当 $\nu(x_0)\neq(\pm1,\ 0)$ 时 $\varkappa(x_0)>0$，即只要 $\partial\Omega$ 的曲率总是正的，但在切线平行于 x_1 轴时有可能除外．

13.3. 边界曲率条件

本章中迄今我们已经构造了闸函数，用常曲率的一个外部曲面(平面或球面)的距离函数表示．在确定施加在算子 Q 上的结构条件时，后者的曲率是重要的因素．在多于两个变量的情形，由于允许更一般的外部曲面，我们以前说的凸性条件可以大大放松．以下我们将假定 $\partial\Omega\in C^2$，并用边界 $\partial\Omega$ 本身作为一个适当的外部曲面．令 $d(x)=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega)$，从附录我们知道 $d\in C^2(\Gamma)$，其中 $\Gamma=\{x\in\overline{\Omega}\mid d(x)<d_0\}$ 对某个 $d_0>0$．所以，如果 $w=\psi(d)$，其中 $\psi\in C^2[0,\ \infty)$ 而且 $\psi'>0$，由公式(13.4)，对任何 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，我们有

$$
\begin{aligned}
(13.40)\qquad \bar{Q}w&=a^{ij}(x,\ u(x),\ Dw)D_{ij}w+b(x,\ u(x),\ Dw)\\
&=\psi' a^{ij}D_{ij}d+b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}.
\end{aligned}
$$

作为本节一般理论的一个预备性说明，我们考虑极小曲面算子 $\mathfrak{M}$ 这一特殊情形；即，我们取

$$
(13.41)\qquad a^{ij}(x,\ z,\ p)=(1+|p|^2)\delta_{ij}-p_ip_j.
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
(13.42)\qquad a^{ij}D_{ij}d&=(1+|\psi'|^2)\Delta d-|\psi'|^2D_idD_jdD_{ij}d\\
&=(1+|\psi'|^2)\Delta d\quad \text{因为}\ |Dd|=1,\ D_idD_{ij}d=0\\
&\leqslant-(n-1)(1+|\psi'|^2)H'\quad \text{由引理 A2},
\end{aligned}
$$

其中 H' 是 $\partial\Omega$ 在其上最靠近 x 的点 $y=y(x)$ 处的平均曲率．因此，如果 $\partial\Omega$ 到处有非负平均曲率，如同在上节凸区域的情形那样，我们得到

$$
\bar{Q}w\leqslant b+\frac{\psi''}{|\psi'|^2}\mathscr{E}.
$$

如果 $b=O(|p|^2)$，那么与上节中对任意 $C^2(\overline{\Omega})$ 边值一样，就得到边界梯度估计．在下一节中我们将证明，对于极小曲面方程 $\mathfrak{M}u=0$，这个结果是强的．利用关系式(13.40)和(13.42)我们还可以

对规定了平均曲率的方程 (13.35) 推出一个相应的强的结果. 然而, 我们先回到一般的情形. 假定 Q 的系数按如下方式分解, 即对于 $p\neq 0$, 我们有

$$(13.43)\qquad \begin{aligned} &a^{ij}=\Lambda a^{ij}_{\infty}+a^{ij}_{0},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n,\\ &b=|p|\Lambda b_{\infty}+b_{0}, \end{aligned}$$

其中

$$a^{ij}_{\infty}(x,\ z,\ p)=a^{ij}_{\infty}(x,\ p/|p|),\ b_{\infty}(x,\ z,\ p)=b_{\infty}(x,\ z,p/|p|),$$

对所有的 $x\in\Omega$, $|\sigma|=1$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $a^{ij}_{\infty}(x,\ \sigma)\xi_i\xi_j\geqslant 0$,

而且 b_{∞} 是 z 的非增函数. 例如, 在极小曲面算子 $\mathfrak{M}$ 的情形, 我们可以取

$$a^{ij}_{\infty}=\delta_{ij}-p_ip_j/|p|^2,\ a^{ij}_{0}=p_ip_j/|p|^2.$$

利用矩阵$[a^{ij}_{\infty}]$, 我们引入平均曲率的一个广义概念如下. 即, 设 y 是 $\partial\Omega$ 的一点, 又设 ν 表示 $\partial\Omega$ 在 y 点的单位内法向, $\varkappa_1,\ \cdots,\ \varkappa_{n-1}$ 是 $\partial\Omega$ 在 y 点的主曲率, 而 $a_1,\ \cdots,\ a_n$ 是关于在 y 点的一个对应主坐标系的矩阵$[a^{ij}_{\infty}]$的对角元. 然后我们定义

$$(13.44)\qquad \mathscr{K}^{\pm}(y)=\sum_{i=1}^{n-1}a_i(y,\ \pm\nu)\varkappa_i.$$

因为 $a_i\geqslant 0$, $i=1,\ \cdots,\ n$, 量 $\mathscr{K}^{\pm}$ 是 $\partial\Omega$ 在 y 点的曲率的加权平均. 此外, 在极小曲面算子 $\mathfrak{M}$ 的特殊情形, 我们有 $a_i=1$, $i=1,\ \cdots,\ n-1$, $a_n=0$, 因而

$$\mathscr{K}^{+}(y)=\mathscr{K}^{-}(y)=\sum_{i=1}^{n-1}\varkappa_i=(n-1)H'(y),$$

其中 $H'(y)$表示 $\partial\Omega$ 在 y 点的平均曲率. 通过引理 A2 我们知道, 曲率 $\mathscr{K}^{\pm}$ 与距离函数 d 由下式联系:

$$(13.45)\qquad \mathscr{K}^{\pm}(y)=-a^{ij}_{\infty}(y,\ \pm Dd(y))D_{ij}d(y).$$

为了推广我们早先关于极小曲面方程的结果, 假定不等式

$$(13.46)\qquad \mathscr{K}^{+}\geqslant b_{\infty}(y,\ u,\ \nu)$$

在每一点 $y\in\partial\Omega$ 成立. 此外, 我们假定函数 a^{ij}_{∞}, $b_{\infty}\in C^1(\Gamma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$而且 Q 满足结构条件

$$(13.47)\qquad \Lambda,\ |p|a^{ij}_{0},\ b_0=O(\mathscr{E})\ \text{当}\ |p|\to\infty\ \text{时},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n,$$

所以对某个非减函数 μ, 当$|p|\geqslant\mu(|z|)$时有

(13.48) $\qquad \Lambda+|p|\sum|a_0^{ij}|+|b_0|\leqslant\mu(|z|)\mathscr{E}.$

和以前一样，最初我们将假定函数 u 在 $\partial\Omega$ 上等于零．然后取 w 和以前一样，由于(13.4)和(13.43)我们有

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{Q}}w &= a^{ij}(x,\ u(x),\ Dw)D_{ij}w+|Dw|\Lambda(x,\ u(x),\ Dw) \\
&\quad\cdot b_\infty(x,\ w,\ Dw)+b_0(x,\ u(x),\ Dw) \\
&= \psi'\Lambda(a_\infty^{ij}D_{ij}d+b_\infty)+\psi'a_0^{ij}D_{ij}d+b_0+\frac{\psi''}{|\psi'|^2}\mathscr{E},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_\infty^{ij}D_{ij}d+b_\infty &= a_\infty^{ij}(x,\ \nu)D_{ij}d(x)+b_\infty(x,\ w,\ \nu) \\
&\leqslant a_\infty^{ij}(x,\ \nu)D_{ij}d(y)+b_\infty(x,\ 0,\ \nu) \quad \text{由引理 A2} \\
&\leqslant (a_\infty^{ij}(x,\ \nu)-a_\infty^{ij}(y,\ \nu))D_{ij}d(y)+b_\infty(x,\ 0,\ \nu) \\
&\quad -b_\infty(y,\ 0,\ \nu) \quad \text{由(13.45)和(13.46)} \\
&\leqslant Kd.
\end{aligned}
$$

这里 $y=y(x)$ 是 $\partial\Omega$ 上最靠近 x 的点，$\nu=Dd(y)=Dd(x)$ 是 $\partial\Omega$ 在 y 处的单位内法向，而常数 K 由下式给出：

(13.49) $$K=\sup_{x\in\Gamma}\frac{|(a_\infty^{ij}(x,\nu)-a_\infty^{ij}(y,\nu))D_{ij}d(y)+b_\infty(x,u(y),\nu)-b_\infty(y,u(y),\nu)|}{|x-y|}.$$

因此，由(13.48)，只要 $\psi'd\leqslant1$ 和 $\psi'\geqslant\mu$，我们就有

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{Q}}w &\leqslant K\psi'd\mu\mathscr{E}+(1+\sup_\Gamma|D^2d|)\mu\mathscr{E}+\frac{\psi''}{|\psi'|^2}\mathscr{E} \\
&\leqslant\left(\nu+\frac{\psi''}{|\psi'|^2}\right)\mathscr{E},
\end{aligned}
$$

其中 $\nu=(K+1+\sup_\Gamma|D^2d|)\mu$, $\mu=\mu(M)$ 和 $M=\sup_\Gamma|u|$．因此由公式(13.11)选择 ψ 并取 k 足够大以保证 $a\leqslant d_0$，函数 $w^+=w$ 将是算子 $\bar{\bar{Q}}$ 和函数 u 在 $\partial\Omega$ 的每一点处的上闸函数．只要用在 $\partial\Omega$ 的每一点 y 上成立的不等式

(13.46)′ $\qquad \mathscr{K}^-\geqslant-b_\infty(y,\ u(y),\ -\nu)$

代替(13.46)，下闸函数就类似地构造出来．由此，如果(13.46)和(13.46)′ 都成立并且在 Ω 中 $Qu=0$，则 u 在每点 $x_0\in\partial\Omega$ 将满足估计(13.3)．为了把这个结果推广到非零边值 φ，我们要求 Λ,

$|p|a_0^{ij}$ 和 $b_0=O(\mathscr{F})$，即对于某个非减函数 $\bar{\mu}$，当 $|p-D\varphi|\geqslant\bar{\mu}(|z|)$ 时

(13.50) $$\Lambda+|p|\sum|a_0^{ij}|+|b_0|\leqslant\bar{\mu}(|z|)\mathscr{F}.$$

对于由(13.5)给出的变换过的算子 $\tilde{Q}$，我们可以取 $\tilde{a}_\infty^{ij}=a_\infty^{ij}$，$\tilde{b}_\infty(x, z+\varphi, p)=b_\infty(x, z, p)$，所以条件(13.46)和(13.46)′是不变的. 因此我们有下述估计.

定理 13.6 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，$\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 假定 Q 满足结构条件(13.43)，(13.50)而且在每个点 $y\in\partial\Omega$ 不等式

(13.51) $$\mathscr{K}^+\geqslant b_\infty(y, \varphi(y), \boldsymbol{\nu}),\ \mathscr{K}^-\geqslant -b_\infty(y, \varphi(y), -\boldsymbol{\nu})$$

成立. 那么在 $\partial\Omega$ 上有估计

(13.52) $$|Du|\leqslant C,$$

其中 $C=C(n, M, \bar{\mu}(M), \Omega, K, |\varphi|_{2;\Omega})$，$M=\sup\limits_{\Omega}|u|$，而 K 是在(13.49)中用 φ 代替 u 后给出的常数.

与 13.2 节中处理过的凸区域 Ω 的情形一样，在上述定理的假设中，结构条件(13.50)可以用不依赖于边值 φ 的条件来代替. 特别，或是条件

(13.53) $$\Lambda=o(\mathscr{E}),\ |p|a_0^{ij},\ b_0=O(\mathscr{E})\quad 当\ |p|\to\infty 时,$$

或是条件

(13.54) $$\Lambda,\ |p|a_0^{ij},\ b_0=O(\lambda|p|^2)\quad 当\ |p|\to\infty 时,$$

蕴涵着对于某个依赖于 $|\varphi|_{2;\Omega}$ 的函数 $\bar{\mu}$，(13.50)的正确性. 所以我们可以断言定理 13.6 的下述推论.

推论 13.7 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，$\varphi\in C^2(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 除(13.43)外还假定结构条件 (13.53) 或 (13.54)成立，而且在 $\partial\Omega$ 上满足不等式(13.51). 则在 $\partial\Omega$ 上有估计

(13.55) $$|Du|\leqslant C,$$

其中 $C=C(n, M, \bar{\mu}, \Omega, K, |\varphi|_{2;\Omega})$.

把推论 13.7 用到规定了平均曲率的方程

(13.56) $$\mathfrak{M}u = nH(x, u)(1+|Du|^2)^{3/2},$$
其中 $H\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, $D_zH\geqslant 0$, 这时就产生下面的结果.

推论 13.8 设 u 是方程 (13.35) 在 Ω 中的一个 $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 解, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 其中 $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$. 假定 $\partial\Omega$ 的平均曲率 H' 使得

(13.57) $$H'(y)\geqslant\frac{n}{n-1}|H(y, \varphi(y))|, \quad \forall y\in\partial\Omega.$$
则在 $\partial\Omega$ 上有估计

(13.58) $$|Du|\leqslant C,$$
其中 $C=C(n, M, \Omega, H_1, |\varphi|_{2;\Omega})$, $M=\sup\limits_{\Omega}|u|$, $H_1=\sup\limits_{\Omega\times(-M,M)}(|H|+|DH|)$.

推论 13.8 是强的, 这将在下节得到证明. 注意这个结果可以按照我们先前处理极小曲面方程 $\mathfrak{M}u=0$ 的路子去做而更直接地推导出来.

到现在为止本节的结果都必须对最大特征值 Λ 关于 $\mathscr{F}$、$\mathscr{E}$ 或 λ 的行为加上某种限制. 现在我们进而考虑不加这些限制的情形, 但是作为补偿, 不等式(13.51)必须在严格意义下在 $\partial\Omega$ 上处处成立. 这种情形的先例是推论 13.5 中结构条件(13.32)成立的情形. 为了继续进行, 我们假定在分解(13.43)中系数 a^{ij}_∞, b_∞ 在 $\partial\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上连续, 并且系数

(13.59) $$a^{ij}_0=o(\Lambda),\ b_0=o(|p|\Lambda), \quad 当\ |p|\to\infty\ 时.$$
设 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 其中 $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$, 并假定严格不等式

(13.60) $$\mathscr{K}^+>b_\infty(y, \varphi(y), \nu),\ \mathscr{K}^->-b_\infty(y, \varphi(y), -\nu)$$
在 $\partial\Omega$ 上处处成立. 一开始假定 $\varphi\equiv 0$, 所以对某个正常数 k, 令 $w=kd$, 根据(13.59), 我们有

$$\begin{aligned}\overline{\overline{Q}}&=a^{ij}(x, u(x), Dw)D_{ij}w+|Dw|\Lambda(x, u(x), Dw)b_\infty(x, w, Dw)\\&\quad+b_0(x, u(x), Dw)\\&=k\Lambda(a^{ij}_\infty(x, Dd)D_{ij}d+b_\infty(x, w, Dd))+ka^{ij}_0D_{ij}d+b_0\\&=\Lambda\{k(a^{ij}(x, Dd)D_{ij}d+b_\infty(x, w, Dd)+o(k)\}.\end{aligned}$$

现在，由引理 A2、关系式(13.45)和 b_∞ 关于 z 非增这一事实，知存在正常数 χ 和 $a\leqslant d_0$，使得在邻域 $\mathcal{N}=\{x\in\overline{\Omega}\,|\,d(x)<a\}$ 中

$$a_\infty^{ij}(x,\ Dd)D_{ij}d+b_\infty(x,\ w,\ Dd)\leqslant -\chi.$$

由此对充分大的 k，我们得到

$$\overline{\overline{Q}}w\leqslant \Lambda(-k\chi+o(k))<0.$$

因此，选 k 足够大，使得还有 $ka\geqslant\sup\limits_{\Omega}|u|$，函数 $w^+=w$ 将是 $\partial\Omega$ 的每一点上算子 $\overline{\overline{Q}}$ 和函数 u 的上闸函数．类似地函数 $w^-=-w$ 将是相应的下闸函数，从而对于 $u\in C^1(\overline{\Omega})$，我们得到在 $\partial\Omega$ 上 $|Du|\leqslant k$．把 u 换成 $u-\varphi$ 并利用(13.5)，这个结果自动地推广到非零边值 φ 的情形．于是我们已经证明了下面的估计．

定理 13.9 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，$\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$．假定 Q 满足结构条件(13.43)，(13.59)并且在每一点 $y\in\partial\Omega$，不等式(13.60)成立．则我们在 $\partial\Omega$ 上有估计

$$|Du|\leqslant C, \tag{13.61}$$

其中 $C=C(n,\ M,\ a_\infty^{ij},\ a_0^{ij},\ b_\infty,\ b_0,\ \Omega,\ |\varphi|_{2;\Omega})$ 而 $M=\sup\limits_{\Omega}|u|$．

在定理 13.9 中常数 C 对系数 a_0^{ij}，b_0 的依赖性是通过结构条件(13.59)表现出来的，而 C 对系数 a_∞^{ij}，b_∞ 的依赖性是通过它们在 $\partial\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的连续模表现出来的．

为了结束本节，我们来指明这里的结果和上几节的结果之间的关系．如果在分解(13.43)中取 $a_\infty^{ij}=b_\infty=0$，则定理 13.6 就化为 $\partial\Omega\in C^2$ 的定理 13.1．其次，尽管 13.2 节中凸区域上的结果不是定理 13.6 和 13.9 的特殊情形，但是却为定理 13.6 和 13.9 的变形——在习题 13.2 和 13.3 中处理——所包含．

13.4. 非存在性结果

我们在这里介绍的某些非存在性结果表明上节定理中的许多条件不能作重大的放松．因为本节考虑的方程类包括那样一些方程，对于它们，第 10 章所述的存在性方法的第 I 和第 III 步是容

易验证的，由此可见这些情形的 Dirichlet 问题的非可解性是由于没有边界梯度估计. 确实，这些方程的这种估计的非存在性可以通过类似于下面所用的技巧直接得到证明.

我们处理非存在性结果的主要工具是比较原理(定理 9.2)的下述变形.

定理 13.10 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，Γ 是 $\partial\Omega$ 的相对开 C^1 部分. 那么，如果 Q 是形为(13.2)的椭圆算子，又 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega\cup\Gamma)$，$v\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$在 Ω 中满足 $Qu>Qv$，在 $\partial\Omega-\Gamma$ 上 $u\leqslant v$，在 Γ 上 $\partial v/\partial\nu=-\infty$，则可推出，在 Ω 中 $u\leqslant v$.

证明 由定理 9.2，我们有

$$\sup_{\Omega}(u-v)\leqslant\sup_{\Gamma}(u-v)^+.$$

因为在 Γ 上
$$\frac{\partial}{\partial\nu}(u-v)=\frac{\partial u}{\partial\nu}-\frac{\partial v}{\partial\nu}=\infty,$$

在 Γ 上函数 $u-v$ 不能取最大值. 因此在 Ω 中 $u\leqslant v$. ∎

为了应用定理 13.10，我们设 $y\in\partial\Omega$ 是固定的，$\delta=\operatorname{diam}\Omega$，$0<a<\delta$，而且考虑如下定义的函数 w:

$$w(x)=m+\psi(r),\quad r=|x-y|,$$

其中 $m\in\mathbb{R}$，$\psi\in C^2(a,\delta)$使得$\psi(\delta)=0$，$\psi'\leqslant0$，$\psi'(a)=-\infty$. 利用(13.8)，对于 $u\in C^2(\Omega)$，$r>a$，得到

$$\tilde{Q}w=a^{ij}(x,u(x),Dw)D_{ij}w+b(x,u(x),Dw)$$
$$=\frac{\psi'}{r}(\mathscr{T}-\mathscr{E}^*)+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}+b, \tag{13.62}$$

$\mathscr{T}=[a^{ij}]$ 的迹，$\mathscr{E}^*=\mathscr{E}/|p|^2$，$\mathscr{E}$ 和 b 的变元是 x，$u(x)$和 Dw. 现在我们想这样来选 ψ: 使得对某个常数 M，在区域 $\tilde{\Omega}=\{x\in\Omega\,|\,r>a,\ |u(x)|>M\}$ 中 $\tilde{Q}w<0$. 如果这样做了而且在 Ω 中 $Qu=0$，那么，根据定理 13.10 我们就有

$$\sup_{\Omega-B_a(y)}u\leqslant M+m+\psi(a), \tag{13.63}$$

其中
$$m=\sup_{\partial\Omega-B_a(y)}u.$$

估计(13.63)可以看作是建立非存在性结果的一个准备阶段.

我们将考虑两种不同的情形.

(i) 首先, 假定对于 $x\in\Omega$, $|z|\geqslant M$, $|p|\geqslant L$, 有

$$b\leqslant -|p|^{\theta}\mathscr{E}, \tag{13.64}$$

其中 M, L 和 θ 是正常数. 然后令

$$\psi(r)=K[(\delta-a)^{\beta}-(r-a)^{\beta}], \tag{13.65}$$

其中 $\beta=(2+\theta)/(3+\theta)$, $K\in\mathbb{R}$, 我们得到, 对于充分大的 K, 在 $\tilde{\Omega}$ 中 $\bar{Q}w<0$. 因此对这种情形估计(13.63)成立.

(ii) 其次, 假定对于 $x\in\Omega$, $|z|\geqslant M$, $|p|\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}&b\leqslant 0,\\ &\mathscr{E}\leqslant\mu(\mathscr{T}-\mathscr{E}^{*})|p|^{1-\theta},\end{aligned} \tag{13.66}$$

其中 μ, θ 和 M 都是正常数. 那么对于特殊的选择

$$\psi(r)=\left(\frac{\mu}{\beta}\right)^{\beta}\int_{r}^{\delta}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\beta}dt, \tag{13.67}$$

其中 $\beta=1/(1+\theta)$, 在 $\tilde{\Omega}$ 中我们就有

$$\bar{Q}w\leqslant\left(-\frac{|\psi'|^{\theta}}{\mu r}+\frac{\psi''}{(\psi')^{2}}\right)\mathscr{E}<0.$$

所以, 又推出估计(13.63). 注意: 由(13.67)给出的函数 ψ 满足

$$\lim_{a\to 0}\psi(a)=0.$$

现在假定区域 Ω 满足在点 y 处的内部球条件, 所以存在一个球 $B=B_R(x_0)\subset\Omega$, 使 $y\in\bar{B}\cap\partial\Omega$. 那么, 考虑如下定义的函数 w^*.

$$w^{*}(x)=m^{*}+\chi(r),\qquad r=|x-x_0|, \tag{13.68}$$

其中 $m^*\in\mathbb{R}$, 而 $\chi\in C^2(0, R-\varepsilon)$, $0<\varepsilon<R$ 使得 $\chi(0)=0$, $\chi'\geqslant 0$ 及 $\chi'(R-\varepsilon)=\infty$. 由(13.62), 对于 $r>0$ 我们有

$$\bar{Q}w^{*}=\frac{\chi'}{r}(\mathscr{T}-\mathscr{E}^{*})+\frac{\chi''}{(\chi')^{2}}\mathscr{E}+b. \tag{13.69}$$

这时我们加上一个比 (13.64) 更强的条件, 即对 $x\in\Omega$, $|z|\geqslant M$, $|p|\geqslant L$,

$$b+\frac{|p|}{R}\mathscr{T}\leqslant -|p|^{\theta}\mathscr{E}. \tag{13.70}$$

然后令

(13.71) $\chi(r)=K\{(R-\varepsilon)^\beta-(R-\varepsilon-r)^\beta\},\ \beta=\frac{2+\theta}{3+\theta}$.

我们得到，对充分大的K，在区域$\tilde{\tilde{\Omega}}=\{x\in\Omega\,|\,|x-y|<R,0<|x-x_0|<R-\varepsilon,\ |u(x)|>M\}$中$\bar{Q}w^*<0$. 所以，根据定理 13.10 我们有

(13.72) $$\sup_{\tilde{\tilde{\Omega}}}u\leqslant M+m^*+\chi(R-\varepsilon),$$

其中 $$m^*=\sup_{|x-y|=R}u.$$

把估计(13.72)和带有$a=R$的(13.63)结合起来，并令ε趋于零，因此得到估计

(13.73) $$u(y)\leqslant 2M+m+K[(\delta-R)^\beta+R^\beta],$$

其中K依赖于θ和L而

$$m=\sup_{\partial\Omega-B_R(y)}u.$$

估计(13.73)表明，函数u的边值在$\partial\Omega$上不能任意规定．因为用$-u$代替u，可以重复上面的论证，结构条件(13.70)能被放松成对于$x\in\Omega$，$|z|\geqslant M$，$|p|\geqslant L$，

(13.74) $$|b|\geqslant\frac{|p|}{R}\mathscr{T}+|p|^\theta\mathscr{E}.$$

这样我们已经证明了下述的非存在性结果.

定理 13.11 设Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界区域，并假定算子Q满足结构条件(13.74)，其中R是包含在Ω中的最大的球的半径，则存在一个函数$\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega})$，使得 Dirichlet 问题：在$\Omega$中$Qu=0$，在$\partial\Omega$上$u=\varphi$是不可解的.

定理 13.11 蕴涵着：定理 13.1 和 13.4 在下列意义下都是强的，即在结构条件(13.9)，(13.30)中的量$\mathscr{E}$，$\mathscr{F}$不能用$\theta>0$的$|p|^\theta\mathscr{E}$和$|p|^\theta\mathscr{F}$来代替．(即使算子Q是 Laplace 算子也不行!)此外，在推论 13.5 中，我们既不能用条件：当$|p|\to\infty$时$b=O(\Lambda|p|)$来代替(13.32)，也不能在(13.33)的第二个不等式中用$\lambda|p|^{2+\theta}$，$\theta>0$来代替$\lambda|p|^2$.

我们将用上面的情形(ii)来说明 13.3 节中的几何限制是需要

的．假定分解(13.43)成立，其中 b_∞ 与 z 无关，a_∞^{ij}, b_∞ 在 $\partial\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上连续，并满足结构条件(13.59)．此外，我们对算子 Q 加上结构条件：对于 $x\in\Omega$, $|z|\geqslant M$, $|p|\geqslant 0$,

$$(13.75)\qquad \begin{aligned} &b\leqslant 0,\\ &\mathscr{E}\leqslant \mu\Lambda|p|^{1-\theta}, \end{aligned}$$

其中 μ, θ 和 M 都是正常数．容易证明条件(13.43)，(13.59)，(13.75)蕴涵着：对于 $x\in\Omega$, $M\leqslant|z|\leqslant\overline{M}$, $p\in\mathbb{R}^n$, $\overline{M}$ 为某个常数以及可能不同于(13.75)中的常数 μ, 条件(13.66)成立．此外，因为根据古典极值原理(定理 3.1)，(13.75)还蕴涵着

$$(13.76)\qquad \sup_\Omega u\leqslant M+\sup_{\partial\Omega} u,$$

下面我们就能够假定在 $\Omega^+=\{x\in\Omega\,|\,u(x)>0\}$ 中(13.66)是可以应用的，而且还能假定在 Ω^+ 中(13.59)中的各量都是通过 $\sup\limits_{\partial\Omega} u$ 被界住的．现在假定 $\partial\Omega\in C^2$ 和

$$(13.77)\qquad \mathscr{K}^-(y)<-b_\infty(y,\ -\boldsymbol{\nu}(y)),$$

其中 $\mathscr{K}^-$ 由(13.44)给出，$\boldsymbol{\nu}$ 表示 $\partial\Omega$ 在 y 处的单位内法向．所遵循的论证类似于定理 13.11 的证明，在 y 点的内球面用另一个二次曲面来代替．事实上，条件(13.77)蕴涵着对于充分小的 a, 存在一个切 $\partial\Omega$ 于 y 点的二次曲面 $\mathscr{S}$, 使得(i) $\mathscr{S}$ 在 y 的切平面上有唯一的平行投影，(ii) $\mathscr{S}\cap B_a(y)\subset\overline{\Omega}$ 及(iii)对应于 $\mathscr{S}$ 的曲率 $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}^-$ 的曲率 $\mathscr{K}^-$, 对于某个 $\eta>0$, 满足

$$(13.78)\qquad \mathscr{K}_{\mathscr{S}}^-(y)\leqslant\mathscr{K}^-(y)+\eta.$$

现在我们考虑如下定义的函数 w^*:

$$(13.79)\qquad w^*(x)=m^*+\chi(d),\ d=\operatorname{dist}(x,\ \mathscr{S}),$$

其中 $m^*\in\mathbb{R}$, 而 $\chi\in C^2(\varepsilon,\ a)$, $0<\varepsilon<a$, 使得 $\chi(2a)=0$, $\chi'\leqslant 0$, $\chi'(\varepsilon)=-\infty$．由(13.40)，在区域 $\tilde{\tilde{\Omega}}=\{x\in\Omega\,|\,|x-y|<a,\ \varepsilon<d<a,\ u(x)>M\}$ 中我们有

$$\begin{aligned} \bar{Q}w&=\chi'\Lambda(a_\infty^{ij}D_{ij}d+b_\infty)+\chi' a_0^{ij}D_{ij}d+b_0+\frac{\chi''}{(\chi')^2}\mathscr{E}\\ &\leqslant\chi'\Lambda(\eta+o(1))+\frac{\chi''}{(\chi')^2}\mathscr{E}\quad \text{由(13.59)和(13.78)}, \end{aligned}$$

$$\leqslant \chi' \Lambda(\eta + o(1) + \mu \chi'' |\chi'|^{-2-\theta}) \quad \text{由(13.76)}.$$

令

$$\chi(d) = K[(2a-\varepsilon)^\beta - (d-\varepsilon)^\beta], \tag{13.80}$$

其中 $\beta = \theta/(1+\theta)$, 于是, 对充分大的 K, 在 $\tilde{\tilde{\Omega}}$ 中我们得到

$$\bar{Q} w^* < 0.$$

由此根据定理 13.10, 我们有

$$\sup_{\tilde{\tilde{\Omega}}} u \leqslant M + m^* + \chi(\varepsilon) \leqslant M + m^* + K(2a)^\beta, \tag{13.81}$$

其中
$$m^* = \sup_{|x-y|=a} u.$$

因此, 把估计(13.81), (13.63)结合起来并令 ε 趋于零, 就得到估计

$$u(y) \leqslant 2M + m + \psi(a) + K(2a)^\beta, \tag{13.82}$$

其中 ψ 由(13.67)给出, 而

$$m = \sup_{\partial\Omega - B_a(y)} u.$$

估计(13.82)再次表明 u 在 $\partial\Omega$ 上不能任意规定. 这样一来, 根据下面的非存在性结果, 定理 13.6 是强的就很明显了.

定理 13.12 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界 C^2 区域, 又假定算子 Q 满足结构条件(13.43), (13.59) 和 (13.76). 那么, 如果在某点 $y \in \partial\Omega$, 不等式

$$\mathscr{K}^-(y) < -b_\infty(y, -\boldsymbol{\nu}(y)) \tag{13.83}$$

成立, 则存在一个函数 $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, 使得 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 是不可解的.

如果在上面的考虑中用 $-u$ 代替 u, 只要在结构条件(13.76)中用 $-b$ 代替 b, 我们就得到一个类似的结论, 其中不等式(13.83)用

$$\mathscr{K}^+(y) < b_\infty(y, \boldsymbol{\nu}(y)) \tag{13.84}$$

来代替. 还有, 如果在(13.76)中 $M=0$, 我们能够选择 $\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$ 任意地小. 因此, 限定于带有 $H(x, z) \equiv H(x)$ 的规定了平均曲率的方程(13.56), 就有

推论 13.13 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界 C^2 区域，并假定在某点 $y\in\partial\Omega$, $\partial\Omega$ 的平均曲率 H' 使得

$$H'(y)<\frac{n}{n-1}|H(y)|, \tag{13.85}$$

其中 $H\in C^0(\overline{\Omega})$在 Ω 中或者是非正的，或者是非负的．那么，对于任何 $\varepsilon>0$, 存在一个函数 $\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\sup|\varphi|\leqslant\varepsilon$, 使得 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 是不可解的．

把推论 13.8 和 13.12 与 10.3 节中对特殊情形(10.7)的存在性方法的处理结合起来，我们就得到下面关于极小曲面方程可解性的 Jenkins-Serrin 判别准则[JS2]．

定理 13.14 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界 $C^{2,\gamma}$ 区域, $0<\gamma<1$．那么, Dirichlet 问题：在 Ω 中 $\mathfrak{M}u=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$, 对于任意的 $\varphi\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$是可解的当且仅当 $\partial\Omega$ 的平均曲率 H' 在 $\partial\Omega$ 的每一点上都是非负的．

规定了平均曲率的方程将在第 15 章中进一步研究．这里我们指明， 定理 13.12 中 b_∞ 与 z 无关的限制可以去掉，从而推论 13.13 中的条件(13.85)能够用

$$H'(y)<\sup_{z\in\mathbb{R}}\frac{n}{n-1}|H(y,z)| \tag{13.86}$$

来代替 (见习题 13.5)；把本节的结果和下一章 14.5 节中的存在定理比较一下也是值得的．

13.5. 连续性估计

第 13.1， 13.2 和 13.3 节的闸函数构造可以使之适应于为方程(13.1)的 $C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 解提供边界连续模的估计．特别，我们注意到如果在这些节中任何一个梯度估计的假设中仅仅假定 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 那么, 代替 $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$的一个估计, 我们得到量

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\ y\in\partial\Omega}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}$$

的一个界．此外, 当我们只假定边值 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$时, 仍然会得出边

界连续模的估计. 为了证明这一点, 在 $\partial\Omega$ 上固定一点 y; 并对任意的 $\varepsilon>0$, 选 $\delta>0$, 使得每当 $|x-y|<\delta$ 时 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$. 然后定义函数 $\varphi^{\pm}\in C^2(\overline{\Omega})$ 为

$$\varphi^{\pm}(x)=\varphi(y)\pm\left(\varepsilon+\frac{2\sup|\varphi|}{\delta^2}|x-y|^2\right). \tag{13.87}$$

显然, 在 $\partial\Omega$ 上我们有

$$\varphi^{-}\leqslant\varphi\leqslant\varphi^{+}.$$

所以, 如果算子 Q 和函数 $\varphi^{\pm}$ 满足 13.1, 13.2 和 13.3 节中导出这个估计的任一条件, 我们在 $\mathscr{N}\cap\Omega$ 中就得到一个估计

$$\varphi^{-}+w^{-}\leqslant u\leqslant\varphi^{+}+w^{+}, \tag{13.88}$$

其中 $w^{\pm}$ 是有关的闸函数而 $\mathscr{N}$ 是 y 的某个邻域. 因为在我们前面所有的闸函数构造中, 有 $w^{+}=-w^{-}=w$, 从(13.88)就得到在 $\mathscr{N}\cap\Omega$ 中,

$$|u(x)-\varphi(y)|\leqslant\varepsilon+w(x)+\frac{2\sup|\varphi|}{\delta^2}|x-y|^2. \tag{13.89}$$

所以我们能够断言下面的连续性估计.

定理 13.15 设 u, $\varphi\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 假定算子 Q 和区域 Ω 或者满足定理 13.1, 推论 13.3, 推论 13.5, 推论 13.7 的, 或者满足定理 13.9 的结构和几何条件. 那么, u 在 $\partial\Omega$ 上的连续模能用 φ 在 $\partial\Omega$ 上的连续模, $\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$, $\sup\limits_{\Omega}|u|$, Ω 和 Q 的系数来估计.

评注

我们处理边界梯度估计的许多基本特征在 Bernstein 关于两个变量的方程的早期工作[BE1, 2, 3, 4, 5, 6]中已经介绍了. 实际上, 为了类似的目的, Bernstein 采用了诸如(13.4)中的 ψ 那样的辅助函数而且也考虑了非存在性的方程. Leray[LR] 继续了 Bernstein 关于两个变量的工作, Leray 还考虑了在区域 Ω 中 Dirichlet 问题的可解性和边界 $\partial\Omega$ 的几何性质之间的关系. Finn 证明了凸性是两个变量的极小曲面方程的 Dirichlet 问题可解性

的必要充分条件[FN2, 4].

多于两个变量的方程的第一个引人注目的结果是由 Jenkins 和 Serrin [JS2], (见定理 13.14), 和 Bakel'man [BA1] 证明的. 最后 Serrin [SE3] 发展了包括许多有趣例子的一般理论, 第 13.3 和 13.4 节的结果就是属于他的. 在第 13.3 节的讲解中我们已经从 [TR5] 中采用了某些比较次要的修改.

习 题

13.1. 假定在定理 13.6 的假设中 a_∞^{ij}, b_∞ 不依赖于 x 而且 $\varphi=0$. 证明当去掉(13.50)中对 Λ 的限制后,估计式(13.52)仍然成立.

13.2. 假定只有 Q 的系数 b 是按(13.43)来分解的. 证明假如在(13.50)中取 $a_0^{ij}=0$ 而且用不等式

(13.90) $$\varkappa(y)\geqslant \pm b_\infty(y, \varphi(y), \pm\nu)$$

来代替不等式(13.51), 其中 $\varkappa(y)$ 是 $\partial\Omega$ 在 y 点的最小主曲率, 那么定理 13.6 的结果仍然成立.

13.3. 仍只假定 Q 的系数 b 按(13.43)分解. 证明假如在(13.59)中取 $a_0^{ij}=0$ 而且用

(13.91) $$\varkappa(y)>\pm b_\infty(y, \varphi(y), \pm\nu)$$

来代替(13.60), 那么定理 13.9 的结果仍然成立.

13.4. 证明用 $\mathscr{T}$ 的迹来代替最大特征值 Λ 可以加强习题 13.2 和 13.3 的结果, 并把这些结果和定理 13.5 进行比较.

13.5. 推导第 13.4 节末的断言(见[SE3]).

第十四章

全局估计和梯度内估计

本章我们主要关心的是推导形为

$$(14.1)\qquad Qu=a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u+b(x,\ u,\ Du)=0$$

的拟线性椭圆型方程的 $C^2(\Omega)$ 解的梯度的先验估计，用边界 $\partial\Omega$ 上的梯度和解的大小来表出．所得到的估计使第 10.3 节中所述的存在性方法的第 III 步容易实现．与第 9, 12 和 13 章的估计相结合，就产生一大类拟线性椭圆型方程的存在性定理，这类方程既包括一致椭圆型方程，也包括类似于规定了平均曲率的方程(9.7)形式的方程．因为本章的方法涉及方程(14.1)的微分法，所以我们的假设一般来说要求系数 a^{ij}, b 的导数满足结构条件．在 14.4 节中我们将看到，对于散度形式的方程，这些导数的条件可以稍稍放宽，在那里使用不同类型的论证是适宜的．

在本章中我们还将考虑内梯度的先验估计的推导．这种估计导致只规定连续边值的 Dirichlet 问题的存在性定理．平均曲率型方程内梯度的界将在第 15 章中讨论．

14.1. 梯度的极大值原理

我们从相对简单的假设下一个梯度估计开始，这也可以作为下节所用一般技巧的一个说明．假定算子 Q 的主系数可以写成

$$(14.2)\qquad a^{ij}(x,\ z,\ p)=a_*^{ij}(p)+\frac{1}{2}(p_ic_j(x,\ z,\ p)+c_i(x,\ z,\ p)p_j),$$

其中 $a_*^{ij}\in C^1(\mathbb{R}^n)$, $c_i\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $i,\ j=1,\ \cdots,\ n$, 而矩阵 $[a_*^{ij}]$ 是非负的．下面是这种分解的例子：

(i) 如果 Q 是椭圆的，其主系数 a^{ij} 只依赖于 p，则显然可以取 $a_*^{ij}=a^{ij}$ 和 $c_i=0$;

(ii) 与形为

$$(14.3)\qquad \int_\Omega F(x,\ u,\ |Du|)dx$$

的重积分相对应的 Euler-Lagrange 方程可写成

$$(14.4)\qquad \Delta u+\{(|Du|D_{tt}F/DF)-1\}|Du|^{-2}D_iuD_juD_{ij}u$$
$$+(|Du|^2D_{tz}F+D_iuD_{tx_i}F-|Du|D_zF)/D_tF=0,$$

其中 $F\in C^2(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $D_tF\neq 0$, $t=|p|$, 所以, 只要 $c_i\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $i=1,\ \cdots,\ n$, 则分解(14.2)成立, 其中

$$a_*^{ij}=\delta^{ij},\ c_i=\{(|p|D_{tt}F/D_tF)-1\}|p|^{-2}p_i.$$

(iii) 在两个变量的特殊情形, 可记

$$(14.5)\qquad a^{ij}=(\mathscr{T}-\mathscr{E}^*)\delta^{ij}+\frac{1}{2}(p_id_j+d_ip_j),$$

其中
$$\mathscr{T}=[a^{ij}]\text{的迹}=a^{11}+a^{22},$$
$$\mathscr{E}^*=\mathscr{E}/|p|^2=a^{ij}p_ip_j/|p|^2,$$
$$d_1=[(a^{11}-a^{22})p_1+2a^{12}p_2]/|p|^2,$$
$$d_2=[2a^{12}p_1+(a^{22}-a^{11})p_2]/|p|^2.$$

因此对于 $n=2$, 方程(14.1)等价于方程

$$(14.6)\qquad \Delta u+c_iD_juD_{ij}u+b^*=0,$$

其中 $c_i=d_i/(\mathscr{T}-\mathscr{E}^*)$, $b^*=b/(\mathscr{T}-\mathscr{E}^*)$; 对于方程(14.6), 带有 $a_*^{ij}=\delta^{ij}$ 的分解(14.2)显然是成立的.

我们处理梯度界的基本思想可一直追溯到 Bernstein 的工作 [BE1], 涉及方程关于 x_k, $k=1,\ \cdots,\ n$, 的微分法, 接着乘上 D_ku 再对 k 求和. 然后把极大值原理应用到函数 $v=|Du|^2$ 的所得方程上去. 根据(14.2), 我们可以把方程(14.1)写成形式

$$a_*^{ij}(Du)D_{ij}u+\frac{1}{2}c_i(x,\ u,\ Du)D_iv+b(x,\ u,\ Du)=0.$$

假定解 $u\in C^3(\Omega)$, 那么, 通过对 x_k 求导我们得到

$$a_*^{ij}D_{ijk}u+D_{p_l}a_*^{ij}D_{lk}uD_{ij}u+\frac{1}{2}(c_iD_{ik}v+D_kc_iD_iv)$$
$$+D_{p_l}bD_{lk}+D_kuD_zb+D_{x_k}b=0.$$

乘以 D_ku 并对 k 求和, 于是有

(14.7) $$-2a_*^{ij}D_{ik}uD_{jk}u+a^{ij}D_{ij}v+(D_{p_i}a_*^{lj}D_{lj}u+D_{p_i}b+D_kuD_kc_i)D_iv+2\delta bv=0.$$

其中 δ 是作用在 $C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 上的微分算子，定义为

(14.8) $$\delta=D_z+|p|^{-2}p_iD_{x_i}.$$

其次应用 Schwarz 不等式的下列推论：

(14.9) $$a_*^{ij}D_{ik}uD_{jk}u\geqslant(a_*^{ij}D_{ij}u)^2/[a_*^{ij}]\text{的迹}\leqslant\left(b+\frac{1}{2}c_iD_iv\right)^2\Big/[a_*^{ij}]\text{的迹},$$

因此得到

(14.10) $$a^{ij}D_{ij}v+B_iD_iv\geqslant2\left(\frac{b^2}{\mathscr{T}_*}-v\delta b\right),$$

其中 $\mathscr{T}_*=[a_*^{ij}]$ 的迹而

$$B_i=D_{p_i}a_*^{lj}D_{lj}u+D_{p_i}b+D_kuD_kc_i-2\mathscr{T}_*^{-1}bc_i-\frac{1}{2}\mathscr{T}_*^{-1}c_ic_jD_jv.$$

因此，如果在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中不等式

(14.11) $$|p|^2\delta b\leqslant\frac{b^2}{\mathscr{T}_*}$$

成立，我们就从古典极大值原理(定理 3.1)直接得到 $\sup\limits_{\Omega}v=\sup\limits_{\partial\Omega}v$. 为了把这个结果推广到 $C^2(\Omega)$ 解，我们把方程(14.7)写成散度形式

$$-2a_*^{ij}D_{ik}uD_{jk}u+D_i(a^{ij}D_jv)+(D_{p_i}a_*^{lj}D_{lj}u-D_ja^{ij}+D_kuD_kc_i)D_iv+2D_k(bD_ku)-2\Delta ub=0,$$

对于所有的 $\eta\in C_0^1(\Omega)$，它具有相应的积分形式(见方程(12.17))

(14.12) $$2\int_\Omega\eta a_*^{ij}D_{ik}uD_{jk}u\,dx+\int_\Omega(a^{ij}D_jv+2bD_iu)D_i\eta\,dx-\int_\Omega\{(D_{p_i}a_*^{lj}D_{lj}u-D_ja^{ij}+D_kuD_kc_i)D_iv\}\eta\,dx+\int_\Omega2b\eta\,\Delta u\,dx=0.$$

与在第 12.3 节中一样的逼近论证表明，对于 $u\in C^2(\Omega)$，方程(14.12)仍然是对的. 对 $\int_\Omega2b\eta\,\Delta u\,dx$ 分部积分，然后按前面对

$C^3(\Omega)$解的情形进行，我们得到弱的不等式

(14.13) $\quad D_i(a^{ij}D_jv)+(B_i-D_ja^{ij})D_iv\geqslant 2(b^2/\mathscr{T}_*-v\delta b)$

对于 $v\in C^1(\bar{\Omega})$ 成立，并从极大值原理（定理 8.1）得到估计 $\sup\limits_{\Omega}v=\sup\limits_{\partial\Omega}v$.

所以我们已证明了下面的梯度极大值原理.

定理 14.1 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 在有界区域 Ω 中满足方程 (14.1)，并假定 Q 在 Ω 中是椭圆的，其系数满足 (14.2) 和 (14.11). 那么，有估计

$$\sup_{\Omega}|Du|=\sup_{\partial\Omega}|Du|. \tag{14.14}$$

从上面的证明中显然可见，在定理 14.1 的假设中只需要条件 (14.2) 和 (14.11) 对 $|z|\leqslant\sup\limits_{\Omega}|u|$ 成立. 此外，如果它们对于 $|p|\geqslant L$（L 是某个常数）也成立，则代替 (14.14)，我们得到估计

$$\sup_{\Omega}|Du|\leqslant\max\{\sup_{\partial\Omega}|Du|,\ L\}. \tag{14.15}$$

在区域 $\Omega_L=\{x\in\Omega|\ |Du|>L\}$ 中应用定理 14.1 即得估计 (14.15).

注意当把定理 14.1 用到前面提到的例 (ii) 和 (iii) 时，其中 $a_*^{ij}=\delta^{ij}$，条件 (14.11) 化为

$$|p|^2\delta b\leqslant\frac{b^2}{n}. \tag{14.16}$$

特别，如果 $b=0$，我们得到一个梯度极大值原理.

14.2. 一般情形

本节中采用的技巧基本上是上节利用辅助函数的技巧的一种修改. 开始时假定 u 是方程 (14.1) 的 $C^2(\Omega)$ 解，令 $m=\inf\limits_{\Omega}u$，$M=\sup\limits_{\Omega}u$，又设 ψ 是 $C^3[\bar{m},\ \bar{M}]$ $(m=\psi(\bar{m}),\ M=\psi(\bar{M}))$ 中一个严格增函数. 用 $u=\psi(\bar{u})$ 定义函数 $\bar{u}$，因而

$$D_iu=\psi'D_i\bar{u},$$
$$D_{ij}u=\psi''D_i\bar{u}D_j\bar{u}+\psi'D_{ij}\bar{u},$$

我们有方程(也见(13.4))

$$(14.17)\qquad \psi' a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}\bar{u}+b(x, u, Du)+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}(x, u, Du)=0.$$

现在记 $v=|Du|^2$, $\bar{v}=|D\bar{u}|^2$, 并把算子 $D_k u D_k$ 作用到方程(14.17)上. 由此得到

$$(14.18)\qquad -a^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u}+\frac{1}{2}a^{ij}D_{ij}\bar{v}+\frac{1}{2(\psi')^2}\Big(\psi' D_{p_l}a^{ij}D_{ij}\bar{u}+D_{p_l}b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}D_{p_l}\mathscr{E}\Big)D_l v+\Big(\psi'\delta a^{ij}D_{ij}\bar{u}+\delta b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\delta\mathscr{E}\Big)\bar{v}-\frac{\psi''}{(\psi')^2}\Big(b+\frac{\psi''}{(\psi')^2}\mathscr{E}\Big)\bar{v}+\frac{1}{\psi'}\Big[\frac{\psi''}{(\psi')^2}\Big]'\mathscr{E}\bar{v}=0.$$

其次,设 $\bar{\delta}$ 是作用在 $C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 上的算子,定义为

$$(14.19)\qquad \bar{\delta}=p_i D_{p_i},$$

并引进函数

$$(14.20)\qquad \omega=\frac{\psi''}{(\psi')^2}\in C^1[\bar{m}, \bar{M}],$$

借助于关系式 $\qquad D_l v=2\psi''\bar{v}D_l u+(\psi')^2 D_l\bar{v}$,

我们得到下列方程:

$$(14.21)\qquad -a^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u}+\frac{1}{2}a^{ij}D_{ij}\bar{v}+\frac{1}{2}(\psi' D_{p_i}a^{jk}D_{jk}\bar{u}+D_{p_i}b+\omega D_{p_i}\mathscr{E})D_i\bar{v}+\psi'\bar{v}(\omega\bar{\delta}a^{ij}+\delta a^{ij})D_{ij}\bar{u}+\Big\{\frac{\omega'}{\psi'}\mathscr{E}+\omega^2(\bar{\delta}-1)\mathscr{E}+\omega(\delta\mathscr{E}+(\bar{\delta}-1)b)+\delta b\Big\}\bar{v}=0.$$

把它和方程(14.17)结合起来可以进一步推广方程(14.21). 设 r 和 s 是 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的任意数量函数, 用 $\bar{v}(\omega(r+1)+s)$ 乘方程(14.17)再加到(14.21)上去,得到方程

$$(14.22)\qquad -a^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u}+\frac{1}{2}a^{ij}D_{ij}\bar{v}+\frac{1}{2}(\psi' D_{p_i}a^{jk}D_{jk}\bar{u}+D_{p_i}b+\omega D_{p_i}\mathscr{E})D_i\bar{v}+\psi'\bar{v}(\omega(\bar{\delta}+r+1)a^{ij}+(\delta+s)a^{ij})D_{ij}\bar{u}+\Big\{\frac{\omega'}{\psi'}\mathscr{E}+\omega^2(\bar{\delta}+r)\mathscr{E}+\omega((\delta+s)\mathscr{E}+(\bar{\delta}+r)b)+(\delta+s)b\Big\}\bar{v}=0.$$

这时把主系数 a^{ij} 写成下列形式是合适的:

$$(14.23)\qquad a^{ij}(x,z,p)=a_*^{ij}(x,z,p)+\frac{1}{2}[p_ic_j(x,z,p)+c_i(x,z,p)p_j],$$

其中 a_*^{ij}, $c_i\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 而 $[a_*^{ij}]$ 是正定对称矩阵. 显然, 带有正定的 $[a_*^{ij}]$ 的分解(14.2)是(14.23)的一个特殊情形. 此外, 简单地选取 $a_*^{ij}=a^{ij}$ 和 $c_i=0$, 可以把任何椭圆算子 Q 的主系数写成形式(14.21). 实在对于我们应用于一致椭圆型方程的企图来说, 取非平凡的 c_i 是什么也得不到的. 但是对于极小曲面算子, 一个形为(14.23)的分解, 其中矩阵 $[a_*^{ij}]$ 与单位矩阵成比例, 对于我们推导全局梯度界来说是决定性的.

回到方程(14.22), 把关系式(14.23)代入, 得到

$$(14.24)\qquad -a_*^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u}+\frac{1}{2}a^{ij}D_{ij}\bar{v}+\frac{1}{2}\{\psi'D_{p_i}a^{jk}D_{jk}\bar{u}-\psi'c_jD_{ij}\bar{u}$$
$$+v[\omega(\bar{\delta}+r+1)+\delta+s+1]c_i+D_{p_i}b+\omega D_{p_i}\mathscr{E}\}D_i\bar{v}$$
$$+\psi'\bar{v}[\omega(\bar{\delta}+r+1)a_*^{ij}+(\delta+s)a_*^{ij}]D_{ij}\bar{u}$$
$$+\left\{\frac{\omega'}{\psi'}\mathscr{E}+\omega^2(\delta+r)\mathscr{E}+\omega[(\delta+s)\mathscr{E}+(\bar{\delta}+r)b]\right.$$
$$\left.+(\delta+s)b\right\}\bar{v}=0.$$

由 Cauchy 不等式(7.6)我们能估计

$$\psi'\bar{v}[\omega(\bar{\delta}+r+1)a_*^{ij}+(\delta+s)a_*^{ij}\bar{u}]D_{ij}\bar{u}$$
$$\leqslant\lambda_*\sum|D_{ij}\bar{u}|^2+\frac{v\bar{v}}{4\lambda_*}\sum|[\omega(\bar{\delta}+r+1)+\delta+s]a_*^{ij}|^2$$
$$\leqslant a_*^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u}+\frac{v\bar{v}}{4\lambda_*}\sum|[\omega(\bar{\delta}+r+1)+\delta+s]a_*^{ij}|^2,$$

其中 λ_* 表示矩阵 $[a_*^{ij}]$ 的最小特征值. 由此把它代入(14.24), 我们最终得到不等式

$$(14.25)\qquad a^{ij}D_{ij}\bar{v}+B_iD_i\bar{v}+2G\mathscr{E}\bar{v}\geqslant 0,$$

其中系数 B_i 和 G 由下式给出:

$$(14.26)\qquad B_i=\psi'(D_{p_i}a^{jk}D_{jk}\bar{u}-c_jD_{ij}\bar{u})+v[\omega(\bar{\delta}+r+1)$$
$$+\delta+s+1]c_i+D_{p_i}b+\omega D_{p_i}\mathscr{E},$$

$$G=\frac{\omega'}{\psi'}+\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma,$$

而

$$\alpha=\frac{1}{\mathscr{E}}\Big((\bar{\delta}+r)\mathscr{E}+\frac{|p|^2}{4\lambda_*}\Sigma|(\bar{\delta}+r+1)a_*^{ij}|^2\Big),$$

(14.27)
$$\beta=\frac{1}{\mathscr{E}}\Big((\delta+s)\mathscr{E}+(\bar{\delta}+r)b+\frac{|p|^2}{2\lambda_*}[(\delta+r+1)a_*^{ij}]\times[(\delta+s)a_*^{ij}]\Big),$$

$$\gamma=\frac{1}{\mathscr{E}}\Big[\frac{|p|^2}{4\lambda_*}\Sigma|(\delta+s)a_*^{ij}|^2+(\delta+s)b\Big].$$

为了得到解 u 的全局梯度的界，需要这样来选择函数 ψ, r 和 s，使得对充分大的 L，

(14.28) $\qquad G\leqslant 0,\ x\in\Omega$ 而 $|Du(x)|\geqslant L$.

因为，如果(14.28)得到满足，则从弱极大值原理(定理 3.1)得到

$$\sup_{\Omega_L}\bar{v}=\sup_{\partial\Omega_L}\bar{v},\quad (\Omega_L=\{x\in\Omega\,|\,|Du(x)|\geqslant L\}),$$

由此得

(14.29)
$$\sup_{\Omega}|Du|\leqslant\max\Big\{\Big[\frac{\max\psi'}{\min\psi'}\Big]\sup_{\partial\Omega}|Du|,\ L\Big\}.$$

我们在这里暂时离开一下主题来观察下述事情，即如果只假定解 u 属于 $C^2(\Omega)$，估计式(14.29)还应保持正确．因为，这时方程 (14.18) 应当继续对所有的 $\eta\geqslant 0$, $\in C_0^1(\Omega)$ 以如下的弱形式成立：

(14.30)
$$\int_\Omega \eta a^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u}\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega a^{ij}D_i\bar{v}D_j\eta\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega\Big\{D_ja^{ij}D_i\bar{v}-\frac{1}{(\psi')^2}(\psi'D_{p_i}a^{jk}D_{jk}\bar{u}+D_{p_i}b+\omega D_{p_i}\mathscr{E})D_iv\Big\}\eta\,dx$$
$$-\int_\Omega\Big\{\psi'\delta a^{ij}D_{ij}\bar{u}+\delta b-\omega(b+\omega\mathscr{E})+\frac{\omega'}{\psi'}\mathscr{E}\Big\}\bar{v}\eta\,dx=0$$

(见第 12.3 或 14.1 节)．对于 $u\in C^3(\Omega)$ 情形，应用上述同样的论证，我们从(14.30)推出不等式(14.25)的弱形式，即

(14.31) $\int_\Omega \{a^{ij}D_i\bar{v}D_j\eta+(D_ja^{ij}-B_i)D_i\bar{v}\eta-2G\mathscr{E}\bar{v}\eta\}dx\leqslant 0$

对于所有的非负 $\eta\in C_0^1(\Omega)$ 成立. 于是估计式(14.29)是弱极大值原理(定理 8.1)的一个推论.

为了保证不等式(14.28)对某 ψ, r 和 s 得到满足, 我们来考虑 Q 的系数的条件. 为了保证 α, β 和 γ 是上有界的, 我们施加以结构条件

(14.32)
$$(\delta+r+1)a_*^{ij},\ (\delta+s)a_*^{ij}=O\left[\frac{\sqrt{\lambda_*\mathscr{E}}}{|p|}\right] \quad 当 |p|\to\infty 时,$$
$$\bar{\delta}\mathscr{E},\ \delta\mathscr{E},\ (\bar{\delta}+r)b,\ (\delta+s)b\leqslant O(\mathscr{E}) \quad 当 |p|\to\infty 时.$$

这里极限行为被理解为对于 $(x, z)\in\Omega\times[m, M]$ 是一致的. 现在定义数

(14.33)
$$a,\ b,\ c=\sup_{\Omega\times[m,M]}\varlimsup_{|p|\to\infty}\alpha,\ \beta,\ \gamma,$$

因而不等式(14.28)由 Riccati 微分不等式

(14.34)
$$\chi'(z)+a\chi^2(z)+b\chi(z)+c+\varepsilon\leqslant 0$$

推出, (14.34)对某个正数 ε, 在区间 $[m, M]$ 上成立. 为了从解 χ 得到辅助函数 ψ, 我们利用关系式 $\chi=\omega\circ\psi^{-1}$. 这证明了对于任意的 a, b 和 c, 不等式(14.34)是不可解的, 除非 $\operatorname{osc}_\Omega u=M-m$ 充分小(见习题 14.1). 但是当 $a\leqslant 0$, $c\leqslant 0$ 或者 $b\leqslant -2\sqrt{|ac|}$ 时不等式是可解的. 现在我们考虑两个重要的情形 $a\leqslant 0$, $c\leqslant 0$. ($b\leqslant -2\sqrt{|ac|}$ 的情形在习题 14.2 中留给读者.) 令 $\varphi(z)=\psi'\circ\psi^{-1}(z)$, 以稍稍简化我们的计算. 于是, 如果 χ 满足不等式(14.34), 我们就能用下列关系式确定 φ:

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=\chi.$$

(i) $a\leqslant 0$. 如果严格不等式 $a<0$ 成立, 且如果选 ε 使得 $c+\varepsilon>0$, 则二次方程

$$a\chi^2+b\chi+c+\varepsilon=0$$

有一正实根 $\chi=\kappa$, 在这种情形取 $\chi=\kappa$, 不等式(14.34)是可解的. 从而得到 $(\log\varphi)'=\kappa$, 所以我们可选

$$\varphi(z)=e^{\varkappa z}.$$

另一方面，如果 $a=0$，取

$$\chi(z)=\frac{|c+\varepsilon|}{|b|+\varepsilon}\,e^{2(|b|+\varepsilon)(M-z)},$$

不等式(14.34)就是可解的，在这种情形我们可以取

$$\varphi(z)=\exp\left\{-\frac{|c+\varepsilon|}{2(|b|+\varepsilon)^2}\,e^{2(|b|+\varepsilon)(M-z)}\right\}.$$

(ii) $c\leqslant 0$. 若 $c<0$，与(i)一样，对某个 $\varkappa>0$，可取 $\varphi(z)=e^{\varkappa z}$. 若 $c=0$，对于充分小的 ε，取

$$\chi(z)=e^{A(m-z-1)},\ \text{其中}\ A=|a|+|b|+1,$$

就能解出不等式(14.34)，这时可以取

$$\varphi(z)=\exp\left\{-\frac{1}{A}\,e^{A(m-z-1)}\right\}.$$

注意在上面考虑的情形中，φ 是单调增加的，因此在估计式(14.29)中我们有 $\max\psi'=\varphi(M)$，$\min\psi'=\varphi(m)$.

因此，本节的推导可导致建立下面的定理.

定理 14.2 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 在有界区域 Ω 中满足方程(14.1). 假定在 Ω 中算子 Q 是椭圆的，而且存在数量乘子 r 和 s，使得结构条件(14.32)和条件 $a\leqslant 0$ 或者 $c\leqslant 0$(数 a 和 c 由(14.27)和(14.33)定义)一起得到满足. 那么，我们有估计

$$\sup_{\Omega}|Du|\leqslant C, \tag{14.35}$$

其中 C 依赖于(14.32)中的量，$\underset{\Omega}{\operatorname{osc}}\,u$ 和 $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$.

我们研究某些重要的特殊情形来说明定理 14.2 的应用.

(i) 一致椭圆型方程. 如果 Q 在 Ω 中是一致椭圆的，即当 $|p|\to\infty$ 时 $a^{ij}=O(\lambda)$，若还有 $|p|\to\infty$ 时，函数 $b=O(\mathscr{E})=O(\lambda|p|^2)$，那么，条件(14.32)(其中 $a_*^{ij}=a^{ij}$，$c_i=0$，$r=s=0$)常被叫做自然条件(见[LU4]). 如果要求当 $|p|\to\infty$ 时，

$$\delta a^{ij}=o(\lambda),\ \delta b=o(\lambda|p|^2), \tag{14.36}$$

来稍稍地限制一下这些条件，则 $c\leqslant 0$，由此方程 $Qu=0$ 的 $C^2(\Omega)$ 解满足一个先验的全局梯度的界. 为了建立梯度的界，是否只要

自然条件就够了,这还是未解决的问题.

(ii) 规定了平均曲率的方程. 把方程(9.7)写成形式

$$\Delta u-\frac{D_iuD_ju}{(1+|Du|^2)}D_{ij}u-nH(x)\sqrt{1+|D|u^2}=0, \tag{14.37}$$

其中 $H\in C^1(\bar{\Omega})$,我们能选

$$a_*^{ij}=\delta^{ij},\quad c_i=-\frac{p_i}{1+|p|^2},\quad r=-1 \text{ 和 } s=0,$$

所以通过计算我们有

$$\alpha=-1+\frac{2}{1+|p|^2},\quad \beta=\frac{nH(x)\sqrt{1+|p|^2}}{|p|^2},$$

$$\gamma=-\frac{np_iD_iH(1+|p|^2)^{3/2}}{|p|^4},$$

由此 $\qquad a=-1,\ b=0,\ c=n\sup\limits_{\Omega}|DH|.$

因此,根据定理 14.2 中 $a<0$ 的情形, 对于 $C^2(\Omega)$ 解, 全局梯度的界是成立的. 特别是利用(14.29)我们能够推得估计

$$\sup_{\Omega}|Du|\leqslant c_1+c_2n\sup_{\Omega}|H|+c_3\sup_{\partial\Omega}|Du| \cdot\exp(c_4n\sup_{\Omega}|DH|\operatorname*{osc}_{\Omega}u), \tag{14.38}$$

其中 c_1, c_2, c_3 和 c_4 是常数.

(iii) $a_*^{ij}=\delta^{ij}$ 的方程. 就象在上节中证明的那样, 如果方程(14.1)是形为(14.3)的重积分的 Euler-Lagrange 方程, 或如果维数 $n=2$, 那么我们能够取 $a_*^{ij}=\delta^{ij}$. 利用(14.27),在这些情形中我们得到

$$\alpha=\frac{1}{\mathscr{E}}(\delta+r)\mathscr{E}+\frac{(r+1)^2}{4}\frac{|p|^2}{\mathscr{E}},$$

$$\beta=\frac{1}{\mathscr{E}}[(\delta+s)\mathscr{E}+(\delta+r)b]+\frac{(r+1)s}{2}\frac{|p|^2}{\mathscr{E}}, \tag{14.39}$$

$$\gamma=\frac{1}{\mathscr{E}}(\delta+s)b+\frac{s^2}{4}\frac{|p|^2}{\mathscr{E}}.$$

选择特殊的值 $r=-1$, $s=0$, 我们有

$$\alpha=\frac{1}{\mathscr{E}}(\delta-1)\mathscr{E},$$

$$\beta=\frac{1}{\mathscr{E}}[\bar{\delta}\mathscr{E}+(\bar{\delta}-1)b],$$

$$\gamma=\frac{1}{\mathscr{E}}\delta b.$$

注意每当 $\qquad a_*^{ij}(p)=a_*^{ij}(p/|p|)$

时一定有同样的公式出现，因为在这些情形中我们有 $\bar{\delta}a_*^{ij}=0$.

14.3. 梯度的内估计

方程(14.1)的 $C^2(\Omega)$ 解的梯度内估计也能从方程 (14.24) 推演出来. 设 $B=B_R(y)$ 是一个严格位于 Ω 中的球，又设 η 是 $C^2(\bar{B})$ 中的函数，使得在 $\bar{B}$ 中 $0\leqslant\eta\leqslant1$, 在 $\partial\Omega$ 上 $\eta=0$, $\eta(y)=1$ 而在 B 中 $\eta>0$. 我们下面将要用到的这种函数的一个典型例子是

$$\eta(x)=1-\frac{|x-y|^2}{R^2}. \tag{14.40}$$

现在我们考虑由下式定义的函数 w:

$$w=\eta\bar{v}.$$

显然 $w\in C^1(\bar{B})$, $w(y)=\bar{v}(y)$, 在 ∂B 上 $w=0$, 而且 w 的导数为

$$D_iw=\eta D_i\bar{v}+\bar{v}D_i\eta,$$

$$D_{ij}w=\eta D_{ij}\bar{v}+D_i\bar{v}D_j\eta+D_i\eta D_j\bar{v}+\bar{v}D_{ij}\eta.$$

注意为保证二阶导数 $D_{ij}w$ 的存在，我们要求 $u\in C^3(\Omega)$; 然而利用方程(14.24)的弱形式可以避免这种限制. 用 η 乘方程(14.24)并且替换 $\bar{v}$, 就得到方程

$$\begin{aligned}-\eta a_*^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u}&+\frac{1}{2}a^{ij}D_{ij}w+\frac{1}{2}\Big(B_i-\frac{2}{\eta}a^{ij}D_j\eta\Big)D_iw\\&+\psi'w[\omega(\bar{\delta}+r+1)+(\delta+s)]a_*^{ij}D_{ij}\bar{u}\\&+\Big\{\frac{\omega'}{\psi'}\mathscr{E}+\omega^2(\bar{\delta}+r)\mathscr{E}+\omega[(\delta+s)\mathscr{E}+(\bar{\delta}+r)b]\\&+(\delta+s)b+\frac{1}{\eta^2}a^{ij}D_i\eta D_j\eta-\frac{1}{2\eta}a^{ij}D_{ij}\eta-\frac{1}{2\eta}B_iD_j\eta\Big\}w\\&=0,\end{aligned} \tag{14.41}$$

其中 B_i 由(14.26)给出. 在这一点上，我们可以进一步引进数量乘子 t_i, $i=1,\cdots,n$. 因为，如写 t_i, $i=1,\cdots,n$, 是 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上

的任意数量函数，利用方程(14.17)并令 $\partial_i = D_{p_i}$，我们可记

$$B_i = \psi'[(\partial_i + t_i)a^{jk}D_{jk}\bar{u} - c_j D_{ij}\bar{u}] + v[\omega(\bar{\delta} + r + 1) + (\delta + s + 1)]c_i + (\partial_i + t_i)b + \omega(\partial_i + t_i)\mathscr{E}$$

$$= \psi'(\partial_i + t_i)a_*^{jk}D_{jk}\bar{u} - \frac{v}{2\eta}D_j\eta(\partial_i + t_i)c_j + \frac{(\psi')^2}{2\eta}(\partial_i + t_i)c_j D_j w + v[\omega(\bar{\delta} + r + 1) + (\delta + s + 1)]c_i + (\partial_i + t_i)b + \omega(\partial_i + t_i)\mathscr{E}.$$

所以，代入方程(14.41)，我们有

$$(14.42)\quad -\eta a_*^{ij}D_{ik}\bar{u}D_{jk}\bar{u} + \frac{1}{2}a^{ij}D_{ij}w + \frac{1}{2}\tilde{B}_i D_i w + \psi' w[\omega(\bar{\delta} + r + 1) + (\delta + s) + (\bar{\delta} + t)]a_*^{ij}D_{ij}\bar{u} + \Big\{\frac{\omega'}{\psi'}\mathscr{E} + \omega^2(\bar{\delta} + r)\mathscr{E} + \omega[(\delta + \bar{\delta} + s + t)\mathscr{E} + (\delta + r)b - \frac{v}{2\eta}D_i\eta(\bar{\delta} + r + 1)c_i] + (\delta + \bar{\delta} + s + t)b - \frac{v}{2\eta}D_i\eta(\delta + \bar{\delta} + s + t + 1)c_i + \frac{1}{\eta^2}a^{ij}D_i\eta D_j\eta - \frac{1}{2\eta}a^{ij}D_{ij}\eta\Big\}w = 0,$$

其中

$$(14.43)\quad \bar{\delta} = -\frac{1}{2\eta}D_i\eta\partial_i,\qquad t = -\frac{t_i}{2\eta}D_i\eta,$$

$$\tilde{B}_i = B_i - \frac{2}{\eta}a^{ij}D_j\eta - \frac{v}{2\eta}D_j\eta(\partial_j + t_j)c_i.$$

那么，代替不等式(14.25)，我们得到不等式

$$(14.44)\qquad a^{ij}D_{ij}w + \tilde{B}_i D_i w + 2\tilde{G}\mathscr{E}w \geqslant 0,$$

其中 $\tilde{G}$ 由

$$(14.45)\qquad \tilde{G} = \frac{\omega'}{\psi'} + \tilde{\alpha}\omega^2 + \tilde{\beta}\omega + \tilde{\gamma}$$

给出，而

$$\tilde{\alpha}=\alpha,$$

$$\tilde{\beta}=\beta+\frac{1}{\mathscr{E}}\left\{-\frac{|p|^2}{2\eta}D_i\eta(\delta+r+1)c_i+(\bar{\delta}+t)\mathscr{E}\right.$$

$$\left.+\frac{|p|^2}{2\lambda_*}[(\delta+r+1)a_*^{ij}][(\bar{\delta}+t)a_*^{ij}]\right\},$$

(14.46)
$$\tilde{\gamma}=\gamma+\frac{1}{\mathscr{E}}\left\{\frac{|p|^2}{4\lambda_*}\sum|(\bar{\delta}+t)a_*^{ij}|^2+(\bar{\delta}+t)b\right.$$

$$-\frac{v}{2\eta}D_i\eta(\delta+\bar{\delta}+s+t+1)c_i+\frac{1}{\eta^2}a^{ij}D_i\eta D_j\eta$$

$$\left.-\frac{1}{2\eta}a^{ij}D_{ij}\eta+\frac{|p|^2}{2\lambda_*}[(\delta+s)a_*^{ij}][(\bar{\delta}+t)a_*^{ij}]\right\}.$$

除非在函数 η 和 Q 的系数之间存在特殊的关系，否则为了保证 $\tilde{\beta}$ 和 $\tilde{\gamma}$ 的行为类似于 β 和 γ 的行为，我们需要加上更多的结构条件. 所以，除了结构条件(14.32)外，我们假定条件

(14.47)
$$(\partial_k+t_k)a_*^{ij}=o(\sqrt{\lambda_*\mathscr{E}}/|p|) \quad 当|p|\to\infty 时,$$
$$\Lambda,\ (\partial_i+t_i)\mathscr{E},\ (\partial_i+t_i)b=o(\mathscr{E}) \quad 当|p|\to\infty 时,$$
$$(\delta+r+1)c_i,\ (\delta+s+1)c_i,\ (\partial_i+t_i)c_i=o(\mathscr{E}/|p|^2)$$
$$当|p|\to\infty 时,\ i,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ n.$$

与(14.32)中一样，这里的极限行为被理解为对 $(x,\ z)\in\Omega\times(m,\ M)$ 是一致的. 这样一来，结构条件(14.47)等价于存在一个函数 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，当 $x\to\infty$ 时满足 $\sigma(x)\to 0$，使得对所有的 $x\in\Omega$，$z\in[m, M]$，$i,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ n$，

(14.48)
$$|(\partial_k+t_k)a_*^{ij}|\leqslant\sigma(|p|)\sqrt{\lambda_*\mathscr{E}}/|p|,\quad \Lambda\leqslant\sigma^2(|p|)\mathscr{E},$$
$$|(\partial_i+t_i)b|,\quad |(\partial_i+t_i)\mathscr{E}|\leqslant\sigma(|p|)\mathscr{E},$$
$$|(\partial_j+t_j)c_i|\leqslant\sigma^2(|p|)\mathscr{E}/|p|^2,$$
$$|(\delta+r+1)c_i|,\quad |(\delta+s+1)c_i|\leqslant\sigma(|p|)\mathscr{E}/|p|^2.$$

这时结构条件(14.47)蕴涵着

(14.49)
$$a,\ b,\ c=\sup_{\Omega\times[m,M]}\ \overline{\lim_{|p|\to\infty}}\ \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta},\ \tilde{\gamma}=\sup_{\Omega\times[m,M]}\ \overline{\lim_{|p|\to\infty}}\ \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

确实，利用(14.48)和由(14.40)给出的函数 η，我们能够估计

$$|\beta-\tilde{\beta}|\leqslant\frac{C}{R\eta}\sigma\leqslant\frac{C\sigma}{R-|x-y|},$$

(14.50) $$|\gamma-\tilde{\gamma}|\leqslant C\left[\frac{\sigma}{R\eta}+\left[\frac{\sigma}{R\eta}\right]^2\right]$$

$$\leqslant C\left[\frac{\sigma}{R-|x-y|}+\frac{\sigma^2}{(R-|x-y|)^2}\right],$$

其中 C 依赖于 n 和 $(\delta+r+1)a_*^y$, $(\delta+s)a_*^y$. 关系式(14.49)容许我们把上节的考虑用到函数 w 上；这两种情况的本质差别在于现在 (14.28) 中的量 L 可以通过 (14.50) 依赖于 $R-|x-y|$. 因为在 ∂B 上 $w=0$, 代替(14.29)，我们得到估计

(14.51) $$|Du(y)|\leqslant L,$$

只要或者 $a\leqslant 0$, $c\leqslant 0$, $b\leqslant -2\sqrt{|ac|}$, 或者 $\operatorname*{osc}_{B_R(y)} u$ 充分小. 还要注意援引方程(14.30)来代替(14.18)，我们知道上述考虑也可应用到 $C^2(\Omega)$ 解. 所以我们有下面的估计.

定理 14.3 设 $u\in C^2(\Omega)$ 在区域 Ω 中满足方程(14.1). 假定算子 Q 在 Ω 中是椭圆的，而且存在数量乘子 r, s, t_i, $i=1, \cdots, n$, 使得结构条件(14.32)，(14.47)或者和条件 $a\leqslant 0$ 或者和条件 $c\leqslant 0$ 一起得到满足（数 a 和 c 由(14.27)和(14.33)定义). 那么对于任何 $y\in\Omega$, 我们有估计

(14.52) $$|Du(y)|\leqslant C,$$

其中 C 依赖于 $d=\operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$, (14.32), (14.47) 中的量和 $\operatorname*{osc}_{\Omega} u$.

注意常数 C 对 d 的明显依赖性可以从(14.50)得到. 特别，若 $C(|p|)=|p|^{-\theta}$, 则 $C=C'(1+d^{-1/\theta})$, 其中 C' 依赖于 (14.32), (14.47) 中的量和 $\operatorname*{osc}_{\Omega} u$. 而且，如果我们只假定结构条件(14.32), (14.47), 则得到一个形为(14.52)的估计，其中 C 还依赖于 u 在 y 点的连续模(习题 14.3).

现在我们考虑定理 14.3 的一个应用.

一致椭圆型方程　假定 Q 满足自然条件以及限制 (14.36). 为使 $t_i=0$ 的结构(14.47)成立，我们需要附加条件

(14.53) $$\partial_k a^{ij}=o(\lambda)\quad 当|p|\to\infty 时.$$

把所有这些条件放在一起我们看到对于方程 (14.1) 的 $C^2(\Omega)$解，梯度内估计是成立的，只要

$$\begin{aligned}&\Lambda,\ \bar{\delta}a^{ij}=O(\lambda),\\&\delta a^{ij},\ \partial_k a^{ij}=o(\lambda),\\&\bar{\delta}b\leqslant O(\lambda|p|^2),\\&\delta b\leqslant o(\lambda|p|^2),\\&\partial_i b=o(\lambda|p|^2),当|p|\to\infty 时.\end{aligned}\tag{14.54}$$

14.4. 散度形式的方程

设 $u\in C^2(\Omega)$在区域 Ω 中满足散度形式方程

$$Qu=\operatorname{div}\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)+B(x,\ u,\ Du)=0.\tag{14.55}$$

则在第 12.1 节中已经证明导数 $D_k u$, $k=1,\ \cdots,\ n$, 满足线性散度形式的方程

$$\int_\Omega(\bar{a}^{ij}D_jD_ku+f_k^i)D_i\zeta dx=0,\quad\forall\zeta\in C_0^1(\Omega),\tag{14.56}$$

其中

$$\begin{aligned}&\bar{a}^{ij}(x)=D_{p_j}A^i(x,\ u(x),\ Du(x)),\\&f_k^i(x)=\delta_kA^i(x,\ u(x),\ Du(x))+\delta^{ik}B(x,u(x),Du(x)),\\&\delta_k=p_kD_z+D_{x_k}.\end{aligned}\tag{14.57}$$

为了继续进行，我们假定 Q 在如下意义下是椭圆的，即对所有的 $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}a^{ij}(x,\ z,\ p)\xi_i\xi_j&=D_{p_j}A^i(x,\ z,\ p)\xi_i\xi_j\\&\geqslant\nu(|z|)(1+|p|)^\tau|\xi|^2,\end{aligned}\tag{14.58}$$

其中 τ 是某个实数而 ν 是 $\mathbb{R}$ 上一个正的非增函数. 那么，在附加结构条件：当 $|p|\to\infty$ 时

$$|p|D_z\mathbf{A},\ D_x\mathbf{A},\ B=o(|p|)(1+|p|)^\tau\tag{14.59}$$

之下，对于非一致椭圆算子 Q 能够获得全局梯度的界. 为了证明这一点，我们令 $M=\sup\limits_\Omega|u|$, $M_1=\sup\limits_\Omega|Du|$而且把极大值原理(定理 8.16) 应用到区域 $\tilde{\Omega}=\{x\in\Omega\,|\,|Du(x)|>M_1/2\sqrt{n}\}$ 中的方程

(14.56) 上. 于是得到, 对于 $q>n$, $k=1, \cdots, n$,

$$\sup_{\tilde{\Omega}}|D_k u| \leqslant \sup_{\partial\tilde{\Omega}}|D_k u| + C(2\sqrt{n})^{|\tau|}\|(1+|Du|)^{-\tau}f_k^i\|_q, \tag{14.60}$$

其中 $C=C(n, \nu(M), q, |\Omega|)$. 取 $q=\infty$ 并利用条件(14.59), 因此有

$$M_1=\sup_{\Omega}|Du| \leqslant C(\sup_{\partial\Omega}|Du|+\sigma(M_1)), \tag{14.61}$$

其中当 $t\to\infty$ 时 $\sigma(t)=o(t)$. 因此, 得到 M_1 的一个先验估计.

定理 14.4 设 $u\in C^2(\Omega)$ 在有界区域 Ω 中满足方程(14.56), 并假定满足结构条件(14.59), (14.60). 那么有估计

$$\sup_{\Omega}|Du| \leqslant C(1+\sup_{\partial\Omega}|Du|), \tag{14.62}$$

其中 C 依赖于 n, τ, $\nu(M)$ 和(14.60)中的量.

条件 (14.59) 要求方程 (14.1) 中的系数 b 满足 $b=o(\lambda|p|)$, $|p|\to\infty$. 为了放松这个条件, 我们必须或者对系数矩阵 $D_p\mathbf{A}$ 施加诸如一致椭圆性这样的附加条件, 或者假定解 u 在 $\partial\Omega$ 上等于零; (见习题 14.4, 14.5). 注意, 全局梯度界的存在性通过估计式(14.60) 化为函数 $(1+|Du|)^{-\tau}f_k^i$ 的适当的积分估计的存在性. 在现阶段我们不去更进一步地追求全局界, 将转而考虑一致椭圆型方程的梯度内估计. 假定算子 Q 在如下意义下在 Ω 中是一致椭圆的, 即对所有的 $(x, z, p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$|D_p\mathbf{A}(x, z, p)| \leqslant \mu(|z|)(1+|p|)^{\tau}, \tag{14.63}$$

其中 μ 是 $\mathbb{R}$ 上正的非减函数. 今后我们还将假定 $\tau>-1$, 在这种情况下条件(14.58), (14.63)分别蕴涵不等式

$$p\cdot\mathbf{A}(x, z, p)-p\cdot\mathbf{A}(x, z, 0) \geqslant \frac{\nu}{\tau+1}|p|^{\tau+2},$$

$$|A^i(x, z, p)-A^i(x, z, 0)| \leqslant \frac{\mu}{\tau+1}(1+|p|)^{\tau+1}, \tag{14.64}$$

$$i=1, \cdots, n.$$

最后, 代替(14.59), 我们将取更一般的条件: 对所有的(x, z, p) $\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$(14.65)\qquad g(x, z, p) = (1+|p|)|D_z\mathbf{A}| + |D_x\mathbf{A}| + |B| \leqslant \mu(|z|)(1+|p|)^{\tau+2}.$$

对于散度结构算子，条件(14.58)，(14.63)，(14.65)可视为是自然的。在这些条件下一个先验内梯度界的推导分三步来完成：

(i) 化为 L^p 估计. 在(14.57)中用 $\zeta D_k u$ 代替检验函数 ζ，并将所得方程对 k 求和. 令 $v=|Du|^2$，于是得到

$$\int_\Omega \zeta \bar{a}^{ij} D_{ik}u D_{jk}u\,dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\bar{a}^{ij}D_j v + D_k u f_k^i\right) D_i\zeta\,dx + \int_\Omega \zeta f_k^i D_{ik}u\,dx = 0.$$

因此，根据 Young 不等式(7.6)，有

$$(14.66)\qquad \int_\Omega (\bar{a}^{ij}D_j v + 2D_k u f_k^i) D_i\zeta\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \zeta\lambda^{-1}\sum (f_k^i)^2\,dx$$

对一切非负的 $\zeta\in C_0^1(\Omega)$ 成立. 所以，令

$$\bar{v} = \int_0^w (1+\sqrt{t})^\tau\,dt,$$

我们可以把(14.66)写作

$$(14.67)\qquad \int_\Omega (\tilde{a}^{ij}D_j\bar{v} + 2D_k u f_k^i) D_i\zeta dx \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \zeta\lambda^{-1}\sum (f_k^i)^2\,dx,$$

其中
$$\tilde{a}^{ij} = \bar{a}^{ij}(1+|Du|)^{-\tau}.$$

于是，线性方程弱下解的内估计（定理 8.17）可以应用于不等式(14.67). 所以，利用(14.65)，对于任何球 $B_{2R}=B_{2R}(y)\subset\Omega$ 和 $q>n$，我们得到估计

$$\sup_{B_R(y)} \bar{v} \leqslant C\{R^{-n/2}\|\bar{v}\|_{L^2(B_{2R})} + \|(1+|Du|)^{\tau+4}\|_{L^{q/2}(B_{2R})}\},$$

其中 $C=C(n, \nu(M), \mu(M), \tau, q, \operatorname{diam}\Omega)$，$M=\sup_{B_{2R}(y)}|u|$. 因此，对于充分大的 p，我们有

$$(14.68)\qquad \sup_{B_R(y)} v \leqslant C(n, \nu(M), \mu(M), \tau, \operatorname{diam}\Omega, R^{-n}\int_{B_{2R}(y)} v^p\,dx.$$

(ii) 化为 Hölder 估计. 现在需要利用方程(14.56)的弱形式，即

$$(14.69)\quad Q(u,\ \varphi)=\int_\Omega (A^i(x,\ u,\ Du)D_i\varphi-B(x,u,Du)\varphi)dx=0,$$
$$\forall\varphi\in C_0^1(\Omega).$$

从(14.64)我们看到，函数 $\mathbf{A}$ 对于 $(x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 满足不等式

$$(14.70)\quad \begin{aligned}&|\mathbf{A}(x,\ z,\ p)|\leqslant\mu_1(|z|)(1+|p|)^{\tau+1},\\ &p\cdot\mathbf{A}(x,\ z,\ p)\geqslant\nu_1(|z|)|p|^{\tau+2}-\mu_1(|z|),\end{aligned}$$

其中 μ_1 和 ν_1 分别是依赖于 $\tau,\ \mu,\ \nu$ 和 $\sup\limits_\Omega|\mathbf{A}(x,\ u,\ 0)|$ 的正非减和正非增函数. 把检验函数

$$\varphi=\eta^2[u-u(y)]$$

代入 (14.69)，其中 $\eta\in C_0^1(B_{2R})$，$B_{2R}=B_{2R}(y)\subset\Omega$. 于是利用(14.65)和(14.70)我们得到

$$\begin{aligned}&\nu_1\int_\Omega\eta^2|Du|^{\tau+2}dx\\ &\leqslant\mu_1\int_\Omega\eta^2dx+\mu\int_\Omega\eta^2|u(x)-u(y)|(1+|Du|)^{\tau+2}dx\\ &\quad+2\mu_1\int_\Omega|\eta D\eta||u(x)-u(y)|(1+|Du|)^{\tau+1}dx\\ &\leqslant\mu_1\int_\Omega\eta^2dx+4(\mu+\mu_1)2^\tau\omega(R)\int_\Omega\eta^2(1+|Du|^{\tau+2})dx\\ &\quad+\mu_1\omega(R)\int_\Omega(1+|Du|)^\tau|D\eta|^2dx,\end{aligned}$$

其中
$$\omega(R)=\sup_{B_{2R}}|u(x)-u(y)|.$$

因此，若取 R 足够小以保证

$$\omega(R)\leqslant\frac{\nu_1 2^{-\tau}}{8(\mu+\mu_1)},$$

我们就有

$$(14.71)\quad \int_\Omega\eta^2|Du|^{\tau+2}dx\leqslant C\int_\Omega(\eta^2+\omega(R)(1+|Du|)^\tau|D\eta|^2)dx,$$

其中 $C=C(\mu,\ \mu_1,\ \nu_1,\ \tau)$. 现在我们用

$$\eta v^{(\beta+1)/2},\ \beta>0$$

来代替(14.71)中的函数 η，便得到估计

(14.72) $$\int_\Omega \eta^2 |Du|^{2\beta+\tau+4}dx$$

$$\leqslant C\int_\Omega \{|Du|^{2(\beta+1)}(\eta^2+\omega(R)(1+|Du|)^\tau|D\eta|^2)$$

$$+(\beta+1)^2\omega(R)(1+|Du|)^\tau\eta^2 v^{\beta-1}|Dv|^2\}dx.$$

为了估计上面不等式的最后一项，我们在不等式(14.66)中选取

$$\zeta=\eta^2 v^\beta.$$

于是，利用条件(14.58)，(14.63)和(14.65)，我们得到

$$\beta\nu\int_\Omega (1+|Du|)^\tau\eta^2 v^{\beta-1}|Dv|^2 dx$$

$$\leqslant C\int_\Omega \{(1+|Du|)^\tau \eta v^\beta|D\eta||Dv|+(1+|Du|)^{\tau+3}$$

$$\times(\eta v^\beta|D\eta|+\beta\eta^2 v^{\beta-1}|Dv|)+\eta^2(1+|Du|)^{\tau+4}v^\beta\}dx,$$

其中 $C=C(\mu,\ \nu)$. 所以，由 Young 不等式(7.6)，

$$\int_\Omega (1+|Du|)^\tau\eta^2 v^{\beta-1}|Dv|^2 dx$$

$$\leqslant C\int_\Omega (1+|Du|)^{2\beta+\tau+2}(\eta^2(1+|Du|)^2+|D\eta|^2)dx,$$

其中 $C=C(\mu,\ \nu,\ \beta)$. 因此，若 $\omega(R)$ 充分小，代入(14.72)，就得到

$$\int_\Omega \eta^2(1+|Du|)^{2\beta+\tau+4}dx$$

$$\leqslant C\int_\Omega (\eta^2(1+|Du|)^{2(\beta+1)}+|D\eta|^2(1+|Du|)^{2\beta+\tau+2})dx,$$

其中 $C=C(\mu,\ \nu,\ \beta,\ \tau)$. 用 $\eta^{(2\beta+\tau+4)/2}$ 代替 η 并利用 Young 不等式(7.6)，则得

$$\int_\Omega [\eta(1+|Du|)]^{2\beta+\tau+4}dx\leqslant C,$$

其中 $C=C(\mu,\ \nu,\ \mu_1,\ \nu_1,\ \beta,\ \tau,\sup|D\eta|)$. 特别，如果在 $B_R(y)$ 上 $\eta\equiv 1$ 而且 $|D\eta|\leqslant 2/R$，则对任何 $p\geqslant 1$，有

(14.73) $$\int_{B_R(y)} (1+|Du|)^p dx\leqslant C,$$

其中 $C=C(\mu,\ \nu,\ \mu_1,\ \nu_1,\ p,\ \tau,\ R^{-1})$. 结合估计式(14.68)和

(14.73)，对于任何球 $B_0=B_{R_0}(y)\subset\Omega$ 和 $0<\alpha<1$，我们得到估计

$$|Du(y)|\leqslant C, \tag{14.74}$$

其中 $C=C(n,\ \tau,\ \nu,\ \mu,\ \nu_1,\ \mu_1,\ \alpha,\ [u]_{\alpha,y})$，而

$$[u]_{\alpha,y}=\sup_{B_0}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}};$$

即，内部梯度界的推导化为 u 的内部 Hölder 估计的存在性．在这里我们说明为了完成证明，事实上只要估计 u 的连续模就够了．而且，若结构条件(14.65)已加强，使得当 $|p|\to\infty$ 时，$g=o(|p|^{\tau+2})$，上述考虑就产生一个不依赖于 u 的连续模的内部梯度的界．这时我们还能够把 Q 的一致椭圆性减弱为允许：当 $|p|\to\infty$ 时 $D_{p_j}A^i=O(|p|^{\tau+\sigma})$，$i,\ j=1,\ \cdots,\ n$，其中 $\sigma<1$(见习题 14.6)．

(iii) 方程 (14.55) 的弱解的 Hölder 估计．我们把不等式(14.70)和(14.65)中关于 B 的条件一起写成形式

$$\begin{aligned}&|\mathbf{A}(x,\ z,\ p)|\leqslant a_0|p|^{m-1}+\chi^{m-1},\\&p\cdot\mathbf{A}(x,\ z,\ p)\geqslant\nu_0|p|^m-\chi^m,\\&|B(x,\ z,\ p)|\leqslant b_0|p|^m+\chi^m,\end{aligned}\tag{14.75}$$

其中 $m=\tau+2>1$ 而 $a_0,\ b_0,\ \nu_0$ 和 χ 是可能依赖于 $M=\sup\limits_{\Omega}|u|$ 的正常数．那么我们有下面的 Hölder 估计．

定理 14.5 设 $u\in C^1(\Omega)$ 是区域 Ω 中方程 (14.55) 的一个弱解，并假定 Q 满足结构条件(14.75)．那么，对于任何球 $B_0=B_{R_0}(y)\subset\Omega$ 及 $R\leqslant R_0$，我们有估计

$$\operatorname*{osc}_{B_R(y)}u\leqslant C(1+R_0^{-\alpha}M_0)R^{\alpha}, \tag{14.76}$$

其中 $C=C(n,\ a_0,\ b_0,\ \nu_0,\ \chi,\ R_0,\ m,\ M_0)$ 和 $\alpha=\alpha(n,\ a_0,\ b_0,\ \nu_0,\ m,\ M_0)$ 是正常数，而 $M_0=\sup\limits_{B_0}|u|$．

证明 定理 14.5 可以用本质上和定理 8.22 所用的同一方法导出，或用换一种方法即遵循习题 8.6 中所述的方法导出．这里我们不介绍全部细节．在定理 8.22 的证明中，本质的要点是弱 Harnack 不等式(定理 8.18)．令

$$k=\chi(R+R^{m/(m-1)}),$$

对于方程 (14.56) 的非负弱上解，我们得到类似的弱 Harnack 不等式

$$(14.77) \qquad R^{-n/p}\|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leqslant C\left(\inf_{B_R(y)} u + k\right),$$

其中 $C=C(n, a_0, b_0, \nu_0, m, M_0, p)$ 而 $1\leqslant p<n/(n-m)^+$. 假如在不等式 $Q(u, \varphi)\geqslant 0$ 中取

$$(14.78) \qquad \varphi=\eta^m\bar{u}^\beta\exp(-b_0\bar{u}), \beta<0$$

作为检验函数来代替 (8.48) 中的检验函数，并利用 $p=m$ 的 Sobolev 不等式(7.26)代替 $p=2$ 的 Sobolev 不等式，(14.77)的证明就能够以定理 8.18 的证明为模式. 从弱 Harnack 不等式到 Hölder 估计(14.76)的过渡可以按照定理 8.22 的证明来完成. 注意 $m>n$ 的情形可以从 Sobolev 不等式(定理 7.17)直接处理. ▌

把定理 14 5 和我们以前的估计(14.74)结合起来，最终就得到下面的梯度内估计.

定理 14.6 设 $u\in C^2(\Omega)$ 在区域 Ω 中满足方程(14.55)，并假定 $\tau>-1$ 的结构条件(14.58)，(14.63)和(14.65)得到满足. 那么对于任何 $y\in\Omega$，我们有估计

$$(14.79) \qquad |Du(y)|\leqslant C,$$

其中 C 依赖于 $n, \tau, \nu(M_0), \mu(M_0), \sup_\Omega|\mathbf{A}(x, u, 0)|, M_0, M_0/d$ 和 $M_0=\sup_{B_d(y)}|u|$, $d=\text{dist}(y, \partial\Omega)$.

应用与定理 8.29 的证明相类似的论证，我们能够从内估计(14.79)推得下面的全局估计.

定理 14.7 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 在有界区域 Ω 中满足方程(14.55)，并假定满足 $\tau>-1$ 的结构条件 (14.58)，(14.63) 和 (14.65). 那么，我们有估计

$$(14.80) \qquad \sup_\Omega|Du|\leqslant C(1+\sup_{\partial\Omega}|Du|),$$

其中 C 依赖于 $n, \tau, \nu(M), \mu(M), \sup_\Omega|\mathbf{A}(x, u, 0)|$ 和 $M=\sup_\Omega|u|$.

14.5. 存在定理选讲

这里不可能介绍由第 9, 12, 13 和 14 章结果的组合所能推出的古典 Dirichlet 问题存在定理的全貌，只能选列一些结果，希望这些结果能作为理论适用范围的一个说明.

(i) 一般形式(14.1)的一致椭圆型方程. 假定结构条件

$$
\begin{aligned}
&a^{ij},\ \bar{\delta}a^{ij}=O(\lambda),\\
&\delta a^{ij}=o(\lambda),\\
&b=O(\lambda|p|^2);\\
&\bar{\delta}b\leqslant O(\lambda|p|^2),\\
&\delta b\leqslant o(\lambda|p|^2),
\end{aligned}
\tag{14.81}
$$

当 $|p|\to\infty$ 时关于 $x\in\Omega$ 和有界的 z 是一致成立的. 那么,根据定理 9.1, 12.8, 13.1 和 14.2, 我们有

定理 14.8 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，并假定算子 Q 在 $\bar{\Omega}$ 上是椭圆的，其系数 a^{ij}, $b\in C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 满足结构条件(14.81)以及条件(9.9)(或(9.30)). 那么，若 $\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$, $\varphi\in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$, $0<\gamma<1$, 则 Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 存在一个解 $u\in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$.

一般说来，若在定理 14.8 的假设中不假定条件(9.9)(或(9.30)), 那么，只要问题(12.42)的解族在 Ω 中一致有界，Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 就是可解的. 注意，根据定理 9.2, 若系数 a^{ij} 不依赖于 z 而系数 b 满足 $D_zb\leqslant0$, 解就是唯一的. 这时(14.81)中的条件 $\delta a^{ij}=o(\lambda)$, $\delta b\leqslant o(\lambda|p|^2)$ 应该被条件 $D_xa^{ij}=O(\lambda)$, $D_xb=O(\lambda|p|^2)$ 所蕴涵.

(ii) 散度形式(14.55)的一致椭圆型方程. 这里我们假定结构方程

$$
\begin{aligned}
&|p|^{\tau}\leqslant O(\lambda),\\
&D_p\mathbf{A}=O(|p|^{\tau}),\\
&|p|D_z\mathbf{A},\ D_x\mathbf{A},\ B=O(|p|^{\tau+2}),
\end{aligned}
\tag{14.82}
$$

当 $|p|\to\infty$ 时关于 $x\in\Omega$ 和有界的 z, $\tau>-1$ 是一致的. 那么，根据定理 9.7, 12.8, 13.1 和 14.7, 我们有

定理 14.9 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，并假定算子 Q 在 $\overline{\Omega}$ 上是椭圆的，其系数 $A^i\in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，$i=1, \cdots, n$，$B\in C^\gamma(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，$0<\gamma<1$ 满足结构条件(14.82)以及定理 9.7 关于 $\alpha=\tau+2$ 的假设. 那么，若 $\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$，$\varphi\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$，则 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 存在一个解 $u\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

为了从定理 9.7, 13.1 和 14.7 中的估计推得定理 14.9，我们在定理 12.8 中取 Dirichlet 问题族：

$$
\begin{aligned}
&Q_\sigma u=\operatorname{div}\{\sigma\mathbf{A}+(1-\sigma)(1+|Du|^2)^{\tau/2}Du\}+\sigma B=0,\\
&u=\sigma\varphi \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上},\ 0\leqslant\sigma\leqslant1.
\end{aligned}
\tag{14.83}
$$

注意由 (12.42) 给出的族不一定要满足定理 9.7 的假设. 就象上述情形中那样，若我们不假定特殊极大值原理诸如定理 9.7 那样的假设，则只要 (14.83) 那样的有关问题族的解在 Ω 上一致有界，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 就是可解的. 注意，假如系数 $\mathbf{A}$ 与 z 无关，或者系数 B 与 p 无关，并且还假定 B 是 z 的非增函数，则根据定理 9.5，问题 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 的解就是唯一的.

具有系数 $a^{ij}\in C^1(\Omega\times\mathbb{R})$ 的形为

$$
Qu=a^{ij}(x, u)D_{ij}u+b(x, u, Du)
\tag{14.84}
$$

的方程可以写成散度形式(14.56)，其中

$$A^i(x, z, p)=a^{ij}(x, z)p_j,$$

$$B(x, z, p)=b(x, z, p)-D_z a^{ij}(x, z)p_ip_j-D_{x_i}a^{ij}(x, z)p_j.$$

所以，利用定理 9.1, 12.8, 13.1 和 14.7，我们有

定理 14.10 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，并设由(14.84)给出的算子 Q 在 $\overline{\Omega}$ 上是椭圆的，其系数

$$a^{ij}\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}),\ b\in C^\gamma(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n),\ 0<\gamma<1$$

当 $|p|\to\infty$ 时满足 $b=O(|p|^2)$，关于 $x\in\Omega$ 和有界的 z 是一致的，以及条件 (9.9) (或 (9.30)). 那么，若 $\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$，$\varphi\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$，则 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 存在一个解 $u\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

(iii) 在一般区域中的非一致椭圆型方程

现在假定方程(14.1)的系数能够按照(14.23)分解，使得下列结构条件得到满足:

$$
(14.85)\qquad
\begin{aligned}
&|p|a^{ij},\ b=O(\mathscr{E}),\\
&\bar{\delta}a_*^{ij}=O(\sqrt{\lambda_*\mathscr{E}}/|p|),\\
&\delta a_*^{ij}=o(\sqrt{\lambda_*\mathscr{E}}/|p|),\\
&\bar{\delta}b\leqslant O(\mathscr{E}),\\
&\delta b\leqslant o(\mathscr{E}),
\end{aligned}
$$

当$|p|\to\infty$时关于$x\in\Omega$和有界的z是一致的. 那么，结合定理9.4, 12.8, 13.1和14.2, 我们有

定理 14.11 设Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界区域，并假定算子Q在$\overline{\Omega}$中是椭圆的，其系数a^{ij}, $b\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$满足结构条件(14.85)以及条件(9.9)(或(9.30)). 那么，若$\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$, $\varphi\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0<\gamma<1$, 则 Dirichlet 问题: 在Ω中$Qu=0$, 在$\partial\Omega$上$u=\varphi$存在一个解$u\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

定理 14.11 显然是定理 14.8 的推广，而且定理 14.8 后面的附注在这里还是恰当的. 注意，当形为(14.2)的一个分解成立时，我们有$\delta a_*^{ij}=0$, 此外，若$a_*^{ij}(p)=a_*^{ij}(p/|p|)$, 我们还有$\bar{\delta}a_*^{ij}=0$.

(iv) 在凸区域上的非一致椭圆型方程

现在我们假定分解(14.2)成立，且

$$
(14.86)\qquad
\begin{aligned}
&b=o(|p|\Lambda),\\
&\delta b\leqslant O(b^2/|p|^2\mathscr{T}_*),\ (\mathscr{T}_*=[a_*^{ij}]\text{的迹}),
\end{aligned}
$$

当$|p|\to\infty$时，对于$x\in\Omega$和有界的z是一致的. 那么从定理12.8, 14.1和推论13.5我们有

定理 14.12 设Ω是$\mathbb{R}^n$中一致凸区域，并设算子Q在$\overline{\Omega}$中是椭圆的，其系数a^{ij}, $b\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$满足结构条件(14.86). 那么，若$\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$, $\varphi\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0<\gamma<1$, 则只要问题

$$
(14.87)\qquad
\begin{aligned}
&Q_\sigma u=a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u+\sigma b(\sigma x+(1-\sigma)x_0,\sigma u,Du)=0,\\
&u=\sigma\varphi\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\ 0\leqslant\sigma\leqslant 1
\end{aligned}
$$

的$C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$解族对某个固定的$x_0\in\Omega$在$\Omega$中一致有界，Dirichlet 问题: 在$\Omega$中$Qu=0$, 在$\partial\Omega$上$u=\varphi$就存在一个解$u\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

当用定理 14.4 来代替上面的定理 14.1 时，类似的做法就能得出散度形式 (14.55) 的非一致椭圆型方程的一个存在定理. 我们假定(14.55)中的系数 A^i 和 B 对于某个 $\tau\in\mathbb{R}$ 满足条件

$$
\begin{aligned}
&|p|^{\tau}\leqslant O(\lambda),\\
&|p|D_z\mathbf{A},\ D_x\mathbf{A},\ B=o(|p|^{\tau+1}),
\end{aligned}
\tag{14.88}
$$

当 $|p|\to\infty$ 时对于 $x\in\Omega$ 和有界的 z 是一致的. 那么我们有

定理 14.13 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一致凸区域, 并设算子 Q 在 $\overline{\Omega}$ 上是椭圆的, 其系数 $A^i\in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $i=1,\cdots,n$, $B\in C^{\gamma}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $0<\gamma<1$, 满足结构条件(14.88). 那么, 若 $\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$, $\varphi\in C^{2,\gamma}(\Omega)$, 则只要问题(12.42)的 $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ 解族在 Ω 中是一致有界, Dirichlet 问题: 在 Ω 中 $Qu=0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 就存在一个解 $u\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

(v) 带有边界曲率条件的问题. 现在考虑既按 (13.43) 又按 (14.23) 来分解的那些算子. 特别, 我们将假定

$$
\begin{aligned}
a^{ij}(x,z,p)&=a^{ij}_{\infty}(x,p/|p|)+a^{ij}_0(x,z,p)\\
&=a^{ij}_*(x,z,p/|p|)+\frac{1}{2}[p_ic_j(x,z,p)\\
&\qquad+c_i(x,z,p)p_j],\\
b(x,z,p)&=|p|b(x,z,p/|p|)+b_0(x,z,p),
\end{aligned}
\tag{14.89}
$$

其中 $a^{ij}_{\infty}\in C^1(\overline{\Omega}\times B_1(0))$, a^{ij}_*, $b_{\infty}\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times B_1(0))$, $i,j=1,\cdots,n$, 矩阵 $[a^{ij}_{\infty}]$, $[a^{ij}_*]$ 是非负且对称的, 而 b_{∞} 关于 z 是非增的. 我们将施加下列结构条件

$$
\begin{aligned}
&\delta\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}+o(\mathscr{E}),\\
&\delta\mathscr{E},\ \delta b,\ (\delta-1)b_0\leqslant O(\mathscr{E}),\\
&\delta a^{ij}_*=O(\sqrt{\mathscr{E}}/|p|),\\
&a^{ij}_0=o(1),\\
&b_0=o(|p|),
\end{aligned}
\tag{14.90}
$$

当 $|p|\to\infty$ 时对于 $x\in\Omega$ 和有界的 z 是一致的. 那么, 根据定理 12.8, 13.9 和 14.2 我们有

定理 14.14 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, 并设算子 Q 在 $\overline{\Omega}$ 中

是椭圆的，其系数 a^{ij}, $b\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 满足结构条件(14.89)，(14.90)．那么，若 $\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$, $\varphi\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0<\gamma<1$，而且在每点 $y\in\partial\Omega$ 处不等式

$$(14.91)\qquad \mathscr{K}^+>b_\infty(y,\ \varphi(y),\ \boldsymbol{\nu}),\ \mathscr{K}^->-b_\infty(y,\ \varphi(y),\ -\boldsymbol{\nu})$$

成立．其中 $\boldsymbol{\nu}$ 是 y 点处的单位内法向，以及由(13.44)给出的 $\mathscr{K}^+$，$\mathscr{K}^-$ 是非负的，由此推出只要问题(12.42)的 $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ 解族在 Ω 中一致有界，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 就是可解的．

为了在(14.91)中允许非严格的不等式，我们需要加强结构条件(14.90)，使得

$$(14.92)\qquad \begin{aligned} &\delta\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}+o(\mathscr{E}),\\ &1,\ \delta\mathscr{E},\ \delta b,\ \delta b_0\leqslant O(\mathscr{E}),\\ &\delta a_*^{ij}=O(\sqrt{\mathscr{E}}/|p|),\\ &a_0^{ij}=O(\mathscr{E}/|p|),\\ &b_0=O(\mathscr{E}), \end{aligned}$$

当 $|p|\to\infty$ 时对于 $x\in\Omega$ 和有界的 z 是一致的．那么，根据定理 12.8, 13.6, 14.2 我们有

定理 14.15 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，并设算子 Q 在 $\overline{\Omega}$ 中是椭圆的，其系数 a^{ij}, $b\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 满足结构条件(14.89)，(14.92)．那么，若 $\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$, $\varphi\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0<\gamma<1$，以及在每点 $y\in\partial\Omega$ 处不等式

$$(14.93)\qquad \begin{aligned} &\mathscr{K}^+\geqslant b_\infty(y,\ \varphi(y),\ \boldsymbol{\nu}),\\ &\mathscr{K}^-\geqslant-b_\infty(y,\ \varphi(y),\ -\boldsymbol{\nu}),\ \mathscr{K}^\pm\geqslant 0 \end{aligned}$$

成立，由此推出只要问题(14.42)的 $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ 解族在 Ω 中一致有界，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 就是可解的．

14.6. 连续边值的存在定理

借助于内估计（定理 14.3 和 14.6），上节的某些存在定理能被推广到只假定函数 φ 在 $\partial\Omega$ 上连续时仍成立．基本方法是用函数 $\varphi_m\in C^{2,\gamma}(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上一致逼近函数 φ，并对函数 $u_m\in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$

解 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu_m=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u_m=\varphi_m$. 内估计(定理 14.3 和定理 14.6)结合导数的内部 Hölder 估计(定理 12.1 或 12.3)以及 Schauder 内估计(定理 6.2)保证了序列$\{u_m\}$的一个子序列以及它的一阶、二阶导数在 Ω 的紧子集上一致收敛到一个函数 $u\in C^{2,\gamma}(\Omega)$，$u$ 在 Ω 中满足 $Qu=0$. 连续模的估计(定理 13.15)保证了 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 而且在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$. 为了使这种做法行得通，我们还要求$\{u_m\}$是一致有界的，即我们需要一个象在第 9 章那样的极大值原理. 用 $C^{2,\gamma}$ 区域来逼近区域 Ω，通过定理 13.15 我们还可以去掉限制 $\partial\Omega\in C^{2,\gamma}$. 现在我们来叙述两个通过这种方法可以得到的一般区域的存在定理. 在第 15.3 节中我们将考虑极小曲面方程和规定了平均曲率的方程的类似结果.

定理 14.16 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，在边界 $\partial\Omega$ 的每一点处满足外部球条件. 设 Q 是 Ω 中的一个椭圆算子，其系数 a^{ij}，$b\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 满足定理 14.3 和 13.1 的假设以及条件(9.9)(或(9.30)). 那么，对于任何函数 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 存在一个解 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$.

对于散度形式(14.56)的方程，我们有

定理 14.17 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，在边界 $\partial\Omega$ 的每一点处满足外部球条件. 设 Q 是一个散度结构算子，其系数 $A^i\in C^{1,\gamma}(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，$i=1,\cdots,n$，$B\in C^\gamma(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，$0<\gamma<1$，满足定理 14.6 的假设，以及定理 9.7 对 $\alpha=\tau+2$ 的假设. 那么，对任何函数 $\varphi\in C_0(\partial\Omega)$，Dirichlet 问题：在 Ω 中 $Qu=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 存在一个解 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^{2,\gamma}(\Omega)$.

评注

在第 14.1 和 14.2 节中介绍的接近于梯度估计的极大值原理中的主要思想可追溯到 Bernstein[BE 3, 6]. 为了产生一致椭圆型方程的全局和内梯度估计，Ladyzhenskaya[LA]和 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva[LU2, 4]从本质上发展了 Bernstein 的方法. 后来 Serrin[SE 3]由于利用了形为(14.2)的表示，把这些结果推广

到包括与规定了平均曲率的方程 (9.7) 具有类似特征的方程. 定理 14.2 和14.3 非常接近于[LU 5, 6]中的结果(也见[IV 1, 2]), 虽然和定理 14.1 一起它们在[SE 4]中的陈述是类似的. 不用乘子 r, s, t, [LU 5, 6] 中的作者们指出, 他们的假设只要被等价于给定算子的一个算子满足就行了. 我们的处理与[LU 5, 6]和[SE 4]中的处理不同, 我们考虑 $C^2(\Omega)$ 解来代替 $C^3(\Omega)$ 解. 还有, 我们的证明和结果对于空间 $C^{0,1}(\overline{\Omega})\cap W^{2,2}(\Omega)$ 中的解仍然有效.

散度结构方程的解的全局梯度界的定理 14.4 应属于 Trudinger[TR 3], 而关于一致椭圆型散度结构方程的定理 14.5, 14.6 和 14.7 中的估计应属于 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva [LU 1, 2]. 定理 14.6 的我们的证明在某些方面不同于 [LU 2] 中的证明. 对于非一致椭圆型的, 散度结构的方程的进一步梯度估计见[I0], [OS 1, 2]. 在第 14.5 和 14.6 节中的某些存在定理在文献中已经有了确切的阐述, 例如参看[LU4], [SE3]. 评述性文章 [ED] 对存在性方法的技巧的各个方面提供了一个清楚的说明.

习　题

14.1. 证明: 假如 $\operatorname*{osc}_{\Omega} u$ 充分小, 则定理 14.2 对于正的 a 和 c 仍然成立.

14.2. 证明: 假如 $b<-2\sqrt{ac}$, 则定理 14.2 和 14.3 对于正的 a 和 c 仍然成立.

14.3. 证明: 若从定理 14.3 中去掉假设 $a\leqslant 0$ 或 $c\leqslant 0$, 我们仍然可以得到一个形为 (14.52) 的估计, 其中常数 C 另外还依赖于解 u 在 y 点的连续模.

14.4. 证明: 如果结构条件(14.60)代之以

(14.94) $\quad |p|D_z\boldsymbol{A},\ D_x\boldsymbol{A},\ B=o(|p|^\gamma)$, 当 $|p|\to\infty$ 时,

其中 $\gamma=\tau+1+(\tau+2)/n$, 假如 $\tau>-1$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$, 则定理 14.4 仍然成立.

14.5. 证明: 如果结构条件(14.60)代之以

(14.95) $\quad |p|D_z\boldsymbol{A},\ D_x\boldsymbol{A},\ B=o(|p|^\gamma)$, 当 $|p|\to\infty$ 时,

其中 $\gamma=\tau+1+1/n$, 假如 $\tau\leqslant-1$, 且在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$, 则定理 14.4 仍

然成立.

14.6. 证明: 假如结构条件(14.59),

(14.63)′ $$D_p\boldsymbol{A}=O(|p|^{\tau+\sigma}),$$

(14.65)′ $$g=O(|p|^{\tau+2}),$$

对于 $\tau>-1$, $\sigma<1$ 成立, 则对于方程(14.56)的 $C^2(\Omega)$ 解, 内梯度的界是正确的.

第十五章

平均曲率型方程

在这一章里，我们把注意力集中在这样两个问题上：一个是规定了平均曲率的方程

(15.1) $\mathfrak{M}u=(1+|Du|^2)\Delta u-D_iuD_juD_{ij}u=nH(1+|Du|^2)^{3/2}$,

另一个是两个变量的这类方程. 我们主要的兴趣是解的导数的内估计. 将会看到，我们不仅能建立这些方程的解的梯度内估计，而且还能建立强二阶导数的估计，这种二阶导数的估计是由方程的非线性性所引起的，这也是它们不同于一致椭圆型方程（例如 Laplace 方程）的地方. 特别是我们知道 $\mathbb{R}^2$ 中极小曲面方程的 $C^2(\mathbb{R}^2)$ 解必定是线性函数，这是 Bernstein 的一个经典结果，我们将推广这个结果（定理 15.12）.

这一章中处理梯度内估计的方法，在很大程度上是不同于第 14 章的（尽管这与 14.4 节中的散度形式的情形有某些共同的特色）. 方程 (15.1) 的解的梯度内估计，即定理 15.5 是通过考察 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面上的切向梯度 (tangential gradient) 和 Laplace 算子来得到的，这个超曲面乃是解 u 的图象. 超曲面上的基本估计是在 15.1 节中给出的.

在 15.4 节中，我们研究了两个变量的规定平均曲率的方程的一般类型. 在 15.5 节中，通过 $\mathbb{R}^3$ 中曲面间的拟保角映射的处理，导出了一阶和二阶导数的内估计（定理 15.20 和 15.21），而这个拟保角映射是 11.1 节的推广.

这一章的 15.4 到 15.8 节，以及 15.1 节的一部分，都是同 L. M. Simon 合作写成的，这些内容本质上都是他的贡献.

15.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个子集 $\mathfrak{S}$ 称为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 C^k 超曲面，是指 $\mathfrak{S}$ 能局

部地表示为 $\mathbb{R}^n$ 中一个开子集上的 C^k 函数的图象. 这里, 我们的兴趣是 C^2 超曲面, 为简便计, 我们假定 $\mathfrak{S}$ 能全局地表示成一个 C^2 函数的等高面 (level surface), 也就是存在一个 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的开子集 $\mathscr{U}$ 和一个函数 $\Phi\in C^2(\mathscr{U})$, 在 $\mathscr{U}$ 上 $D\Phi\neq 0$, 使得

$$\mathfrak{S}=\{x\in\mathscr{U}\,|\,\Phi(x)=0\}. \tag{15.2}$$

就本章的应用而言, $\mathfrak{S}$ 总是函数 $u\in C^2(\Omega)$ 的图象, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域. 对于这种情形, 我们可取 $\mathscr{U}=\Omega\times\mathbb{R}$, 以及

$$\Phi=x_{n+1}-u(x'),\ x'=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\Omega. \tag{15.3}$$

当 $\mathfrak{S}$ 由 (15.2) 给出时, $\mathfrak{S}$ 的法线 $\boldsymbol{\nu}$(指向 Φ 增加的方向) 为

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{D\Phi}{|D\Phi|}.$$

设 $g\in C^1(\mathscr{U})$, g 在 $\mathfrak{S}$ 上的*切向梯度* δg 定义为

$$\delta g=Dg-(\boldsymbol{\nu}\cdot Dg)\boldsymbol{\nu}. \tag{15.4}$$

对于任一点 $y\in\mathfrak{S}$, 切向梯度 $\delta g(y)$ 是梯度 $Dg(y)$ 在 $\mathfrak{S}$ 的点 y 处的切平面上的投影. 显然

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\delta g=0, \tag{15.5}$$

$$|\delta g|^2=|Dg|^2-|\boldsymbol{\nu}\cdot Dg|^2, \tag{15.6}$$

因此

$$|\delta g|\leqslant|Dg|, \tag{15.7}$$

$$\text{当 } D_{n+1}g\equiv 0 \text{ 时 } |\nu_{n+1}|\,|Dg|\leqslant|\delta g|. \tag{15.8}$$

而且, δg 只依赖于 g 在 $\mathfrak{S}$ 上的值是很明显的. 因为, 假设 $\bar{g}\in C^1(\mathscr{U})$ 在 $\mathfrak{S}$ 上满足 $g=\bar{g}$. 于是 $D(g-\bar{g})=k\boldsymbol{\nu}$, 其中 k 为某个常数, 因此

$$\delta(g-\bar{g})=k\boldsymbol{\nu}-k\boldsymbol{\nu}=0.$$

其次, 根据附录中的公式 (A13), 我们有

$$\delta_i\nu_i=D_i\left[\frac{D_i\Phi}{|D\Phi|}\right]-\nu_i\nu_jD_j\nu_i=-nH-\frac{1}{2}\nu_jD_j|\nu|^2=-nH,$$

其中 H 表示 $\mathfrak{S}$ 关于法线 $\boldsymbol{\nu}$ 的平均曲率. 因此有公式

$$H=-\frac{1}{n}\delta_i\nu_i. \tag{15.9}$$

下面的引理给出了微分算子 δ 的分部积分公式.

引理 15.1 设 dA 是 $\mathfrak{S}$ 的面积元素，则对所有 $g\in C_0^1(\mathscr{U})$ 有

$$\int_{\mathfrak{S}}\delta g\,dA=-n\int_{\mathfrak{S}}gH\boldsymbol{\nu}\,dA. \tag{15.10}$$

证明 我们先对 $\mathfrak{S}$ 是 C^2 函数的图象的情形建立公式(15.10)，然后借助单位分解来得到一般情形的公式. 为此，假设 Φ 是由(15.3)给出，因而在点 $(x,\ u(x))\in\mathfrak{S}$ 上，有

$$\begin{aligned}\nu_i&=-\frac{D_iu}{v},\quad i=1,\ \cdots,\ n,\\ \nu_{n+1}&=\frac{1}{v},\\ H&=\frac{1}{n}D_i\left[\frac{D_iu}{v}\right],\\ dA&=vdx,\end{aligned} \tag{15.11}$$

其中

$$v=\sqrt{1+|Du|^2}.$$

定义 $\tilde{g}\in C^1(\mathscr{U})$ 满足

$$\tilde{g}(x,\ x_{n+1})=g(x,\ u(x)),$$

显然，在 $\mathfrak{S}$ 上 $\tilde{g}=g$，因此，$\delta\tilde{g}=\delta g$. 因而对 $i\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{S}}\delta_ig\,dA&=\int_{\mathfrak{S}}\delta_i\tilde{g}\,dA=\int_{\Omega}(D_ig-\nu_i\nu_jD_jg)\,v\,dx\\ &=-\int_{\Omega}\tilde{g}\Big\{D_iv-\sum_{j=1}^nD_j(\nu_i\nu_jv)\Big\}dx\quad\text{由分部积分},\\ &=-\int_{\Omega}\tilde{g}\Big\{D_iv-\sum_{j=1}^n\nu_jD_j(\nu_iv)+nvH\nu_i\Big\}dx\ \text{由(15.11)},\\ &=-n\int_{\Omega}\tilde{g}H\nu_iv\,dx-\int_{\Omega}\tilde{g}\Big(\sum_{j=1}^n\nu_jD_{ij}u+D_iv\Big)dx\\ &=-n\int_{\Omega}\tilde{g}H\nu_iv\,dx\ \text{由(15.11)}.\end{aligned}$$

对 $i=n+1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{S}}\delta_{n+1}g\,dA&=\int_{\mathfrak{S}}\delta_{n+1}\tilde{g}\,dA=-\int_{\Omega}\nu_{n+1}\sum_{j=1}^n\nu_jD_j\tilde{g}v\,dx\\ &=\int_{\Omega}\tilde{g}\sum_{j=1}^nD_j\nu_j\,dx=-n\int_{\Omega}\tilde{g}H\,dx\\ &=-n\int_{\mathfrak{S}}gH\nu_{n+1}dA.\ ∎\end{aligned}$$

注意，在引理 15.1 中 $i=n+1$ 的情形与规定平均曲率方程的积分形式是等价的。

对于 $g\in C^2(\mathscr{U})$，g 在 $\mathfrak{S}$ 上的 Laplace-Beltrami 算子定义如下：

$$\Delta g=\delta_i\delta_i g. \tag{15.12}$$

从分部积分公式(15.10)和(15.5)，对所有 $\varphi\in C_0^2(\mathscr{U})$，我们有

$$\int_{\mathfrak{S}}\varphi\Delta g\,dA=\int_{\mathfrak{S}}g\Delta\varphi\,dA=\int_{\mathfrak{S}}-\delta g\cdot\delta\varphi\,dA. \tag{15.13}$$

现在着手导出关于 $\mathfrak{S}$ 上算子 δ 和 Δ 的一些重要不等式。这些不等式是定理 2.1 的平均值不等式以及引理 7.14 中的位势型表达式在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中超曲面上的推广。设 y 是 $\mathfrak{S}$ 上的点，$r=|x-y|$，$\psi\in C^2(\mathbb{R})$，通过计算，我们有

$$\delta_i\psi(r)=(\delta_{ij}-\nu_i\nu_j)\frac{x_j-y_j}{r}\psi'(r),$$

$$\begin{aligned}\Delta\psi(r)&=\frac{n\psi'(r)}{r}+\left[\frac{\psi''(r)}{r^2}-\frac{\psi'(r)}{r^3}\right](r^2-|\nu_i(x_i-y_i)|^2)\\&\quad+\frac{n\psi'(r)}{r}H\nu_i(x_i-y_i)\\&=\frac{n\psi'(r)}{r}+\left[\psi''(r)-\frac{\psi'(r)}{r}\right]|\delta r|^2\\&\quad+\frac{n\psi'(r)}{r}H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y),\end{aligned} \tag{15.14}$$

按(15.6)，有

$$|\delta r|^2=1-\frac{|\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)|^2}{r^2}.$$

特别，令 χ 为 $C^1(\mathbb{R})$ 中的非负非增函数，其支集包含在区间 $(-\infty,1)$ 内，又令

$$\psi(r)=\int_r^\infty\tau\chi(\tau/\rho)d\tau,$$

其中 $0<\rho<R$，球 $B_R(y)\subset\mathscr{U}$。于是由(15.14)得到

$$\Delta\psi(r) = -\{n\chi(r/\rho) + r\chi'(r/\rho)|\delta r|^2/\rho + n\chi(r/\rho)H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)\}$$

$$(15.15)\qquad = \rho^{n+1}D_\rho[\rho^{-n}\chi(r/\rho)] + r\chi'(r/\rho)(1-|\delta r|^2)/\rho - n\chi(r/\rho)H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)$$

$$\leqslant \rho^{n+1}D_\rho[\rho^{-n}\chi(r/\rho)] - n\chi(r/\rho)H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y).$$

在 $\mathfrak{S}$ 是极小曲面的特殊情形,即 $H\equiv 0$ 时,不等式(15.15)简化为

$$(15.16)\qquad \Delta\psi(r) \leqslant \rho^{n+1}D_\rho[\rho^{-n}\chi(r/\rho)].$$

关系式(15.15),(15.16)在我们的内估计讨论中是基本的. 我们先考察极小曲面,即 $H\equiv 0$ 的情形,以此来说明它们的应用. 设 g 是 $L^1(\mathfrak{S})$ 中的非负函数,并假定对所有非负的 $\varphi\in C^2(\mathscr{U})$ 有

$$(15.17)\qquad \int_{\mathfrak{S}} g\Delta\varphi\, dA \geqslant 0.$$

在(15.17)中选取 $\varphi=\psi$,由(15.16)立即得到不等式

$$D_\rho\left[\frac{1}{\rho^n}\int_{\mathfrak{S}} g\chi(r/\rho)dA\right] \geqslant 0,$$

也就是说,函数

$$(15.18)\qquad I_\chi(\rho) = \frac{1}{\omega_n\rho^n}\int_{\mathfrak{S}} g\chi(r/\rho)dA$$

关于 ρ 是非减的. 设 χ 以某种适当的方式逼近于区间 $(-\infty, 1)$ 的特征函数,于是又得到函数

$$(15.19)\qquad I(\rho) = \frac{1}{\omega_n\rho^n}\int_{\mathfrak{S}\cap B_\rho(y)} g dA,$$

也是非减的. 因为对于几乎所有(关于 dA)的 $y\in\mathfrak{S}$,有

$$(15.20)\qquad \lim_{\rho\to 0} I(\rho) = g(y),$$

于是对于几乎所有的 $y\in\mathfrak{S}$ 以及 $B_R(y)\subset\mathscr{U}$,我们得到平均值不等式

$$(15.21)\qquad g(y) \leqslant \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{\mathfrak{S}\cap B_R(y)} g dA.$$

如果函数 $g\in C^2(\mathscr{U})$,在 $\mathfrak{S}$ 上有 $\Delta g\geqslant 0(=0)$,那么我们就称 g 在 $\mathfrak{S}$ 上是下调和(调和)的. 应用(15.13),于是有

引理 15.2 设 g 是 C^2 极小超曲面 $\mathfrak{S}$ 上的一个非负下调和函

数．那么，对于任何一点 $y\in\mathfrak{S}$ 以及球 $B_R(y)\subset\mathscr{U}$，不等式(15.21)成立．

当 $\mathfrak{S}$ 为超平面时，不等式(15.21)就成为 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中非负下调和函数的平均值不等式．然而要注意，在这种情形，我们并不需要假定 g 是非负的．若 g 是一个正常数，则从(15.21)得到估计

$$A(\mathfrak{S}\cap B_R(y))\geqslant\omega_n R^n, \tag{15.22}$$

其中 $A(\mathfrak{S}\cap B_R(y))$ 表示 $\mathfrak{S}\cap B_R(y)$ 的面积．今后，在无二义时我们将记 $\mathfrak{S}_R(y)=\mathfrak{S}\cap B_R(y)$，并一般简写为 $\mathfrak{S}(y)=\mathfrak{S}_R(y)$．

现在我们转到一般的超曲面 $\mathfrak{S}$ 和 $C^1(\mathscr{U})$ 函数 g 的情形．虽然，上面在极小曲面的情形中所采用的方法是可以推广的，但我们将采用稍微不同的方法来代替上面的方法，由此给出引理 15.2 的另一个证明．设 y 是 $\mathfrak{S}$ 上的一点，并设球 $B_R(y)\subset\mathscr{U}$．令 χ 是 $C^1[0,\infty)$ 中的一个非负非增函数，其支集在区间 $[0,R]$ 中．定义 $\psi\in C^2(\mathscr{U})$ 为

$$\psi(r)=\int_r^\infty\tau\chi(\tau)d\tau,$$

由(15.15)，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\psi(r)&=-\{n\chi(r)+r\chi'(r)|\delta r|^2+n\chi(r)H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)\}\\&=-(n\chi(r)+r\chi'(r))+r\chi'(r)(1-|\delta r|^2)\\&\quad-n\chi(r)H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y).\end{aligned}\tag{15.23}$$

于是，代入(15.13)，得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathfrak{S}}(n\chi(r)+r\chi'(r))g\,dA-\int_{\mathfrak{S}}r\chi'(r)(1-|\delta r|^2)g\,dA\\&\quad=-n\int_{\mathfrak{S}}\chi(r)gH\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)dA+\int_{\mathfrak{S}}\delta\psi\cdot\delta g\,dA.\end{aligned}\tag{15.24}$$

如果进一步限制 χ，使当 $r<\varepsilon$ 时，

$$\chi(r)=\varepsilon^{-n}-R^{-n},$$

这里 $0<\varepsilon<R$，我们就可以把上面的关系式写成

$$(15.25)\quad n(\varepsilon^{-n}-R^{-n})\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} g\,dA+\int_{\mathfrak{S}_R-\mathfrak{S}_\varepsilon}(n\chi(r)+r\chi'(r))g\,dA$$

$$-\int_{\mathfrak{S}_R-\mathfrak{S}_\varepsilon} r\chi'(r)(1-|\delta r|^2)g\,dA$$

$$=-n\int_{\mathfrak{S}_R}\chi(r)gH\nu\cdot(x-y)dA+\int_{\mathfrak{S}_R}\delta\psi\cdot\delta g\,dA.$$

(15.25)式启发我们应选择 χ, 使在区间 $[\varepsilon, R)$ 上 $n\chi(r)+r\chi'(r)=$ 常数. 从而,用下式定义函数 χ_ε:

$$\chi_\varepsilon(r)=\begin{cases}\varepsilon^{-n}-R^{-n}, & 0\leqslant r<\varepsilon,\\ r^{-n}-R^{-n}, & \varepsilon\leqslant r<R,\\ 0, & r\geqslant R.\end{cases}$$

我们还不能直接用 χ_ε 来代替 (15.25) 中的 χ. 然而可以用 $C^1[0,\infty)$ 中的非负非增函数序列 $\{\chi_m\}$ 来代替 χ, 这个序列中的函数的支集都在 $[0, R)$ 内, 其导数一致有界. 更进一步要求 $\{\chi_m\}$ 一致收敛到 χ_ε, 导数序列 $\{\chi'_m\}$ 逐点收敛到函数

$$\chi'_{\varepsilon(r)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<\varepsilon,\\ -nr^{-(n+1)}, & \varepsilon\leqslant r<R,\\ 0, & r\geqslant R,\end{cases}$$

于是,从公式(15.25)可以得到

$$(15.26)\quad (\varepsilon^{-n}-R^{-n})\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} g\,dA+\int_{\mathfrak{S}_R-\mathfrak{S}_\varepsilon} gr^{-n}(1-|\delta r|^2)dA$$

$$=R^{-n}\int_{\mathfrak{S}_R-\mathfrak{S}_\varepsilon} g\,dA-(\varepsilon^{-n}-R^{-n})\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} gH\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)dA$$

$$-\int_{\mathfrak{S}_R-\mathfrak{S}_\varepsilon} g(r^{-n}-R^{-n})H\nu\cdot(x-y)dA$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\mathfrak{S}_R}\delta\psi_\varepsilon(r)\cdot\delta g\,dA,$$

其中
$$\psi_\varepsilon(r)=\int_r^R \tau\chi_\varepsilon(\tau)d\tau.$$

令 ε 趋于零,于是我们有

$$g(y)+\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}\frac{(1-|\delta r|^2)}{r^n}g\,dA$$

$$(15.27)\qquad =\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{\mathfrak{S}_R}g\,dA-\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}g(r^{-n}-R^{-n})H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)\,dA$$

$$+\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}\delta\psi(r)\cdot\delta g\,dA,$$

其中
$$\psi(r)=\int_r^R\tau(\tau^{-n}-R^{-n})\,d\tau.$$

这时，引理 15.2 就是恒等式(15.27)和(15.13)的一个直接推论. 应用不等式

$$(15.28)\qquad \begin{aligned}|H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)|&\leqslant r^{-2}|\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)|^2+\frac{1}{4}H^2r^2\\&=1-|\delta r|^2+\frac{1}{4}H^2r^2,\end{aligned}$$

我们可以从(15.27)得到估计

$$(15.29)\qquad \begin{aligned}g(y)\leqslant&\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{\mathfrak{S}_R}g|\delta r|^2\,dA\\&+\frac{1}{4\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}gH^2r^2(r^{-n}-R^{-n})\,dA\\&-\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}(r^{-n}-R^{-n})(x-y)\cdot\delta g\,dA.\end{aligned}$$

这样，我们就证明了引理 15.2 的下述推广.

引理 15.3 设 g 是 $C^1(\mathscr{U})$ 中的一个非负函数，那么对任一点 $\boldsymbol{y}\in\mathfrak{S}$ 以及球 $B_R(y)\subset\mathscr{U}$，不等式(15.29)成立.

在下一节中将根据引理 15.3 导出梯度的内估计. 注意，当 $g\in C^2(\mathscr{U})$ 时，我们可以把(15.29)中的最后一项表示成

$$-\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}\psi(r)\Delta g\,dA.$$

对于本章后面将要讨论的两个变量的方程，还需要不等式(15.26)和(15.29)的更进一步的推论. 特别，如果我们在不等式(15.29)中令 $n=2$，得

$$(15.30)\qquad \begin{aligned}g(y)\leqslant&\frac{1}{\pi R^2}\int_{\mathfrak{S}_R}g\left(1+\frac{1}{4}H^2R^2\right)dA\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}_R}r(r^{-2}-R^{-2})|\delta g|\,dA.\end{aligned}$$

在(15.30)中令 $g\equiv 1$, 我们得到估计

$$(15.31)\qquad 1\leqslant\frac{A(\mathfrak{S}_R)}{\pi R^2}+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{S}_R}H^2\,dA,$$

其中 $A(\mathfrak{S}_R)$ 表示 $\mathfrak{S}_R$ 的面积. 因此, 如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个紧致的超曲面(或者更一般地, 如果 $\mathscr{U}=\mathbb{R}^3$, 当 $R\to\infty$ 时 $A(\mathfrak{S}_R)=o(R^2)$), 我们就有

$$(15.32)\qquad \int_{\mathfrak{S}}H^2\,dA\geqslant 4\pi.$$

此外, 能够证明当且仅当 $\mathfrak{S}$ 是球面时, (15.32) 中的等号成立 [TR9].

下面用(15.19)来定义 I, 从(15.26)和(15.28)得

$$\begin{aligned}\omega_n I(\varepsilon)&=\varepsilon^{-n}\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon}g\,dA\\&\leqslant R^{-n}\int_{\mathfrak{S}_R}g|\delta r|^2dA+\varepsilon^{1-n}\int_{\mathfrak{S}_\varepsilon}g|H|\,dA\\&\quad+\frac{1}{4}\int_{\mathfrak{S}_R}gH^2r^2(r^{-n}-R^{-n})\,dA+\frac{1}{n}\int_{\mathfrak{S}_R}\delta\psi_\varepsilon(r)\cdot\delta g\,dA.\end{aligned}$$

所以, 应用 Young 不等式(7.6), 便得估计

$$(15.33)\qquad \begin{aligned}\sup_{(0,R)}I(\rho)\leqslant&\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{\mathfrak{S}_R}g[n|\delta r|^2+|HR|^n+nH^2r^2R^n\\&\times(r^{-n}-R^{-n})]\,dA\\&+\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}r(r^{-n}-R^{-n})|\delta g|\,dA.\end{aligned}$$

注意, (15.33)的最后一项可以用

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}\psi(r)(-\Delta g)^+\,dA$$

来代替, 这里 $g\in C^2(\mathscr{U})$. 对不等式(15.33)的特殊情形 $n=2$, $g\equiv 1$, 我们得到估计

$$(15.34)\qquad \sup_{(0,R)}\frac{A(\mathfrak{S}_R)}{\rho^2}\leqslant\frac{2A(\mathfrak{S}_R)}{R^2}+3\int_{\mathfrak{S}_R}H^2\,dA.$$

下面我们来确定

$$J(\rho)=D_\rho\Big[\int_{\mathfrak{S}_\rho}g|\delta r|^2\,dA\Big]$$

的一个估计. 如引理 15.2 的证明中那样选择 χ，并应用(15.13)和(15.5)，我们有

$$D_\rho\left[\int_{\mathfrak{S}}\chi(r/\rho)g|\delta r|^2dA\right]=\frac{n}{\rho}\int_{\mathfrak{S}}\chi(r/\rho)[1+H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)]g\,dA-\frac{1}{\rho}\int_{\mathfrak{S}}\delta\psi(r)\cdot\delta g\,dA.$$

于是，当 χ 趋近于区间 $(-\infty, 1)$ 的特征函数时，我们看到对所有的 $\rho\in(0, R)$，$J(\rho)$ 有明确定义，此外还有

$$J(\rho)\leqslant\frac{1}{\rho}\int_{\mathfrak{S}_\rho}[n|g|(1+|H|r)+r|\delta g|]dA\leqslant\frac{n}{\rho}\int_{\mathfrak{S}_\rho}|g|dA+\int_{\mathfrak{S}_\rho}(n|Hg|+|\delta g|)dA. \tag{15.35}$$

特别，如果 $n=2$，则对于 $g\equiv1$，我们有

$$D_\rho\left[\int_{\mathfrak{S}_\rho}|\delta r|^2dA\right]\leqslant n\left[\frac{A(\mathfrak{S}_\rho)}{\rho}+\int_{\mathfrak{S}_\rho}|H|dA\right]\leqslant10\rho\left[\frac{A(\mathfrak{S}_R)}{R^2}+\int_{\mathfrak{S}_R}H^2dA\right]\quad\text{由(15.34)}. \tag{15.36}$$

位势型关系式(15.27)，(15.29)和(15.30)有点类似于第 7 章的引理 7.14 和 7.16. 事实上，对于二维曲面的情形，我们将用(15.30)导出与定理 7.19 的 Morrey 估计相类似的一个结果. 下面这个引理在 15.5 节中求广义拟保角映射的 Hölder 估计时将要用到.

引理 15.4 设 $g\in C^1(\mathscr{U})$，$n=2$，又设存在常数 $K>0$ 和 $\beta\in(0, 1)$，使得

$$\int_{\mathfrak{S}_\rho(\bar{y})}|\delta g|dA\leqslant K\rho(\rho/R)^\beta \tag{15.37}$$

对所有 $\bar{y}\in\mathfrak{S}_{R/4}(y)$ 和所有 $\rho\leqslant R/4$ 成立. 则

$$\sup_{x\in\mathfrak{S}_\rho^*(y)}|g(x)-g(y)|\leqslant CK(\rho/R)^\beta\left\{\frac{A(\mathfrak{S}_R)}{R^2}+\int_{\mathfrak{S}_R}H^2dA\right\}, \tag{15.38}$$

其中 C 是常数，$\mathfrak{S}_\rho^*(y)$ 表示包含 y 的 $\mathfrak{S}_\rho(y)$ 的连通部分.

证明 我们先把(15.30)写成

$$(15.39)\qquad g(y)\leqslant\frac{1}{\pi}\left\{\int_{\mathfrak{S}_R} g(R^{-2}+H^2/4)\,dA\right.$$
$$\left.+\int_0^R\rho^{-2}\int_{\mathfrak{S}_\rho}|\delta g|\,dA\,d\rho\right\},$$

并对于 $\rho\leqslant R/4$，定义

$$g_1=\sup_{\mathfrak{S}^*_\beta(y)} g,\quad g_0=\inf_{\mathfrak{S}^*_\beta(y)} g.$$

若
$$g_1-g_0\leqslant 6\beta^{-1}K(\rho/R)^\beta,$$
那么取 $C=6\beta^{-1}$，并根据(15.34)，引理 15.4 就得证. 如果
$$g_1-g_0>6\beta^{-1}K(\rho/R)^\beta,$$
那么设 N 是使下式成立的最大整数：
$$N\leqslant\beta(g_1-g_0)/6K(\rho/R)^\beta,$$
然后再细分区间 $[g_0,\ g_1]$ 为 N 个长度 $\geqslant 6\beta^{-1}(\rho/R)^\beta$ 的两两不相交的区间 $I_1, I_2, \cdots, I_N$. 对每一 $j=1, \cdots, N$，令 ψ_j 是$C^1(\mathbb{R})$中的非负函数，其支集包含在 I_j 内，并且 $\max\psi_j=1$，$\max\psi_j'\leqslant\beta/2K\cdot(\rho/R)^\beta$.（很清楚，这样的函数是存在的，因为 I_j 的长度 $\geqslant 6\beta^{-1}K(\rho/R)^\beta$.）由于 $\mathfrak{S}^*_\rho(y)$是连通的，所以对于每个 $j=1, 2, \cdots, N$，存在一点 $x^{(j)}\in\mathfrak{S}^*_\rho(y)$使得 $\psi_j[g(x^{(j)})]=1$. 于是，把(15.39)中的 y 换成 $x^{(j)}$，R 换成 ρ，g 换成 $\psi_j\circ g$，对所有的 $\rho\leqslant R/4$ 便得到

$$1\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{S}_\sigma(x^{(j)})}\psi_j(g)(\rho^{-2}+H^2/4)\,dA$$
$$+\int_0^\rho\sigma^{-2}\int_{\mathfrak{S}_\sigma(x^{(j)})}|\delta\psi_j\circ g|\,dA\,d\sigma.$$

从而，应用(15.37)，便有

$$\int_0^\rho\sigma^{-2}\int_{\mathfrak{S}_\sigma(x^{(j)})}|\delta\psi_j\circ g|\,dA\,d\sigma$$
$$\leqslant\beta R^\beta(2K\rho^\beta)^{-1}\int_0^\rho\sigma^{-2}\int_{\mathfrak{S}_\sigma(x^{(j)})}|\delta g|\,dA\,d\sigma$$
$$\leqslant\beta R^\beta(2K\rho^\beta)^{-1}KR^{-\beta}\int_0^\rho\sigma^{\beta-1}\,d\sigma=\frac{1}{2}.$$

然后合并最后两个不等式就给出

$$1\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{S}_\rho(x^{(j)})}\psi_j(g)(\rho^{-2}+H^2/4)\,dA+\frac{1}{2},$$

于是

$$1\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{\mathfrak{S}_\rho(x^{(j)})}\psi_j(g)\,(\rho^{-2}+H^2/4)\,dA$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{\mathfrak{S}_{2\rho}(y)}\psi_j(g)\,(\rho^{-2}+H^2/4)\,dA.$$

对 $j=1,\cdots,N$ 求和,并注意到 $\sum\psi_j\leqslant1$, 就得到

$$N\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{\mathfrak{S}_{2\rho}(y)}(\rho^{-2}+H^2)\,dA\leqslant C\left\{\frac{A(\mathfrak{S}_R)}{R^2}+\int_{\mathfrak{S}_R}H^2\,dA\right\}$$

由(15.34),

由此可知,估计(15.38)成立. ∎

附注 如果 g 具有紧支集, 在(15.27)和(15.29)中令 R 趋于无穷,我们就得到关系式

$$g(y)+\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}}\frac{(1-|\delta r|^2)}{r^n}\,g\,dA$$

$$(15.40)\qquad =\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}}\frac{H\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)}{r^n}\,g\,dA-\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathfrak{S}}\frac{(x-y)\cdot\delta g}{r^n}dA,$$

$$g(y)\leqslant\frac{1}{4\omega_n}\int_{\mathfrak{S}}gH^2r^{2-n}\,dA-\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathfrak{S}}\frac{(x-y)\cdot\delta g}{r^n}\,dA.$$

这些不等式可以用来建立 Sobolev 型嵌入定理(习题 15.1, 15.2). 注意, Sobolev 不等式, 即定理 7.10 已被 Miranda[MD1] 推广到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小超曲面上, 并被 Allard[AA], Michael 和 Simon[MS1]推广到任意子流形上.

15.2. 梯度的内估计

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域, u 是 $C^2(\Omega)$ 中的函数. 如果 $\mathfrak{S}$ 表示 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的图象,那么 $\mathfrak{S}$ 在点 $x=(x', u(x'))\in\mathfrak{S}$ 处(关于上法线)的平均曲率为

$$(15.41)\qquad H(x')=-\frac{1}{n}D_i\nu_i(x')=\frac{1}{n}D_i\left[\frac{D_iu}{v}\right](x'),$$

其中 $v=\sqrt{1+|Du|^2}$.

这一节的目的在于建立用 H 和 $\mathrm{dist}(x',\partial\Omega)$ 来表示的 $Du(x')$ 的估计. 先把关系式(15.41)写成对所有 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ 成立的积分的

形式

$$(15.42)\qquad \int_\Omega (\boldsymbol{\nu}\cdot D\varphi - nH\varphi)\,dx' = 0.$$

用 $D_k\varphi$, $k=1, 2, \cdots, n$ 代替 φ, 并进行分部积分，便有

$$(15.43)\qquad \int_\Omega (D_k\boldsymbol{\nu}\cdot D\varphi - nD_kH\varphi)\,dx' = 0$$

对所有 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ 成立(参看方程(12.3)). 在(15.43)中以及今后我们都假定 $H\in C^1(\Omega)$. 现在用 $\nu_k\varphi$ 代替 (15.43) 中的 φ, 其中 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$. 于是就得到方程

$$(15.44)\quad \int_\Omega D_k\nu_iD_i\nu_k\varphi\,dx' + \int_\Omega (\nu_kD_k\nu_iD_i\varphi - n\nu_kD_kH\varphi)\,dx' = 0,$$

对所有的 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$ 成立. 根据(15.4), 通过计算我们有

$$\begin{aligned}\nu_kD_k\nu_i &= -\frac{\nu_k}{v}(\delta_{ij}-\nu_i\nu_j)D_{jk}u = -v(\delta_{ij}-\nu_i\nu_j)D_j\left(\frac{1}{v}\right)\\ &= -v\delta_i\nu_{n+1},\quad i=1, 2, \cdots, n.\end{aligned}$$

所以，借助于附录中的公式(A15), 我们可以把(15.44)写成

$$(15.45)\quad \int_\Omega \mathscr{C}^2\varphi\,dx' - \int_\Omega v(\delta_i\nu_{n+1}D_i\varphi - n\delta_{n+1}H\varphi)\,dx' = 0,$$

其中 $$\mathscr{C}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} D_i\nu_jD_j\nu_i = \sum_{i,j=1}^{n+1}(\delta_i\nu_j)^2.$$

其次，令 $\mathscr{U}=\Omega\times\mathbb{R}$, 并设 $\varphi\in C_0^1(\Omega)$. 在(15.45)中用函数

$$\tilde\varphi(x',\ x_{n+1}) = \varphi(x',\ u(x'))$$

代替 φ, 再应用关系式

$$\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i\nu_{n+1}\delta_i\varphi = \sum_{i=1}^{n+1}\delta_i\nu_{n+1}\delta_i\tilde\varphi = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\nu_{n+1}D_i\tilde\varphi,$$

于是就可以从(15.45)得到恒等式

$$(15.46)\quad \int_{\mathfrak{S}} (\mathscr{C}^2\nu_{n+1}\varphi - \delta_i\nu_{n+1}\delta_i\varphi + n\delta_{n+1}H\varphi)\,dA = 0$$

对所有的 $\varphi\in C_0^1(\mathscr{U})$ 成立. 注意，在(15.46)中的函数 $\boldsymbol{\nu}$ 和 H 是与 x_{n+1} 无关的. 还有，在(15.46)及本节剩下部分中，我们遵循求和约定：重复指标表示从 1 到 $n+1$ 的求和. 定义函数 w 为

$$(15.47)\qquad w = \log v = -\log\nu_{n+1},$$

在(15.46)中用 φv 代替 φ, 就得到不等式

$$(15.48)\qquad \int_{\mathfrak{S}}(\delta w\cdot\delta\varphi+|\delta w|^2\varphi-n\boldsymbol{\nu}\cdot DH\varphi)dA\leqslant 0,$$

对所有非负的 $\varphi\in C_0^1(\mathscr{U})$ 成立．不等式(15.48)是不等式

$$(15.49)\qquad \Delta w\geqslant|\delta w|^2-n\boldsymbol{\nu}\cdot DH$$

的弱形式．特别，若 $\mathfrak{S}$ 是极小曲面，即函数 u 在 Ω 上满足极小曲面方程，于是 w 在 $\mathfrak{S}$ 上是弱下调和的，因此引理 15.2 对于 w 是适用的．在一般的情形下，对于每一点 $y'\in\Omega$，只要 $R<\operatorname{dist}(y',\partial\Omega)$，$y=(y',u(y'))$，就可应用引理 15.3 得到

$$(15.50)\qquad w(y')\leqslant\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{\mathfrak{S}_R(y)}w\,dA+\frac{1}{4\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R(y)}wH^2r^2\times(r^{-n}-R^{-n})\,dA+\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R(y)}\psi(r)\boldsymbol{\nu}\cdot DH\,dA,$$

其中 ψ 由(15.27)给出．令

$$(15.51)\qquad \begin{aligned}H_0&=\sup_{\Omega}|H|,\\ H_1&=\sup_{\Omega}(\boldsymbol{\nu}\cdot DH)^+\leqslant\sup_{\Omega}|DH|,\end{aligned}$$

从(15.50)我们有

$$(15.52)\qquad \begin{aligned}w(y')&\leqslant\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{\mathfrak{S}_R}w\,dA+\frac{H_0^2}{4\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}wr^2(r^{-n}-R^{-n})\,dA\\&\quad+\frac{H_1}{\omega_n}\int_{\mathfrak{S}_R}\psi(r)\,dA\\&=\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{\mathfrak{S}_R}w\,dA+\frac{nH_0^2}{4\omega_n}\int_0^R\rho^{-n-1}\int_{\mathfrak{S}_R}wr^2\,dA\,d\rho\\&\quad+\frac{H_1}{\omega_n}\int_0^R\rho(\rho^{-n}-R^{-n})A(\mathfrak{S}_\rho)\,d\rho\\&\leqslant\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{\mathfrak{S}_R}w\,dA+\frac{nH_0^2}{4\omega_n}\int_0^R\rho^{1-n}\int_{\mathfrak{S}_\rho}w\,dA\,d\rho\\&\quad+\frac{H_1}{\omega_n}\int_0^R\rho^{1-n}A(\mathfrak{S}_\rho)\,d\rho.\end{aligned}$$

于是 w 的估计，从而 Du 的估计就可以化为 $0<\rho\leqslant R$ 时 $A(\mathfrak{S}_\rho)$ 和 $\int_{\mathfrak{S}_\rho}w\,dA$ 的估计．

$A(\mathfrak{S}_\rho)$ 的估计．

不失一般性，假设 $3R<\operatorname{dist}(y', \partial\Omega)$，$y'=0$ 及 $u(y')=0$. 对于 $\rho\leqslant R$, 我们定义函数 u_ρ 为

$$u_\rho=\begin{cases}\rho, & u\geqslant\rho,\\ u, & -\rho\leqslant u\leqslant\rho,\\ -\rho, & u\leqslant-\rho,\end{cases}$$

将检验函数
$$\varphi=\eta u_\rho$$
代入积分恒等式(15.42)中，这里 η 是满足: 当 $|x'|<\rho$ 时 $\eta\equiv1$, 当 $|x'|>2\rho$ 时 $\eta\equiv0$ 以及 $|D\eta|\leqslant 1/\rho$ 的一致 Lipschitz 连续函数. 注意，恒等式(15.42)显然对所有的 $\varphi\in W_0^{1,1}(\Omega)$ 成立，因此对所有支集在 Ω 中的一致 Lipschitz 连续函数 φ, (15.42)也成立. 于是有

$$\int_{|x'|,|u|<\rho}\frac{|Du|^2}{v}\,dx'\leqslant\rho\int_{|x'|<2\rho}(|D\eta|+n|H|\eta)\,dx'.$$

因此

$$A(\mathfrak{S}_\rho)=\int_{|x'|^2+u^2<\rho^2}v\,dx'\leqslant\int_{|x'|,|u|<\rho}v\,dx' \tag{15.53}$$
$$\leqslant C(n)\left\{\rho^n+\rho\int_{|x'|<2\rho}|H|\eta\,dx'\right\}\leqslant C(n)\rho^n(1+H_0R).$$

$\int_{\mathfrak{S}_\rho}w\,dA$ 的估计.

现在把
$$\varphi=\eta w(u_\rho+\rho)$$
代入(15.42)，其中 η 如上. 由此得

$$\int_{|x'|,|u|<\rho}\frac{w|Du|^2}{v}\,dx'$$
$$\leqslant\int_{2\rho|x'|<2\rho,u>-\rho}(w|D\eta|+\eta|Dw|+n|Hw\eta|)\,dx'.$$

为了估计 $\int\eta|Dw|\,dx'$，我们在不等式(15.48)中用 φ^2 代替 φ，于是对所有 $\varphi\in C_0^1(\Omega\times\mathbb{R})$，有

$$\int_{\mathfrak{S}}\varphi^2|\delta w|^2\,dA\leqslant\int_{\mathfrak{S}}\varphi\,\delta w\cdot\delta\varphi\,dA-n\int_{\mathfrak{S}}\varphi^2\boldsymbol{v}\cdot DH\,dA.$$

应用 Cauchy 不等式(7.6)得到

$$\int_{\mathfrak{S}}\varphi^2|\delta w|^2\,dA\leqslant4\int_{\mathfrak{S}}|\delta\varphi|^2\,dA+nH_1\int_{\mathfrak{S}}\varphi^2\,dA.$$

特别，选择 φ 使得

$$\varphi=\eta\tau(x_{n+1}),$$

其中 $0\leqslant\tau\leqslant1$，在 $(-\rho,\ \sup\limits_{|x'|<2\rho}u)$ 中 $\tau\equiv1$，在 $(-2\rho,\ \rho+\sup\limits_{|x'|<2\rho}u)$ 之外 $\tau\equiv0$，$|\tau'|<2/\rho$，η 如上．那么，我们有

$$\int_{\mathfrak{S}}\varphi^2|\delta w|^2dA\leqslant(8\rho^{-2}+nH_1)A(\mathfrak{S}\cap\operatorname{supp}\varphi).$$

应用(15.8)，于是可得出

$$\begin{aligned}\int_{|x'|<2\rho,u>-\rho}\eta|Dw|dx'&\leqslant\int_{\mathfrak{S}}\varphi|\delta w|dA\\&\leqslant(8\rho^{-2}+nH_1)^{1/2}A(\mathfrak{S}\cap\operatorname{supp}\varphi)\quad\text{由 Schwarz 不等式,}\\&\leqslant(8+nH_1R^2)^{1/2}\rho^{-1}\int_{|x'|<2\rho,u>-2\rho}v\,dx'.\end{aligned}$$

因为 $w\leqslant v$，我们也有

$$\int_{|x'|<2\rho,u>-\rho}w\,dx'\leqslant\int_{|x'|<2\rho,u>-\rho}v\,dx'.$$

所以，余下的只是估计 $\int v\,dx'$，对此，在(15.42)中取

$$\varphi=\eta\max\{u+2\rho,\ 0\}$$

即可办到，其中，当 $|x'|<2\rho$ 时 $\eta\equiv1$，当 $|x'|>3\rho$ 时 $\eta\equiv0$，且 $|D\eta|\leqslant1/\rho$．因此得

$$\int_{|x'|<2\rho,u>-2\rho}vdx'\leqslant C(n)\rho^n(1+H_0R)(1+\rho^{-1}\sup_{|x'|<3\rho}u).$$

所以，结合上面几个估计，便有

$$\begin{aligned}(15.54)\qquad\int_{\mathfrak{S}_\rho}w\,dA&\leqslant\int_{|x'|,|u|<\rho}wv\,dx'\\&\leqslant C(n)\rho^n(1+H_0R)(1+H_1R^2)^{1/2}(1+\rho^{-1}\sup_{\Omega}u).\end{aligned}$$

综合估计式(15.52)，(15.53)以及(15.54)，再取其指数便求得所要的梯度内估计．

定理 15.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，u 是 $C^2(\Omega)$ 中的函数．则对于任一点 $y'\in\Omega$，有估计

$$(15.55)\qquad|Du(y')|\leqslant C_1\exp\{C_2\sup_{\Omega}(u-u(y'))/d\},$$

其中 $d=\operatorname{dist}(y', \partial\Omega)$，$C_1=C_1(n, dH_0, d^2H_1)$，$C_2=C_2(n, dH_0, d^2H_1)$，($H_0$, H_1 由(15.51)给出)．

作为定理 15.5 的一个直接的推论，我们有下面的关于非负函数的内估计．

推论 15.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，u 是 $C^2(\Omega)$ 中的一个非负函数．则对任一点 $y'\in\Omega$，有估计

(15.56) $$|Du(y')|\leqslant C_1\exp\{C_2u(y')/d\},$$

其中 C_1, C_2 和 d 与定理 15.5 中相同．

有趣的是，估计(15.55)和(15.56)的指数形式是不能改进的．这在二维极小曲面的情形是显然的，见 [FN4] 中的例子．在下一节中我们要把定理 15.5 应用到具有连续边值的极小曲面和规定了平均曲率的方程的 Dirichlet 问题上去．对于极小曲面方程的另一个应用将在习题 15.4 中讨论．我们指出以下事实来结束这一节：对于高阶导数的内估计现在可以从定理 15.5，定理 2.1 的 Hölder 估计，定理 6.2 的 Schauder 内估计以及习题 6.1 推出．

推论 15.7 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，u 是 $C^2(\Omega)$ 中的一个函数，其图象的平均曲率 $H\in C^k(\Omega)$，$k\geqslant1$．则 $u\in C^{k+1}(\Omega)$，并且对于任一点 $y\in\Omega$ 及多重指标 β，$|\beta|=k+1$，有估计

(15.57) $$|D^\beta u(y)|\leqslant C,$$

其中 $C=C(n, k, |H|_{k;\Omega}, d, \sup|u|)$，$d=\operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$．

15.3. 在 Dirichlet 问题中的应用

在这一节里我们研究具有连续边界数据的极小曲面和规定平均曲率方程的 Dirichlet 问题的可解性．关于极小曲面方程，我们有定理 13.14 的下述推广．

定理 15.8 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^2 有界区域．则 Dirichlet 问题：在 Ω 中 $\mathfrak{M}u=0$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$，对任意 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$ 可解当且仅当边界 $\partial\Omega$ 的平均曲率处处非负．

证明 我们先假设对某个 $\alpha>0$，$\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$，并设 $\partial\Omega$ 的平均曲率处处非负．令 $\{\varphi_m\}$ 是 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的一个函数序列，在边界 $\partial\Omega$ 上

一致收敛到φ. 根据定理 13.14, Dirichlet 问题:

$$\text{在 } \Omega \text{ 中 } \mathfrak{M}u_m=0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } u_m=\varphi_m$$

于$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$内是唯一可解的,从比较原理(定理 9.2), 当$m_1, m_2\to\infty$时,我们有

$$\sup_{\Omega}|u_{m_1}-u_{m_2}|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|\varphi_{m_1}-\varphi_{m_2}|\to 0.$$

于是序列$\{u_m\}$在Ω上一致收敛到某个函数$u\in C^0(\overline{\Omega})$, 并且在$\partial\Omega$上$u=\varphi$. 应用推论 15.7 以及 Arzela 定理可得$u\in C^2(\Omega)$, 以及在Ω中$\mathfrak{M}u=0$. 对于C^2区域Ω的结果,可以用$C^{2,\alpha}$区域逼近Ω来得到. 定理 15.8 的非存在性部分是定理 13.14 的直接推论. ▌

非齐次方程(15.1)的存在性结果取决于解的适当的极大值原理的建立. 综合定理 12.8, 推论 13.8 和定理 14.2, 我们首先可以得到下面这个关于光滑边界数据的基本结果 (也可参看定理 14.15).

定理 15.9 设Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界区域, 对某α, $0<\alpha<1$ $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$, 又设$\varphi\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $H\in C^1(\overline{\Omega})$. 假设$\partial\Omega$的平均曲率$H'$,对每一点$y\in\partial\Omega$满足

$$H'(y)\geqslant\frac{n}{n-1}|H(y)|. \tag{15.58}$$

如果 Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned}&\text{在 } \Omega \text{ 中 } \mathfrak{M}u=\sigma nH(x)(1+|Du|^2)^{3/2},\\&\text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } u=\sigma\varphi\end{aligned} \tag{15.59}$$

的解族在Ω内一致有界, 那么存在唯一的函数$u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 在$\Omega$中满足方程(15.1),在$\partial\Omega$上$u=\varphi$.

条件 (15.58) 的必要性由推论 13.13 所证实. 现在我们来建立可解性的进一步的必要条件. 即, 由方程 (15.1) 的积分形式 (15.42),对任何$\eta\in C_0^1(\Omega)$我们有

$$\left|\int_\Omega H\eta\,dx\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_\Omega|\boldsymbol{\nu}\cdot D\eta|\,dx\leqslant\frac{1}{n}\sup_{\Omega}\frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}}\int_\Omega|D\eta|\,dx,$$

于是,记
$$1-\varepsilon_0=\sup_{\Omega}\frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}},$$

我们便得到

$$\left|\int_\Omega H\eta\,dx\right| \leqslant \frac{(1-\varepsilon_0)}{n}\int_\Omega |D\eta|\,dx \tag{15.60}$$

对于所有的 $\eta\in C_0^1(\Omega)$ 和某 $\varepsilon_0>0$ 成立. 但是, 从定理 9.8 的证明中显然可见, 条件(15.60)对于保证方程(15.1)的 $C^1(\bar{\Omega})$ 解 u 的先验估计 $\sup\limits_\Omega|u|$ 成立也是充分的. 因此, 由定理 15.9 我们有下面强的存在定理.

定理 15.10 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域, 对某个 α, $0<\alpha<1$, $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$. 又设 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $H\in C^1(\bar{\Omega})$ 且满足 (15.58) 和 (15.60). 则 Dirichlet 问题:

$$\text{在 } \Omega \text{ 中 } \mathfrak{M}u=nH(1+|Du|^2)^{3/2}, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上 } u=\varphi$$

对于 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是唯一可解的. 此外, 如果我们仅假定 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$, 那么这个问题对于 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是唯一可解的.

注意条件

$$\int_\Omega |H^\pm|^n dx<\omega_n, \tag{15.61}$$

蕴涵条件(15.60)(参看(9.29)). 一个比(15.61)更一般的条件由[GT2]给出. 定理 15.10 的第二个结论可用定理 15.8 从定理 13.14 推出的同样方法从第一个结论推出. 注意, 如果我们只要求 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 那么, 函数 H 仅需满足 $\varepsilon_0=0$ 的条件(15.60).

当函数 H 在 Ω 中是常数时, 定理 15.10 中的条件(15.60)就是多余的了. 为了证明这一点, 我们假设(15.58)成立, 并设 Ω_1 为 Ω 的一个子集, 它是由 Ω 中在 $\partial\Omega$ 上有唯一最近点的点组成. 然后, 检查附录中的引理 1 和 2 的证明可得: 在 Ω_1 中

$$\Delta d\leqslant -n|H|,$$

其中 $d(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$. 现在, 对于 $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, $x\in\Omega_1$, 令

$$v(x)=\sup_{\partial\Omega}|u|+\frac{e^{\mu\delta}}{\mu}(1-e^{-\mu d(x)}),$$

其中 $\delta=\operatorname{diam}\Omega$, $\mu=1+n|H|$. 从而得到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}v &= [-\mu+(1+|Dv|^2)\Delta d]e^{\mu(\delta-d)} \\
&\leqslant -[\mu+n|H|(1+|Dv|^2)]e^{\mu(\delta-d)} \\
&\leqslant -n|H|(1+|Dv|^2)^{3/2},
\end{aligned}
$$

所以函数 v 是方程(15.1)在开集 Ω_1 中的一个上解. 因此,若函数 u 在 Ω 中满足(15.1), 那么由比较原理(定理 9.2), $w=u-v$ 在 $\overline{\Omega}$ 中的极大值将在 $\partial\Omega$ 上或在 $\Omega-\Omega_1$ 中达到. 现设 y 是 $\Omega-\Omega_1$ 中的一点, γ 是 y 到 $\partial\Omega$ 的直线段, 且垂直于 $\partial\Omega$. 如果 w 在 γ 上的极大值在 y 点达到, 那么必有 $Du(y)\neq 0$, 并且 u 在 γ 的极大值也在该点达到. 这表明 w 不可能在 $\Omega-\Omega_1$ 上取到极大值. 于是我们有估计

(15.62) $$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|u|+(e^{\mu\delta}-1)/\mu.$$

综合(15.62), 定理 15.9 以及推论 15.13, 我们就得到平均曲率为常数的方程的下述存在定理.

定理 15.11 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 C^2 有界区域. 则 Dirichlet 问题: $\mathfrak{M}u=nH(1+|Du|^2)^{3/2}$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 对任何 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$ 和常数 H 可解当且仅当 $\partial\Omega$ 的平均曲率 H' 在 $\partial\Omega$ 上处处满足

$$H'\geqslant n|H|/(n-1).$$

15.4. 两个自变量的方程

这一章至此已讨论过规定了平均曲率的方程, 特别是极小曲面方程. 在两个自变量的情形, 我们将考察稍较一般的方程类型. 我们将研究如下形式的方程:

(15.63) $$Qu=a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u+b(x,\ u,\ Du)=0,$$

其中 $x=(x_1,\ x_2)\in\Omega$, Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个域, a^{ij}, b, i, $j=1$, 2 是 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 上给定的实值函数, 并且对于所有的 $(x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 和所有的 $\xi=(\xi_1,\ \xi_2)\in\mathbb{R}^2$ 成立

(15.64) $$|\xi|^2-\frac{(p\cdot\xi)^2}{1+|p|^2}\leqslant a^{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\leqslant\gamma\left[|\xi|^2-\frac{(p\cdot\xi)^2}{1+|p|^2}\right],$$

此外, 对所有 $(x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, 有

(15.65) $$|b(x,\ z,\ p)|\leqslant\mu\sqrt{1+|p|^2}.$$

其中 γ 和 μ 是两个固定的常数.

注意,极小曲面方程 $\mathfrak{M}u=0$ 能写成(15.63)的形式,这时

$$a^{ij}(x, z, p)=\delta^{ij}-\frac{p_i p_j}{1+|p|^2}, \quad b=0;$$

在这种情况下,(15.64)和(15.65)对于 $\gamma=1$ 和 $\mu=0$ 成立. 更一般地, 作为一个椭圆参数泛函(elliptic parametric functional)(见附录 15.8)的非参数 Euler 方程而产生的任一方程也是(15.63),(15.64),(15.65)形式的. 除了这些例子以外, 我们把(15.63),(15.64),(15.65)类型的方程, 称之为平均曲率型方程, 这是自然的也是有趣的,因为它们完全可以用下面的方式来描述:

假设 u 是 $C^2(\Omega)$ 中的一个函数,其图象为

$$\mathfrak{S}=\{(x, z)\in\mathbb{R}^3 | x\in\Omega, z=u(x)\}.$$

设 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 是 $\mathfrak{S}$ 的主曲率(见附录),那么当且仅当在 $\mathfrak{S}$ 的每一点上 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 适合方程

$$(15.63)' \qquad \alpha_1\varkappa_1+\alpha_2\varkappa_2+\beta=0$$

时才存在实值函数 a^{ij}, b 使得(15.63), (15.64), (15.65)成立,(15.63)′中的 α_1, α_2 和 β 满足

$$(15.64)' \qquad 1\leqslant\alpha_i\leqslant\gamma, \ i=1, 2,$$

$$(15.65)' \qquad |\beta|\leqslant\mu.$$

为了说明这种表示是合理的, 我们设 d 是 $\mathfrak{S}$ 的距离函数, 其定义如下: 对于 $X=(x, z)\in\Omega\times\mathbb{R}$, 令

$$d(X)=\mathrm{dist}(X, \mathfrak{S}) \qquad 若 z>u(x),$$

$$d(X)=-\mathrm{dist}(X, \mathfrak{S}) \quad 若 z<u(x).$$

因为 d 属于 C^2(见附录), 并且当 $x\in\Omega$ 时 $d(x, u(x))\equiv0$, 于是根据链式法则,我们有等式

$$D_i d(X)+D_i u(x) D_3 d(X)=0,$$

$$(15.66)' \quad D_{ij}d(X)+D_i u(x) D_{3j}d(X)+D_j u(x) D_{3i}d(X)$$
$$+D_i u(x) D_j u(x) D_{33}d(X)+D_3 d(X) D_{ij}u(x)=$$

0, i, $j=1$, 2, 其中 $X=(x, u(x))$. 因为 $D_3 d(X)=v^{-1}$, $v=\sqrt{1+|Du(x)|^2}$, 于是, (15.63)蕴涵着

$$(15.67)\qquad \sum_{i,j=1}^{3} a_*^{ij}(x)D_{ij}d(X)+v^{-1}b_*(x)=0,$$

其中 $b_*(x)=b(x, u(x), Du(x))$，3×3 阶的矩阵 $[a_*^{ij}(x)]$ 是这样定义的:

$$a_*^{ij}(x)=a^{ij}(x, u(x), Du(x)),\text{当 } i, j=1, 2 \text{ 时},$$

$$a_*^{i3}(x)=a_*^{3i}(x)=\sum_{j=1}^{2} D_ju(x)a_*^{ij}(x),\quad i=1, 2,$$

$$a_*^{33}(x)=\sum_{i,j=1}^{2} D_iu(x)D_ju(x)a_*^{ij}(x).$$

注意,最后这些关系式等价于

$$\sum_{j=1}^{3} a_*^{ji}(x)\nu_j=\sum_{j=1}^{3} a_*^{ij}(x)\nu_j=0,\quad i=1, 2, 3,$$

其中 $\boldsymbol{\nu}=v^{-1}(-Du(x), 1)$ $(=Dd(X))$ 是 $\mathfrak{S}$ 的单位上法向量(upward unit normal). 其次，我们设 $\boldsymbol{q}$ 是把坐标系变成 X 处的主坐标系的等距变换矩阵(见附录)，因而 $\boldsymbol{q}^t[D_{ij}d(x)]\boldsymbol{q}=\mathrm{diag}[\varkappa_1, \varkappa_2, 0]$，这里 $\varkappa_1, \varkappa_2$ 是 $\mathfrak{S}$ 在 X 处的主曲率. 由此(15.67)可以表示成(15.63)′形式,其中 α_1, α_2 是 $\boldsymbol{q}^t[a_*^{ij}(x)]\boldsymbol{q}$ 的主对角线的头两个元素，$\beta=v^{-1}b_*(x)$. 由(15.65)可以看出(15.65)′是对的. 为检验(15.64)′，我们首先注意

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_*^{ij}(x)\xi_i\xi_j=\sum_{i,j=1}^{2} a_*^{ij}(x)(\xi_i+\xi_3D_iu(x))(\xi_j+\xi_3D_ju(x)),$$
$$\xi\in\mathbb{R}^3,$$

然后由(15.64)推知

$$|\xi'|^2\leqslant \sum_{i,j=1}^{3} a_*^{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\gamma|\xi'|^2,$$

$$\xi'=\xi-(\boldsymbol{\nu}\cdot\xi)\boldsymbol{\nu},\quad \boldsymbol{\nu}=v^{-1}(-Du(x), 1).$$

从这里很容易得到(15.64)′.

为了证明相反的蕴涵关系，我们假设(15.63)′，(15.64)′和(15.65)′在 $X=(x, u(x))\in\mathfrak{S}$ 上成立，设 $[a_*^{ij}(x)]=\boldsymbol{q}\,\mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, 0]\boldsymbol{q}^t$，$\boldsymbol{q}$ 如上，再设 $b_*(x)=v\beta$. 从而(15.67)成立，又因为我们还有关系式

$$\sum_{j=1}^{3} a_*^{ij}(x)\nu_j=0, \quad i=1, 2, 3,$$

应用(15.66)，便产生

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_*^{ij}(x) D_{ij}u+b_*(x)=0.$$

然后我们对于 $i, j=1, 2$ 定义

$$a^{ij}(x, z, p)=\begin{cases} a_*^{ij}(x), \text{若 } z=u(x),\ p=Du(x), \\ \delta_{ij}-\dfrac{p_i p_j}{1+|p|^2}, \text{其他}, \end{cases}$$

$$b(x, z, p)=\begin{cases} b_*(x), \text{若 } z=u(x),\ p=Du(x), \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$

这样一来，(15.63)，(15.64)，(15.65)就很容易检验.

这里给出的(15.63)，(15.64)，(15.65)形式方程的讨论在很多方面与第 11 章中对两个自变量的一致椭圆型方程的讨论相类似；与第 11 章中一样，我们将从考察拟保角映射开始，然而在这里与其考虑 $\mathbb{R}^3$ 中曲面间的映射倒不如考虑平面中的映射更为必要. 还有，与第 11 章一样，主要结果是拟保角映射的 Hölder 估计. 这种一般估计的一个特别的结果是(15.63)，(15.64)，(15.65)解 u 的图象的单位法向的 Hölder 估计. 应用这个结果便可得到 u 的图象的主曲率和 u 的梯度的先验估计. (15.63)，(15.64)，(15.65)形式方程理论的最引人注目的结果之一就是 Bernstein 的经典的定理的如下推广：

定理 15.12 设 $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上满足方程(15.63)，且 $b\equiv 0$，并设在 $\Omega=\mathbb{R}^2$ 上(15.64)成立. 那么 u 是一个线性函数.

我们在下面将会看到，这个定理也是 u 的图象的单位法向的 Hölder 估计的一个推论.

15.5. 拟保角映射

在这节中，我们将研究 C^2 超曲面 $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}\subset\mathbb{R}^3$ 之间的映射. 假定曲面 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{T}$ 是定向的，即假定存在单位法向量 ν, μ，它们分别在整个 $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ 上定义且连续. 为了在下节中应用，假设 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{T}$ 是

用形如(15.2)，(15.3)的表示式给定的图象.

$\mathbb{R}^3$ 的点表示为 $X=(x_1, x_2, x_3)$. $Y=(y_1, y_2, y_3)$ 总表示 $\mathfrak{S}$ 的一个固定点，对于 $\rho>0$，令 $\mathfrak{S}_\rho(Y)=\mathfrak{S}\cap B_\rho(Y)$. R 表示这样一个固定的正常数，使得 $\mathfrak{S}_R(Y)\subset\subset\mathfrak{S}$. 我们常用 $\mathfrak{S}_\rho$ 作为 $\mathfrak{S}_\rho(Y)$ 的缩写.

我们将需要 Stokes 定理的经典形式：如果 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ 是定义在 $\mathfrak{S}$ 的一个邻域中的一个 C^1 向量函数，并设 $\mathscr{G}\subset\subset\mathfrak{S}$ 使得 $\partial\mathscr{G}$ 是由简单闭 C^1 曲线的一个有限并集组成，则

$$(15.68)\qquad \int_{\mathscr{G}}\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{v}\,dA\equiv\int_{\mathscr{G}}\boldsymbol{\nu}\cdot D\times\mathbf{v}\,dA=\int_{\partial\mathscr{G}}v_i dx_i\equiv\int_{\partial\mathscr{G}}\boldsymbol{t}\cdot\mathbf{v}\,ds,$$

这里 A 表示 $\mathfrak{S}$ 上的曲面面积，$\partial\mathscr{G}$ 是适当定向的，s 表示 $\partial\mathscr{G}$ 上的弧长，而 $\boldsymbol{t}$ 是 $\partial\mathscr{G}$ 的单位切向量. 在这节中我们仍遵循约定重复指标蕴涵从 1 到 3 求和. 如果在(15.68)中取 $\mathbf{v}=fDg$，这里 f, g 分别是定义在 $\mathfrak{S}$ 的一个邻域中的 C^1 和 C^2 函数，那么，由于算子恒等式 $D\times D=0$，我们从(15.68)得到

$$\int_{\mathscr{G}}\boldsymbol{\nu}\cdot Df\times Dg\,dA=\int_{\partial\mathscr{G}}f\,dg\equiv\int_{\partial\mathscr{G}}f\frac{dg}{ds}\,ds,$$

这里，$\dfrac{dg}{ds}\equiv\boldsymbol{t}\cdot Dg$ 是 g 在 $\boldsymbol{t}$ 方向的方向导数. 因为这里出现的仅仅是 f, g 的一阶导数，所以容易看出，若 f 和 g 都只是 C^1 函数，上面的恒等式成立. 注意，由于对 $a, b\in\mathbb{R}^3$ 有向量恒等式 $a\times a=0$, $a\cdot a\times b=0$，故在 $\mathfrak{S}$ 上有

$$\boldsymbol{\nu}\cdot Df\times Dg=\boldsymbol{\nu}\cdot\delta f\times\delta g,$$

这里，δ 是用(15.4)定义的 $\mathfrak{S}$ 上的切向梯度算子. 因此对 $\mathfrak{S}$ 上的任意 C^1 函数 f, g，我们有恒等式

$$(15.69)\qquad \int_{\mathscr{G}}\boldsymbol{\nu}\cdot\delta f\times\delta g\,dA=\int_{\partial\mathscr{G}}f\,dg\equiv\int_{\partial\mathscr{G}}f\frac{dg}{ds}\,ds.$$

关于 $\mathfrak{T}$ 我们的基本假设是：存在一向量函数 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$，它在 $\mathfrak{T}$ 的某个邻域中是 C^1 的，且使得在 $\mathfrak{T}$ 上

$$(15.70)\qquad \sup_{\mathfrak{T}}|\boldsymbol{\omega}|+\sup_{\mathfrak{T}}|D\boldsymbol{\omega}|\leqslant\Lambda_0,\quad \boldsymbol{\mu}\cdot D\times\boldsymbol{\omega}\equiv1,$$

这里 Λ_0 是一个常数. 在子集 $\mathscr{G}\subset\mathfrak{T}$ 上应用 Stokes 公式(15.68)、

(用 $\boldsymbol{\mu}$ 代替 $\boldsymbol{\nu}$ 和用 $\boldsymbol{\omega}$ 代替 $\mathbf{v}$)，那么我们有

$$(15.71) \qquad A(\mathscr{G})=\int_{\partial\mathscr{G}} \omega_i dx_i,$$

即子集 $\mathscr{G}\subset\mathfrak{T}$ 的面积可以表成遍布于 $\partial\mathscr{G}$ 上的一个边界积分.

这里一个特别有趣的例子是当 $\mathfrak{T}$ 是单位球面的上半球面 $\{X=(x_1, x_2, x_3)\,|\,|X|=1, x_3>0\}$ 的情况. 这时，取 $\boldsymbol{\mu}(X)=X$，我们有 (15.70)，其中

$$\boldsymbol{\omega}(X)=(-x_2/(1+x_3),\ x_1/(1+x_3),\ 0).$$

值得指出的是(虽然在这里不需要它)，如果 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个任意的，连通的，定向的紧 C^2 曲面，如果 $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{L}$ 是内部非空的紧集，且如果取

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{L}-\mathfrak{R},$$

则总存在一个满足 (15.70) 的向量场 $\boldsymbol{\omega}$. 这个论断的一个证明包含微分形式和 de Rham 上同伦群理论的一个简单应用；读者可参考[SI6]中的讨论.

现在考察映射

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3):\mathfrak{S}\to\mathfrak{T},$$

在如下意义下它是 C^1 的：每个 φ_i (作为从 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射)有到 $\mathfrak{S}$ 的某邻域中去的一个 C^1 延拓 $\tilde{\varphi}_i$. 我们想要引进 $\boldsymbol{\varphi}$ 的拟保角性概念，但是要作到这一点，首先需要定义 $\boldsymbol{\varphi}$ 的有正负号的面积伸缩因子 $J(\boldsymbol{\varphi})$. 即用

$$(15.72) \qquad J(\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{\nu}\cdot\delta(\omega_i\circ\boldsymbol{\varphi})\times(\delta\varphi_i)$$

在 $\mathfrak{S}$ 上定义 $J(\boldsymbol{\varphi})$. $J(\boldsymbol{\varphi})$ 的这个定义容易这样诱导出来：令 $\mathscr{E}$ 是 $\mathfrak{S}$ 的这样一个区域，使得 $\partial\mathscr{E}$ 是一个简单的光滑曲线，并假定 $\boldsymbol{\varphi}$ 是在 $\mathfrak{T}$ 的某开子集 (此开子集包含 $\boldsymbol{\varphi}(\mathscr{E})$) 中具有 C^1 逆的一对一映射. 假设曲线 $\partial\mathscr{E}$ 和 $\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathscr{E})$ 是适当定向的，我们可应用 (15.69) 和 (15.71) 给出

$$A(\boldsymbol{\varphi}(\mathscr{E}))=\int_{\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathscr{E})}\omega_i dx_i=\pm\int_{\partial\mathscr{E}}\omega_i\circ\boldsymbol{\varphi}\, d\varphi_i$$

$$=\pm\int_{\mathscr{E}}\boldsymbol{\nu}\cdot(\delta\boldsymbol{\omega}_i\circ\boldsymbol{\varphi})\times(\delta\varphi_i)\, dA,$$

此处"+"号或"−"号按 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\mathscr{E}$ 上是保持方向还是反向而定．这个恒等式显然诱导出定义(15.72)．

关于 $J(\boldsymbol{\varphi})$ 的一个重要事实(在直观上是明显的)是，在下述意义下它是坐标独立的：如果 P, Q 是 $\mathbb{R}^3$ 中的线性等距，

$$\det P=\det Q=1,$$

且若定义

$$\tilde{\mathfrak{S}}=\{P(X-Y)\mid X\in\mathfrak{S}\},\ \tilde{\mathfrak{T}}=\{Q(x-\varphi(Y))\mid X\in\mathfrak{T}\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}=P\circ\boldsymbol{\nu}\circ P^{-1},\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}=Q\circ\boldsymbol{\mu}\circ Q^{-1},\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}=Q\circ\boldsymbol{\omega}\circ Q^{-1},\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}=Q\circ\boldsymbol{\varphi}\circ P^{-1},$$

则

$$(15.73)\quad \boldsymbol{\nu}\cdot(\delta\omega_i\circ\boldsymbol{\varphi})\times(\delta\varphi_i)(Y)=\tilde{\boldsymbol{\nu}}\cdot(\tilde{\delta}\tilde{\omega}_i\circ\tilde{\boldsymbol{\varphi}})\times(\tilde{\delta}\tilde{\varphi}_i)(0).$$

这里 $\tilde{\delta}$ 表示 $\tilde{\mathfrak{S}}$ 上的切向梯度算子．关系式(15.73)是容易验明的，只要先将等距 P, Q 用正交矩阵表示，然后利用线性代数的两个基本事实，即如果 A, B 是 3×3 矩阵，则 $\det AB=\det A\det B$，而如果 A 有行 a, b, c，则 $\det A=a\cdot b\times c$．也可以用 (15.70) 来验明：在 $\tilde{\mathfrak{T}}$ 上 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot D\times\tilde{\boldsymbol{\omega}}\equiv1$．如果选择上述等距 P, Q，使得

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}(0)=\tilde{\boldsymbol{\mu}}(0)=(0,\ 0,\ 1),$$

并引进新的坐标

$$(\zeta,\ \zeta_3)=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3)=P(X-Y),$$

则 $\tilde{\mathfrak{S}}$ 在 0 的附近可表示成形式

$$\zeta_3=\tilde{u}(\zeta),\quad \zeta\in\mathscr{U},$$

这里，$\mathscr{U}$ 是 $0\in\mathbb{R}^2$ 的一个邻域，而 $\tilde{u}$ 是 $D\tilde{u}(0)=0$ 的一个 $C^2(\mathscr{U})$ 函数．于是，由向量 $\tilde{\delta}_j\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(0)$, $j=1,\ 2,\ 3$ 在 0 点与 $\tilde{\mathfrak{T}}$ 相切这个事实，我们还有

$$\tilde{\delta}_j\tilde{\varphi}_3(0)=(0,\ 0,\ 1)\cdot\tilde{\delta}_j\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(0)=\tilde{\boldsymbol{\mu}}(0)\cdot\tilde{\delta}_j\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(0)=0,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

即我们有

$$\tilde{\delta}\tilde{\varphi}_3(0)=0.$$

因而，若

$$\boldsymbol{\psi}:\ \mathscr{U}\to\mathbb{R}^2$$

是由下式定义：

$$\boldsymbol{\psi}(\zeta)=[\tilde{\varphi}_1(\zeta,\ \tilde{u}(\zeta)),\ \tilde{\varphi}_2(\zeta,\ \tilde{u}(\zeta))],\ \zeta\in\mathscr{U},$$

则在下述意义下，在 0 的附近 $\boldsymbol{\psi}$ 逼近 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$：当 $|\zeta|\to0$ 时，

$$|(\boldsymbol{\psi}(\zeta),\ 0)-\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\zeta,\ \tilde{u}(\zeta))|=o(|\zeta|),\ \zeta\in\mathscr{U}.$$

此外，利用(15.73)连同定义 $\tilde{\delta}=D-\tilde{\nu}(\tilde{\nu}\cdot D)$，我们容易验明

(15.74) $\quad J(\boldsymbol{\varphi})(Y)=D_1\psi_1(0)D_2\psi_2(0)-D_1\psi_2(0)D_2\psi_1(0)$；

即 $J(\boldsymbol{\varphi})(Y)$ 刚好是 $\boldsymbol{\psi}$ 在 0 处的 Jacobi 行列式. 由此可见

(15.75) $\quad |\delta\boldsymbol{\varphi}(Y)|^2=|\tilde{\delta}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(0)|^2=|D\boldsymbol{\psi}(0)|^2.$

基于(15.74)，(15.75)，用和(11.2)相似的方法做如下定义是合理的. 也就是，如果在每一点 $X\in\mathfrak{S}$，有

(15.76) $\quad |\delta\boldsymbol{\varphi}(X)|^2\leqslant 2KJ(\boldsymbol{\varphi})(X)+K'$，

就说映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 是从 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{T}$ 中的一个 $(K,\ K')$-拟保角映射. 这里，$K,\ K'$ 是实常数 $(K'\geqslant 0)$，且 $|\delta\boldsymbol{\varphi}(X)|^2=\sum_{i=1}^{3}|\delta\varphi_i(X)|^2$. 这里要着重指出，在上面没有假定 K 是正的(见(11.2)). 注意，当 $K'=0$ 时，我们必有 $|K|\geqslant 1$，除非 $\delta\boldsymbol{\varphi}\equiv 0$.

在开始证明拟保角映射的主要 Hölder 连续性结果之前，需要作进一步的准备；也就是，若 g 是 $\mathfrak{S}_R$ 上的一个任意 C^1 函数，则

(15.77) $$\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho} g\,ds=D_\rho\int_{\mathfrak{S}_\rho} g|\delta r|\,dA$$

对几乎所有的 $\rho\in(0,\ R)$ 成立，这里 r 是相对于 Y 的径向距离函数，定义为

$$r(X)=|X-Y|,\quad X\in\mathbb{R}^3.$$

事实上，公式(15.77)是重要的上面积公式(co-area formula)(见[FE])的一个特殊情况. 我们来证明(15.77). 首先要指出(15.77)的左边对几乎所有的 $\rho\in(0,\ R)$ 有意义，因为根据 Sard 定理[SB]，对几乎所有的 $\rho\in(0,\ R)$，我们可写

(15.78) $\quad \partial\mathfrak{S}_\rho=\overline{\mathfrak{S}}_\rho\cap\{X\in\mathbb{R}^3\,|\,|X-Y|=\rho\}=\bigcup_{j=1}^{n(\rho)}\Gamma_\rho^{(j)}$，

这里 $\Gamma_\rho^{(j)}$ 是简单闭 C^2 曲线，而 $n(\rho)$ 是一个正整数. 实际上，Sard 定理保证，对几乎所有的 $\rho\in(0,\ R)$，切向梯度 δr 在不是 $\partial\mathfrak{S}_\rho$ 的点上为零；它的几何解释是曲面 $\mathfrak{S}$ 和球面 $\{X\in\mathbb{R}^3\,|\,|X-Y|=\rho\}$ 非切向地相交，这就说明为什么(15.78)成立. 现在取某个固定的 $\rho\in(0,\ R)$，使得在 $\partial\mathfrak{S}_\rho$ 上 $\delta r\neq 0$，并令 $\varepsilon>0$ 充分小，保证在 $\overline{\mathscr{G}}$ 上 $\delta r\neq 0$，这里 $\mathscr{G}=\mathfrak{S}_\rho-\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}$. 现在我们要应用 Stokes 定理(15.68)；

$\partial\mathscr{G}$ 的适当定向的单位切向用 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\nu}\times\delta r/|\delta r|$（在 $\partial\mathfrak{S}_\rho$ 上）和 $\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{\nu}\times\delta r/|\delta r|$（在 $\partial\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}$ 上）给出．令 $\mathbf{F}$ 表示向量函数 $\boldsymbol{\nu}\times\delta r/|\delta r|$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的某一包含 $\overline{\mathscr{G}}$ 的开子集的一个 C^1 延拓．则在(15.68)中取

$$\mathbf{v}=\frac{1}{\varepsilon}(r-\rho+\varepsilon)g\mathbf{F},$$

并注意在 $\partial\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}$ 上 $\mathbf{v}=0$，就得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho} g\,ds&=\int_{\partial\mathscr{G}}\frac{1}{\varepsilon}(r-\rho+\varepsilon)g\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{t}\,ds\\&=\int_{\mathfrak{S}_\rho-\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}(r-\rho+\varepsilon)\boldsymbol{\nu}\cdot(gD\times\mathbf{F}+Dg\times\mathbf{F})\,dA\\&\quad+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathfrak{S}_\rho-\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}} g\boldsymbol{\nu}\cdot Dr\times\mathbf{F}\,dA.\end{aligned}$$

因为在 $\mathfrak{S}_\rho-\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}$ 上，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}\cdot Dr\times\mathbf{F}&=(\boldsymbol{\nu}\times Dr)\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\delta r/|\delta r|)\\&=|\boldsymbol{\nu}\times\delta r|^2/|\delta r|=|\delta r|,\end{aligned}$$

于是有，

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho} g\,ds&=\int_{\mathfrak{S}_\rho-\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}(r-\rho+\varepsilon)\boldsymbol{\nu}\cdot(gD\times\mathbf{F}+Dg\times\mathbf{F})\,dA\\&\quad+\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_{\mathfrak{S}_\rho} g|\delta r|\,dA-\int_{\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}} g|\delta r|\,dA\right\},\end{aligned}$$

又因为在 $\mathfrak{S}_\rho-\mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}$ 上有

$$0\leqslant\frac{r-\rho+\varepsilon}{\varepsilon}\leqslant 1,$$

于是令 $\varepsilon\to 0$，我们就有(15.77)．

主要 Hölder 估计是积分 $\mathfrak{D}(\rho;\ Z)$ 的估计的一个推论，其中

$$\mathfrak{D}(\rho;Z)=\int_{\mathfrak{S}_\rho(Z)}|\delta\varphi|^2\,dA$$

是对 $Z\in\mathfrak{S}$ 及 $\rho>0$ 定义的（参看第 11 章中用到的 Dirichlet 积分）．

下面的引理应同不等式(11.8)相比较，它给出 $\mathfrak{D}(R/2;Y)$ 的界．在引理的陈述中及往后，A_1 表示这样的常数：

(15.79) $$A(\mathfrak{S}_{3R/4}(Y))\leqslant A_1(3R/4)^2\ .$$

在 $\mathfrak{S}$ 是一个具有 $(K,\ K')$-拟保角 Gauss 映射的图象的情况下，

下面一节将证明可以求得 Λ_1 的界，用 K 和 $K'R^2$ 表示.

引理 15.13 假设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是从 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{T}$ 中的 (K, K')-拟保角 C^1 映射. 则

$$(15.80)\qquad \mathfrak{D}(R/2; Y)\leqslant C,$$

这里，$C=C(\Lambda_0, K, K'R^2, \Lambda_1)$.

证明 设 $\Gamma_\rho^{(j)}$, $j=1, \cdots, n(\rho)$, 如同在(15.78)中一样，且假定 $\Gamma_\rho^{(j)}$ 是为了在 $\mathfrak{S}_\rho$ 上使用 (15.68) 而适当定向的. 则利用 $J(\boldsymbol{\varphi})$ 的定义(15.72)，并结合(15.69)，就得到恒等式

$$(15.81)\qquad \int_{\mathfrak{S}_\rho} J(\boldsymbol{\varphi})\,dA=\sum_{j=1}^{n(\rho)}\int_{\Gamma_\rho^{(j)}} \omega_i\circ\boldsymbol{\varphi}\,\frac{d\varphi_i}{ds}\,ds$$

对几乎所有的 $\rho\in(0, R)$ 成立. 这个恒等式在下面给出 $\mathfrak{D}(\rho; Z)$ 的主估计的定理的证明中将起关键作用. 眼下，我们结合不等式

$$\left|\frac{d\varphi_i}{ds}\right|\leqslant|\delta\varphi_i|,\ i=1, 2, 3,$$

只要用 Schwarz 不等式，则对几乎所有的 $\rho\in(0, R)$，从(15.81)，(15.70)及(15.77)导出不等式:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathfrak{S}_\rho} J(\boldsymbol{\varphi})\,dA\right| &\leqslant (\sup_{\mathfrak{T}}|\boldsymbol{\omega}|)\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho}|\delta\boldsymbol{\varphi}|\,ds\\ &\leqslant \Lambda_0\Big(\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho}|\delta\boldsymbol{\varphi}|^2 ds\Big)^{1/2}\Big(\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho} ds\Big)^{1/2}\\ &= \Lambda_0\Big(D_\rho\int_{\mathfrak{S}_\rho}|\delta r|\,|\delta\boldsymbol{\varphi}|^2 dA\Big)^{1/2}\Big(D_\rho\int_{\mathfrak{S}_\rho}|\delta r|\,dA\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

因而，由于 $|\delta r|\leqslant|Dr|=1$，故对几乎所有的 $\rho\in(0, 3R/4)$，从(15.76)得到

$$\mathfrak{D}(\rho)\leqslant 2\Lambda_0|K|\,(f'(\rho)\mathfrak{D}'(\rho))^{1/2}+\Lambda_1K'R^2,$$

这里用 $\mathfrak{D}(\rho)$ 作为 $\mathfrak{D}(\rho; Y)$ 的缩写，且

$$f(\rho)=A(\mathfrak{S}_\rho(Y)).$$

注意，由于 $f(\rho)$ 和 $\mathfrak{D}(\rho)$ 关于 ρ 是非减的，所以 $f'(\rho)$ 和 $\mathfrak{D}'(\rho)$ 对几乎所有的 $\rho\in(0, R)$ 存在. 在上述不等式两边同时平方就得到

$$\mathfrak{D}^2(\rho)\leqslant 8(\Lambda_0K)^2 f'(\rho)\mathfrak{D}'(\rho)+2(K'\Lambda_1R^2)^2.$$

现若设 $\qquad g(\rho)=f(\rho)+\rho R\quad$ (因此 $g'(\rho)\geqslant R$)，

又设 $$\mathfrak{E}(\rho)=\mathfrak{D}(\rho)+\rho/R,$$
那么，为了证明先前的不等式蕴涵一个形如
$$\mathfrak{E}^2(\rho)\leqslant Cg'(\rho)\mathfrak{E}'(\rho)$$
的不等式对几乎所有的 $\rho\in(R/4, R/2)$ 成立(其中 $C=C(\Lambda_0, K, K'R^2, \Lambda_1)$)就是一件相当简单的事情. 这又可写作

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\mathfrak{E}(\rho)}\right)\geqslant\frac{1}{Cg'(\rho)}. \tag{15.82}$$

利用 Hölder 不等式及 g 的单调性，我们有
$$\left(\frac{R}{4}\right)^2=\left(\int_{R/2}^{3R/4}d\rho\right)^2\leqslant\left(\int_{R/2}^{3R/4}g'(\rho)\,d\rho\right)\left(\int_{R/2}^{3R/4}\frac{d\rho}{g'(\rho)}\right)$$
$$\leqslant(g(3R/4)-g(R/2))\int_{R/2}^{3R/4}\frac{d\rho}{g'(\rho)},$$
所以 $$\int_{R/2}^{3R/4}\frac{d\rho}{g'(\rho)}\geqslant\frac{(R/4)^2}{g(3R/4)-g(R/2)}>\frac{(R/4)^2}{g(3R/4)}.$$
因此在 $(R/2, 3R/4)$ 上积分(15.82)，并利用最后这个不等式，就得到
$$\frac{1}{\mathfrak{E}(R/2)}-\frac{1}{\mathfrak{E}(3R/4)}\geqslant\frac{(R/4)^2}{Cg(3R/4)},$$
所以 $$\mathfrak{E}(R/2)\leqslant\frac{C}{R^2}[A(\mathfrak{S}_{3R/4}(Y))+R^2].$$
利用(15.79)就得到我们所期望的结果(15.80). ▌

下面的定理包含了 $\mathfrak{D}(\rho; Z)$ 的主估计. 在定理的陈述及其后，Λ_2 表示满足下式的常数:

$$\int_{\mathfrak{S}_{R/2}(Y)}H^2\,dA\leqslant\Lambda_2, \tag{15.83}$$

这里，$H=(\varkappa_1+\varkappa_2)/2$ 是 $\mathfrak{S}$ 的平均曲率.

定理 15.14 假设 φ 是从 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{T}$ 中的一个 (K, K')-拟保角 C^1 映射. 则对所有的 $Z\in\mathfrak{S}_{R/4}(Y)$ 及所有的 $\rho\in(0, R/4)$，有

$$\mathfrak{D}(\rho; Z)\leqslant C(\rho/R)^\alpha, \tag{15.84}$$

这里，C 和 α 是仅依赖于 Λ_0, K, $K'R^2$, Λ_1 和 Λ_2 的正常数.

证明 在证明中，我们设 $\mathfrak{S}_\rho=\mathfrak{S}_\rho(Z)$, $\mathfrak{D}(\rho)=\mathfrak{D}(\rho; Z)$，这里 $Z\in\mathfrak{D}_{R/4}(Y)$，且用 r 表示径向距离函数，定义为

$$r(X)=|X-Z|,\ X\in\mathbb{R}^3.$$

我们取 $\rho\in(0,\ R/4)$ 使得 δr 在 $\partial\mathfrak{S}_\rho$ 上决不为零，因而可以假定 (15.77) 和 (15.78) 成立. 因为曲线 $\Gamma_\rho^{(j)}$ 是闭的，我们有

$$\int_{\Gamma^{(j)}}\frac{d\varphi_i}{ds}ds=0;\quad(\Gamma^{(j)}=\Gamma_\rho^{(j)}),$$

因此，如果设 X_j 表示 $\Gamma_\rho^{(j)}$ 的初始点(对应弧长 $s=0$)，则(15.81)右端的积分可写成

$$\int_{\Gamma^{(j)}}(\omega_i\circ\boldsymbol{\varphi}-\omega_i\circ\boldsymbol{\varphi}(X_j))\frac{d\varphi_i}{ds}ds.$$

因此(15.81)给出

$$\begin{aligned}\left|\iint_{\mathfrak{S}_\rho}J(\boldsymbol{\varphi})dA\right|&\leqslant\sum_{j=1}^{n(\rho)}\left\{\sup_{\Gamma^{(j)}}|\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\varphi}(X_j)|\int_{\Gamma^{(j)}}\left|\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds}\right|ds\right\}\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{n(\rho)}\left\{\int_{\Gamma^{(j)}}\left|\frac{\boldsymbol{\omega}d\circ\boldsymbol{\varphi}}{ds}\right|ds\int_{\Gamma^{(j)}}\left|\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds}\right|ds\right\}\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{n(\rho)}\left\{\int_{\Gamma^{(j)}}|\delta\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\varphi}|ds\int_{\Gamma^{(j)}}|\delta\boldsymbol{\varphi}|ds\right\}\\
&\leqslant\sup_{\mathfrak{Z}}|D\boldsymbol{\omega}|\sum_{j=1}^{n(\rho)}\left(\int_{\Gamma^{(j)}}|\delta\boldsymbol{\varphi}|ds\right)^2\\
&\leqslant\Lambda_0\left(\sum_{j=1}^{n(\rho)}\int_{\Gamma^{(j)}}|\delta\boldsymbol{\varphi}|ds\right)^2=\Lambda_0\left(\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho}|\delta\boldsymbol{\varphi}|ds\right)^2\\
&\leqslant\Lambda_0\left(\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho}|\delta\boldsymbol{\varphi}|^2|\delta r|^{-1}ds\right)\left(\int_{\partial\mathfrak{S}_\rho}|\delta r|ds\right)\\
&=\Lambda_0\left(D_\rho\int_{\mathfrak{S}_\rho}|\delta\varphi|^2dA\right)\left(D_\rho\int_{\mathfrak{S}_\rho}|\delta r|^2dA\right),\ \text{由}(15.77)\\
&\leqslant C\Lambda_0\rho\mathfrak{D}'(\rho),\ \text{由}(15.36)\end{aligned}$$

这里 $C=C(\Lambda_1,\ \Lambda_2)$. 因此，根据(15.76)我们有

$$\mathfrak{D}(\rho)\leqslant C|K|\Lambda_0\rho\mathfrak{D}'(\rho)+C'K'\rho^2$$

对几乎所有的 $\rho\in(0,\ R/4)$ 成立，由于(15.34)，这里 $C'=C'(\Lambda_1,\ \Lambda_2)$. 现在定义 $\mathfrak{G}(\rho)=\mathfrak{D}(\rho)+(\rho/R)^2$，于是不难看出，上面的不等式蕴涵着如下不等式:

$$\mathfrak{G}(\rho)\leqslant C\rho\mathfrak{G}'(\rho),$$

这里$C=C(\Lambda_0, K, K'R^2, \Lambda_1, \Lambda_2)$. 最后这个不等式可写作

$$\frac{d}{d\rho}\log\mathfrak{G}(\rho)\geqslant(C\rho)^{-1},$$

且因为$\mathfrak{G}(\rho)$关于ρ是增加的,进行积分可得

$$\log(\mathfrak{G}(\rho)/\mathfrak{G}(R/4))\leqslant C^{-1}\log(4\rho/R),\ \rho\leqslant R/4.$$

于是

$$\mathfrak{G}(\rho)\leqslant 4^{\alpha}\mathfrak{G}(R/4)(\rho/R)^{\alpha},\ \rho\leqslant R/4,$$

这里$\alpha=C^{-1}$. 因为$\mathfrak{S}_{R/4}(Z)\subset\mathfrak{S}_{R/2}(Y)$,我们必有

$$\mathfrak{G}(R/4)\leqslant\mathfrak{D}(R/2;Y)+1/6,$$

因此由(15.80)就得到我们所要的估计. ▌

利用推广了的Morrey估计(引理15.4),现在我们可以最终地从定理15.4导出关于(K, K')-拟保角映射的Hölder估计.

定理 15.15 假设$\boldsymbol{\varphi}$是从$\mathfrak{S}$到$\mathfrak{T}$中的一个(K, K')-拟保角C^1映射. 则

$$(15.85)\qquad \sup_{X\in\mathfrak{S}_\rho^*(Y)}|\boldsymbol{\varphi}(X)-\boldsymbol{\varphi}(Y)|\leqslant C(\rho/R)^{\alpha},\ \rho\in(0, R/4),$$

这里C和α是仅依赖于$\Lambda_0, K, K'R^2, \Lambda_1, \Lambda_2$的正常数,而$\mathfrak{S}_\rho^*(Y)$是$\mathfrak{S}_\rho(Y)$包含$Y$的分量.

证明 令Z是$\mathfrak{S}_{R/4}(Y)$的任意一点. 依Hölder不等式及估计(15.84)和(15.34),我们有

$$\int_{\mathfrak{S}_\rho(Z)}|\delta p_i|dA\leqslant(CC')^{1/2}\rho(\rho/R)^{\alpha/2},$$

$$\rho\in(0, R/4),\ i=1, 2, 3,$$

这里,C和α如同在(15.84)中一样,而$C'=C'(\Lambda_1, \Lambda_2)$. 因此,取$K=(CC')^{1/2}$, $\beta=\alpha/2$, 引理15.4的假设满足. 定理得证. ▌

15.6. 具有拟保角 Gauss 映射的图象

在这节中, $\mathfrak{S}$表示$C^2(\Omega)$函数u的图象$\{(x, z)\in\mathbb{R}^3|x\in\Omega, z=u(x)\}$, y表示Ω的一个固定点,并假定Ω包含圆域

$$B_R(Y)=\{x\in\mathbb{R}^2|\,|x-y|<R\},$$

Y表示$\mathfrak{S}$的点$(y, y_3)\,(y_3=u(y))$,如同在15.4节中一样, $\boldsymbol{\nu}$表示在$\Omega\times\mathbb{R}$上由

$$\boldsymbol{\nu}(x, z) \equiv \boldsymbol{\nu}(x) = \left(-\frac{Du(x)}{v}, \frac{1}{v}\right), \quad v = \sqrt{1+|Du|^2},$$

$$x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}$$

定义的向上单位法向函数. $\mathfrak{S}$ 的 Gauss 映射 $\boldsymbol{G}$ 把 $\mathfrak{S}$ 映到上半球面

$$\mathfrak{T} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |X| = 1, x_3 > 0\},$$

$\boldsymbol{G}$ 的定义为: 在每一点 $(x, x_3) \in \mathfrak{S}$,

$$\boldsymbol{G}(x, x_3) = \boldsymbol{\nu}(x, x_3). \tag{15.86}$$

其他记号和术语同 15.4 和 15.5 节.

首先要明显地得到 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{G}$ 时的量 $|\delta\boldsymbol{\varphi}|^2$ 和 $J(\boldsymbol{\varphi})$. 如果象 15.5 节那样建立新坐标, 那末这是相当直截了当的. 在这种情况下, 函数 $\boldsymbol{\psi}$ 定义为

$$\boldsymbol{\psi}(\zeta) = -(1+|D\tilde{u}(\zeta)|^2)^{-1/2} D\tilde{u}(\zeta), \quad \zeta \in \mathscr{U},$$

从而由 (15.74) 和 (15.75) 得到

$$J(\boldsymbol{G})(Y) = D_{11}\tilde{u}(0) D_{22}\tilde{u}(0) - (D_{12}\tilde{u}(0))^2,$$

$$|\delta\boldsymbol{G}|^2(Y) = (D_{11}\tilde{u}(0))^2 + 2(D_{12}\tilde{u}(0))^2 + (D_{22}\tilde{u}(0))^2.$$

然而根据附录我们有

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{G})(Y) &= \varkappa_1\varkappa_2, \\ |\delta\boldsymbol{G}|^2(Y) &= \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2, \end{aligned} \tag{15.87}$$

这里 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 是 $\mathfrak{S}$ 在 Y 处的主曲率. 在 (15.87) 中出现的乘积 $\varkappa_1\varkappa_2$ 称为 $\mathfrak{S}$ 的 Gauss 曲率; 它在曲面论研究中是极端重要的几何不变量.

利用恒等式 (15.87), 并回想到定义 (15.76), 就看出, $\boldsymbol{G}$ 是 (K, K')-拟保角的当且仅当在 $\mathfrak{S}$ 的每一点上, 主曲率 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 满足

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 \leqslant 2K\varkappa_1\varkappa_2 + K'. \tag{15.88}$$

这样我们就看出, 为什么拟保角映射的研究是与平均曲率型方程的研究有关的; 因为把 (15.63)′ 平方就得到等式

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varkappa_1^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\varkappa_2^2 = -2\varkappa_1\varkappa_2 + \frac{\beta^2}{\alpha_1\alpha_2}.$$

即是说, 由于 (15.64)′ 和 (15.65)′, 我们推得 (15.63), (15.64),

(15.65) 的一个解 u 的图象的 Gauss 映射是一个 (K, K')-拟保角映射，其中

(15.89) $$K=-\gamma,\ K'=\gamma\mu^2.$$

因而，在这节中关于具有拟保角 Gauss 映射的图象所建立的结果可以全部应用于(15.63)，(15.64)，(15.65)的解的图象上去.

我们最终希望把定理 15.15 应用到 Gauss 映射 $\boldsymbol{G}$ 上，但首先必须讨论常数 Λ_0，Λ_1 和 Λ_2 的合适选择. 在 15.5 节中我们已经看到，可取

$$\boldsymbol{\omega}(X)=\left(-\frac{x_2}{1+x_3},\ \frac{x_1}{1+x_3},\ 0\right).$$

于是容易验明常数 Λ_0 的合适选择是 $\Lambda_0=4$. 其次根据引理 15.13 和(15.87)我们注意到，若 $\boldsymbol{G}$ 是 (K, K')-拟保角的，则有

$$\int_{\mathfrak{S}_{R/2}(Y)}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\,dA\leqslant C,$$

这里 $C=C(K,\ K'R^2,\ \Lambda_1)$. 这样，因为

$$\varkappa_1^2+\varkappa_2^2\geqslant\frac{1}{2}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)^2=2H^2,$$

我们可取 $\Lambda_2=\dfrac{C}{2}$，C 同上. 下面的引理表明我们可选 Λ_1 使之仅依赖于 K 和 $K'R^2$.

引理 15.16 设 $\boldsymbol{G}$ 是 (K, K')-拟保角的. 则

(15.90) $$|\mathfrak{S}_{\rho/2}(Z)|\leqslant C\rho^2$$

对每个满足 $\mathfrak{S}_\rho(Z)\subset\mathfrak{S}_R(Y)$ 的 $Z\in\mathfrak{S}$ 及 $\rho>0$ 成立，其中 $C=C(K,\ K'R^2)$.

证明 我们证明的出发点是恒等式 (15.44). 借助公式 (A15)，对所有的 $\eta\in C_0^1(\Omega)$ 它可写成形式

$$\int_\Omega(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\eta\,dx+\int_\Omega(\nu_kD_k\nu_iD_i\eta-2\nu_kD_kH\eta)\,dx=0,$$

这里，对 $x\in\Omega$，我们记 $H(x)=H(x,\ u(x))$，$\varkappa_i(x)=\varkappa_i(x,\ u(x))$.

如果 $\eta\in C_0^2(\Omega)$，分部积分，就得到

$$\int_\Omega(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2-4H^2)\eta\,dx=\int_\Omega(\nu_i\nu_kD_{ik}\eta-4H\nu_iD_i\eta)\,dx,$$

因此，当 $H=(\varkappa_1+\varkappa_2)/2$ 时，对所有的 $\eta\in C_0^2(\Omega)$ 有

$$-2\int_\Omega \varkappa_1\varkappa_2\eta\, dx=\int_\Omega (\nu_i\nu_k D_{ik}\eta-2(\varkappa_1+\varkappa_2)\nu_i D_i\eta)\, dx.$$

用 η^2 代替 η，依(15.88)我们就有

$$\int_\Omega (\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\eta^2\, dx\leqslant |K|\int_\Omega (|D^2\eta^2|+2|\varkappa_1+\varkappa_2||D\eta^2|)\, dx$$

$$+K'\int_\Omega \eta^2\, dx.$$

因为我们可写

$$4K(\varkappa_1+\varkappa_2)\eta|D\eta|\leqslant\frac{1}{2}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\eta^2+(4KD\eta)^2,$$

而这就给出

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\eta^2\, dx\leqslant\int_\Omega \{C(|D\eta|^2+\eta|D^2\eta|)+K'\eta^2\}dx,$$

这里 $C=C(K)$. 现在令 $\rho>0$ 和 $Z=(z,\ u(z))$，使得 $B_\rho(z)\subset\Omega$，并选择 η，使得在 Ω 中有 $0\leqslant\eta\leqslant1$，以及

$$\eta=\begin{cases}1, & 在\ B_{\rho/2}(z)\ 上,\\ 0, & 在\ \Omega-B_\rho(z)\ 上,\end{cases}$$

$$|D\eta|\leqslant c/\rho,\quad |D^2\eta|\leqslant c/\rho^2,$$

这里 c 是绝对常数.（显然，这样的函数 η 是存在的.）那么，因为 $K'\leqslant K'R^2/\rho^2$，即得

$$\int_\Omega (\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\eta^2\, dx\leqslant C, \tag{15.91}$$

这里 $C=C(K,\ K'R^2)$. 因此，利用 Hölder 不等式就有

$$\int_\Omega |H\eta|\, dx\leqslant\left(\int_\Omega (H\eta)^2\, dx\right)^{1/2}|B_\rho(z)|^{1/2}\leqslant(C\pi)^{1/2}\rho.$$

现在从(15.53)就得到引理. ▌

如果 G 是$(K,\ K')$-拟保角的，则从引理 15.16，定理 15.15，以及我们先前选定的 Δ_0，Δ_1，可以导出

$$\sup_{X\in\mathfrak{S}_\rho^*(Y)}|\boldsymbol{\nu}(X)-\boldsymbol{\nu}(Y)|\leqslant C(\rho/R)^\alpha,\ \rho\in(0,\ R). \tag{15.92}$$

这里 C 和 α 是仅依赖于 K，$K'R^2$ 的正常数. 值得指出的是，我们与其对所有 $\rho\in(0,\ R)$ 来推断(15.92)，还不如象定理 15.15 中

一样对 $\rho\in(0,\ R/4)$ 来推断 (15.92). 我们之所以能作到这点是因为$|\boldsymbol{\nu}|=1$(这意味着形如(15.92)的不等式对于 $\rho\in(R/4,\ R)$ 成立是平凡的).

估计式(15.92)可用来求得 $\mathfrak{S}$ 的某些更强的正则性结果. 我们先用 (15.92) 导出关于 $\mathfrak{S}$ 的局部非参数表示式的某些事实. 令 P 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性等距,使得

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}(0)=P\boldsymbol{\nu}(y,\ y_3)=(0,\ 0,\ 1),$$

并令
$$\tilde{\mathfrak{S}}=\{(\zeta,\ \zeta_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,(\zeta,\ \zeta_3)=P(x-y,\ x_3-y_3),\\ (x,\ x_3)\in\mathfrak{S}^*_{\theta R}(Y)\},$$

这里 $\theta\in(0,\ 1)$. 因为 $\mathfrak{S}$ 是一个 C^2 曲面, 我们当然知道: 对充分小的 θ, 存在 $0\in\mathbb{R}^2$ 的一个邻域 $\mathscr{U}$, 及一个 $C^2(\mathscr{U})$ 函数 $\tilde{u}$, $D\tilde{u}(0)=0$, 且

(15.93) $\quad\tilde{\mathfrak{S}}=\tilde{u}$ 的图象$=\{(\zeta,\ \zeta_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,\zeta\in\mathscr{U},\ \zeta_3=\tilde{u}(\zeta)\}$.

此外,记 $\quad\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\zeta)=(1+|D\tilde{u}(\zeta)|^2)^{-1/2}(-D\tilde{u}(\zeta),\ 1),\ \zeta\in\mathscr{U}$.

依(15.92)我们有

$$|\tilde{\boldsymbol{\nu}}(\zeta)-\tilde{\boldsymbol{\nu}}(0)|\leqslant C\theta^\alpha,\ \zeta\in\mathscr{U},$$

这里 C, α 同(15.92)中一样. 因此

$$(1+|D\tilde{u}(\zeta)|^2)^{-1}|D\tilde{u}(\zeta)|^2+[(1+|D\tilde{u}(\zeta)|^2)^{-1/2}-1]^2\\ \leqslant(C\theta^\alpha)^2,\quad\zeta\in\mathscr{U},$$

这就蕴涵

$$|D\tilde{u}(\zeta)|\leqslant[1-(C\theta^\alpha)^2]^{-1/2}C\theta^\alpha<\frac{1}{2},\tag{15.94}$$

只要其中 θ 使得

$$C\theta^\alpha<\frac{1}{3}.\tag{15.95}$$

由于(15.94), 我们可以断定上述类型的表示式对任何满足(15.95)的 θ 均成立. 这可从如下事实推得: 如果 $\theta\in(0,\ 1)$ 使得(15.93), (15.95)成立, 则利用 $\mathfrak{S}$ 的光滑性以及(15.94), 我们可以延拓 $\tilde{u}$, 使得一个形如(15.93)的表示式成立,其中用 $\mathfrak{S}^*_{(\theta+\varepsilon)R}(Y)$ $(\varepsilon>0)$ 代替 $\mathfrak{S}^*_{\theta R}(Y)$. 为了后面参阅, 我们还要指出 (15.94) 蕴

涵着

$$B_{\theta R/2}(0)\subset\mathscr{U}. \tag{15.96}$$

现在我们可以证明下面引理所给出的非平凡连通性.

引理 15.17 设 G 是 (K, K')-拟保角的. 则存在一个仅依赖于 K, $K'R^2$ 的常数 $\theta\in(0, 1)$, 使得 $\mathfrak{S}_\rho(Y)$ 对每个 $\rho<\theta R$ 是连通的.

证明 在证明中, 我们将设 C_1, C_2, $\cdots$ 表示仅依赖于 K, $K'R^2$ 的常数. 对 $\sigma>0$, $\widetilde{B}_\sigma$ 表示开球 $\{X\in\mathbb{R}^3\mid |X-Y|<\sigma\}$. 设 $\theta\in(0,1)$ 满足 (15.95), $\rho=\theta R/2$, $\beta\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$, 定义 $\mathfrak{G}_\beta$ 是 $\mathfrak{S}_{\rho/2}(Y)$ 的那样一些(连通)成分的集合, 这些成分与球 $\widetilde{B}_{\beta\rho}$ 相交. 对每一 $\mathscr{G}\in\mathfrak{G}_\beta$, 可以找出 $Z\in\mathscr{G}\cap\widetilde{B}_{\rho/4}$, 使得

$$\mathscr{G}\subset\mathfrak{S}_\rho^*(Z),$$

因此, 在引理前面的讨论中用 Z 代替 Y, 用 $R/2$ 代替 R, 我们就看出: $\mathscr{G}$ 可以表成 (15.93), (15.94) 的形式. 利用关于每个 $\mathscr{G}\in\mathfrak{G}_\beta$ 的这种非参数表示, 并利用 $\mathfrak{G}$ 中没有两个元素可以相交这个事实, 可见所有成分 $\mathscr{G}\in\mathfrak{G}$ 的并集被包含在两张平行平面 π_1, π_2 之间的一个有界区域中, 其中

$$\operatorname{dis}(\pi_1, \pi_2)\leqslant C_1(\beta+\theta^\alpha)\rho, \tag{15.97}$$

这里 α 同 (15.92) 中一样.

我们现在的目的是证明: 对于适当选取的仅依赖于 K 和 $K'R^2$ 的 β 和 θ, 在 $\mathfrak{G}_\beta$ 中仅存在一个元素 (就是 $\mathfrak{S}_{\rho/2}^*(Y)$). 实际上, 假设存在两个不同的元素 $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2\in\mathfrak{G}_\beta$. 显然可以选择 $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2$, 使它们在下述意义下是相邻的: 在 $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ 及 $\partial\widetilde{B}_{\rho/2}$ 所包围的体积 $\mathscr{V}$ 中不包含其他的元素 $\mathscr{G}\in\mathfrak{G}_\beta$. 因此 $\mathscr{V}\cap\widetilde{B}_{\beta\rho}$ 或者由图象 $\mathfrak{S}$ 上方的全部点组成, 或者由图象下方的全部点组成; 于是明显的是: 如果在 $\mathscr{G}_1$ 上的单位法向 $\boldsymbol{\nu}$ 指向 $\mathscr{V}$ 的外部 (内部), 则在 $\mathscr{G}_2$ 上也是指向 $\mathscr{V}$ 的外部 (内部). 此外, 根据 (15.97) 我们有

$$\begin{aligned}&\mathscr{V}\text{ 的体积}=|\mathscr{V}|\leqslant C_2(\beta+\theta^\alpha)\rho^3,\\&(\overline{\mathscr{V}}\cap\partial\widetilde{B}_{\rho/2})\text{ 的面积}=A(\overline{\mathscr{V}}\cap\partial\widetilde{B}_{\rho/2})\leqslant C_3(\beta+\theta^\alpha)\rho^2.\end{aligned} \tag{15.98}$$

于是，$\mathscr{V}$ 上的散度定理的一个应用给出

$$\int_{\mathscr{G}_1}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dA+\int_{\mathscr{G}_2}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dA=\pm\left\{\int_{\mathscr{V}}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu}\,dx\,dx_3-\int_{\partial\widetilde{B}_{\rho/2}\cap\mathscr{V}}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dA\right\},$$

这里 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\partial\widetilde{B}_{\rho/2}$ 的单位外法向．依(15.11)和(15.98)，这给出

$$A(\mathscr{G}_1)+A(\mathscr{G}_2)\leqslant 2\int_{\mathscr{V}}|H(x)|\,dx\,dx_3+C_3(\beta+\theta^\alpha)\rho^2.$$

依(15.98)和(15.91)，还有

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{V}}|H(x)|\,dx\,dx_3&\leqslant\left(\int_{\mathscr{V}}H^2(x)\,dx\,dx_3\right)^{1/2}|\mathscr{V}|^{1/2}\\&\leqslant\left(\int_{\widetilde{B}_{\rho/2}}H^2(x)\,dx\,dx_3\right)^{1/2}\{C_2(\beta+\theta^\alpha)\rho^3\}^{1/2}\\&\leqslant(C_4\rho)^{1/2}\{C_2(\beta+\theta^\alpha)\rho^3\}^{1/2}\\&\leqslant\sqrt{C_4C_2(\beta+\theta^\alpha)}\,\rho^2.\end{aligned}$$

因此，若 $\beta+\theta^\alpha<1$，我们就有

$$A(\mathscr{G}_1)+A(\mathscr{G}_2)\leqslant C_5\sqrt{\beta+\theta^\alpha}\,\rho^2. \tag{15.99}$$

另一方面，利用与(15.93)，(15.94)中同样的一个非参数表示式，就推断出

$$A(\mathscr{G})\geqslant C_6\rho^2 \tag{15.100}$$

对每一个 $\mathscr{G}\in\mathfrak{G}_\beta$ 成立；这里 $C_6>0$ 是一个绝对常数．(因为 $\mathfrak{S}^*_{\rho/4}(Z)\subset\mathscr{G}$，我们可从(15.94)导出(15.100)对(例如)$C_6=\pi/64$ 成立．)如果选择 β，θ 充分小(但仅依赖于 K 和 $K'R^2$)，那不等式(15.99)和(15.100)显然是矛盾的．于是对于 β,θ 的这种选择，有

$$\mathfrak{S}_{\beta\rho}(Y)=\mathfrak{S}\cap\widetilde{B}_{\beta\rho}=\mathfrak{S}_{\rho/2}(Y)\cap\widetilde{B}_{\beta\rho}=\mathfrak{S}^*_{\rho/2}(Y)\cap\widetilde{B}_{\beta\rho}.$$

然而利用 $\mathfrak{S}^*_{\rho/2}(Y)$ 的形如(15.93)，(15.94)的一个表示式，$\mathfrak{S}^*_{\rho/2}(Y)\cap\widetilde{B}_{\beta\rho}$ 显然是连通的．于是，$\mathfrak{S}_{\beta\rho}(Y)=\mathfrak{S}_{\beta\theta R/2}(Y)$ 是连通的．由于 β,θ 仅依赖于 K，$K'R^2$，就得到引理．▌

由于上面的连通性结果，当 $\rho\leqslant\theta R$ 时在(15.92)中我们可以用 $\mathfrak{S}_\rho(Y)$ 代替 $\mathfrak{S}^*_\rho(Y)$．可是，因为 $|\boldsymbol{\nu}|=1$，形如(15.92)的不等式对 $\rho>\theta R$ 是平凡的．因此我们有下面的定理．

定理 15.18 假设 G 是 (K,K')-拟保角的．则

(15.101) $$\sup_{X\in\mathfrak{S}_\rho(Y)}|\boldsymbol{\nu}(X)-\boldsymbol{\nu}(Y)|\leqslant C(\rho/R)^\alpha,\ \rho\in(0,\ R),$$

其中，C 和 α 是仅依赖于 K，$K'R^2$ 的正常数.

附注 (i) 估计式(15.101)蕴涵着

(15.102) $$|\boldsymbol{\nu}(X)-\boldsymbol{\nu}(\overline{X})|\leqslant 2^\alpha C(|X-\overline{X}|/R)^\alpha$$

对所有的 X，$\overline{X}\in\mathfrak{S}_{R/4}(Y)$ 成立. 这可通过在(15.101)中用 $\overline{X}$ 代替 Y 和用 $R/2$ 代替 R 看出.

(ii) 如果 $K'=0$，$\Omega=\mathbb{R}^2$，则可在(15.101)中令 $R\to\infty$，从而表明在 $\mathfrak{S}$ 上有 $\boldsymbol{\nu}(X)\equiv\boldsymbol{\nu}(Y)$ 成立. 即是说，我们有下面的推论.

推论 15.19 假设 G 是 $(K,\ 0)$-拟保角的，且 $\Omega=\mathbb{R}^2$. 则 u 是一个线性函数.

注意推论 15.19 可以在(15.84)中令 $R\to\infty$ 而直接导出，而无需首先证明 (15.101)，甚或 (15.92). 可是我们仍然需要引理 15.16，为的是证明 Λ_1 可以选择得仅依赖于 K.

15.7. 对平均曲率型方程的应用

这里 $\mathfrak{S}$ 表示(15.63)，(15.64)，(15.65)的解 u 的图象. 其它术语与 15.4～15.6 中一样.

我们首先指出，因为 Gauss 映射 G 自动地是$(K,\ K')$-拟保角的，其中 K，K' 与(15.89)中一样，我们从上面的推论 15.19 可直接导出定理 15.12.

其次，我们希望证明：若对系数 a^{ij}，b 加上适当的 Hölder 条件，定理 15.18 蕴涵 $\mathfrak{S}$ 的主曲率 κ_1，κ_2 的一个界. 为使这种条件便于描述，我们首先定义

$$a^{3i}(x,\ z,\ p)=a^{i3}(x,\ z,\ p)=\sum_{j=1}^2 p_j a^{ij}(x,\ z,\ p),\quad i=1,\ 2,$$

$$a^{33}(x,\ z,\ p)=\sum_{i,j=1}^2 p_i p_j a^{ij}(x,\ z,\ p),\quad (x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,$$

用此把矩阵$[a^{ij}]$扩充为一个 3×3 矩阵(见 15.4 节中的方法).

对所有的$(x,\ z,\ p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$，定义

$$a_*^{ij}(X.\ \boldsymbol{\nu})=a^{ij}(x,\ z,\ p),\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,$$

$$b_*(X, \boldsymbol{\nu})=(1+|p|^2)^{-1/2}b(x, z, p),$$

用此，将 a^{ij}, b 用 $X=(x, z)\in\Omega\times\mathbb{R}$ 及 $\boldsymbol{\nu}=(1+|p|^2)^{-1/2}(-p, 1)$ 来表示也是方便的. 注意到这些定义在集合 $(\Omega\times\mathbb{R})\times\{\zeta\in\mathbb{R}^3||\zeta|=1, \zeta_3>0\}$ 上给出 a_*^{ij}, b_*. (当方程(15.63)作为椭圆参数变分问题的非参数 Euler 方程出现时，我们在附录 15.8 中证明函数 a_*^{ij}, b_* 的出现是相当自然的. ）我们现在假定函数 a_*^{ij}, b_* 对所有 X, $\overline{X}\in\Omega\times\mathbb{R}$ 及所有 $\boldsymbol{\nu}$, $\overline{\boldsymbol{\nu}}\in\{\zeta\in\mathbb{R}^3||\zeta|=1, \zeta_3>0\}$ 满足 Hölder 条件:

$$(15.103)\quad \begin{aligned} |a_*^{ij}(X, \boldsymbol{\nu})-a_*^{ij}(\overline{X},)\overline{\boldsymbol{\nu}}| &\leqslant \mu_1\{(|X-\overline{X}|/R)^\beta \\ &\quad +|\boldsymbol{\nu}-\overline{\boldsymbol{\nu}}|^\beta\}, \\ |b_*(X, \boldsymbol{\nu})-b_*(\overline{X}, \overline{\boldsymbol{\nu}})| &\leqslant \mu_2\{(|X-\overline{X}|/R)^\beta \\ &\quad +|\boldsymbol{\nu}-\overline{\boldsymbol{\nu}}|^\beta\}, \end{aligned}$$

这里 μ_1, μ_2 及 $\beta\in(0, 1)$是常数.

定理 15.20 假设(15.63), (15.64), (15.65)及(15.103)成立. 那么如果 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 是 $\mathfrak{S}$ 在 Y 处的主曲率，我们就有

$$(15.104)\quad \varkappa_1^2+\varkappa_2^2\leqslant C/R^2,$$

其中 $C=C(\gamma, \mu R, \mu_1, \mu_2 R, \beta)$.

证明 选择 θ 充分小以保证 $\mathfrak{S}_{\theta R}(Y)$ 是连通的(引理 15.17), 且当(15.95)(因此也有(15.94))成立时，可以表成(15.93)的形式. 把 15.4 节中的讨论同时应用于 $\mathfrak{S}$ 和(15.93)的变换曲面 $\tilde{\mathfrak{S}}$, 则推出 $\tilde{u}$ 在 $\mathscr{U}$ 上满足方程

$$(15.105)\quad \tilde{a}^{ij}(\zeta)D_{ij}\tilde{u}+\tilde{b}(\zeta)=0,$$

这里 $$|\xi|^2-\frac{(D\tilde{u}\cdot\xi)^2}{1+|D\tilde{u}|^2}\leqslant\tilde{a}^{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\gamma\left[|\xi|^2-\frac{(D\tilde{u}\cdot\xi)^2}{1+|D\tilde{u}|^2}\right]$$

对所有 $\zeta\in\mathbb{R}^2$ 成立，且

$$|\tilde{b}|\leqslant\mu\sqrt{1+|D\tilde{u}|^2}.$$

因此，依(15.94)，对所有的 $\zeta\in B=B_{\theta R/2}(0)$ 我们有

$$(15.106)\quad \begin{aligned} &|\xi|^2/2\leqslant\tilde{a}^{ij}(\zeta)\xi_i\xi_j\leqslant\gamma|\xi|^2, \\ &|\tilde{b}(\zeta)|\leqslant 2\mu. \end{aligned}$$

根据(15.103), (15.102)和 15.4 节中的讨论，还推出我们可以假

设成立 Hölder 估计

$$|\tilde{a}^{ij}(\zeta)-\tilde{a}^{ij}(\tilde{\zeta})|\leqslant C(|\zeta-\tilde{\zeta}|/R)^{\alpha\beta},$$

(15.107) $$\zeta,\ \tilde{\zeta}\in B,\ i,\ j=1,\ 2,$$

$$|\tilde{b}(\zeta)-\tilde{b}(\tilde{\zeta})|\leqslant C(|\zeta-\tilde{\zeta}|/R)^{\alpha\beta},\ \zeta,\ \tilde{\zeta}\in B.$$

此外，从(15.94)及 $\tilde{u}(0)=0$ 的事实，显然有

(15.108) $$\sup_B|\tilde{u}|\leqslant R.$$

于是，利用 Schauder 内估计(定理 6.2)，连同(15.106)，(15.107)和(15.108)，我们推出

$$|\tilde{u}|^*_{2,\alpha;B}\leqslant C\{R+\mu R^2+R^{2+\alpha\beta}\mu_2R^{-\alpha\beta}\}\leqslant CR,$$

其中 $C=C(\gamma,\ \mu R,\ \mu_1,\ \mu_2R,\ \beta)$. 特别地我们有

$$\sum_{i,j=1}^{2}|D_{ij}\tilde{u}(0)|\leqslant C/R,$$

于是，根据(15.87)就得到定理. ∎

Hölder 估计 (15.101) 也可用来求得 (15.63)，(15.64)，(15.65)的解 u 的梯度估计. 下面的定理处理齐次的情形，其系数上不加光滑性或连续性限制.

定理 15.21 假设(15.63)，(15.64)成立，$b\equiv0$，并假设函数 $a^{ij}(x,\ u,\ Du)$，$i,\ j=1,\ 2$，在 Ω 上可测. 则

(15.109) $$|Du(y)|\leqslant C_1\exp(C_2m_R/R),$$

其中，$m_R=\sup\limits_{B_R(y)}(u-u(y))$，$C_1=C_1(\gamma)$，$C_2=C_2(\gamma)$.

证明 正如在定理 15.20 中一样，假定 θ 充分小，以保证 $\mathfrak{S}_{\theta_R}(Y)$ 是连通的，并保证表示式(15.93)，(15.94)成立. 注意，因为 $b\equiv0$，我们可选择 θ 仅依赖于 γ. 在这里还可假定 P 的矩阵 $[p_{ij}]$ 选得使 $p_{32}=0$. 因此有

(15.110) $$(1+|Du(x)|^2)^{-1/2}=(1+|D\tilde{u}(\zeta)|^2)^{-1/2}(p_{31}D_1\tilde{u}(\zeta)-p_{33}).$$

现在(因为 $b\equiv0$)，方程(15.105)可写成形式：

$$\alpha D_{11}\tilde{u}+2\beta D_{12}\tilde{u}+D_{22}\tilde{u}=0,$$

这里 $\alpha=\tilde{a}_{11}/\tilde{a}_{22}$，$\beta=\tilde{a}_{12}/\tilde{a}_{22}$. 现在用 $p_{31}D_1\varphi$ 去乘这个方程的两

端，这里 $\varphi\in C_0^2(\mathscr{U})$，并在 $\mathscr{U}$ 上积分．利用关系式

$$\int_{\mathscr{U}} D_{22}\tilde{u}D_1\varphi\, d\zeta=-\int_{\mathscr{U}} D_2\tilde{u}D_{12}\varphi\, d\zeta=\int_{\mathscr{U}} D_{21}\tilde{u}D_2\varphi\, d\zeta,$$

且记
$$\psi=p_{31}D_1\tilde{u}-p_{33},$$

于是得到
$$\int_{\mathscr{U}}(\alpha D_1\psi D_1\varphi+2\beta D_2\psi D_1\varphi+D_2\psi D_2\varphi)\, d\zeta=0.$$

即是说，ψ 是一致椭圆型方程

$$D_1(\alpha D_1\psi+2\beta D_2\psi)+D_2(D_2\psi)=0$$

在 $\mathscr{U}$ 上的一个弱解．此外，依(15.110)，在 $\mathscr{U}$ 上我们有 $\psi>0$．因此可以对 ψ 应用定理 8.20 中的 Harnack 不等式，于是给出

(15.111)
$$\sup_{B_{\theta R/2}(0)}\leqslant C\inf_{B_{\theta R/2}(0)}\psi,$$

这里 $C=C(\gamma)$．然而，由于(15.110)及(15.94)，我们知道在 $\mathscr{U}$ 上有

$$(1+|Du(x)|^2)^{-1/2}\leqslant\psi(\zeta)\leqslant 2(1+|Du(x)|^2)^{-1/2},$$

因而在 $\Omega\times\mathbb{R}$ 上定义 v 为

$$v(x,\ z)=(1+|Du(x)|^2)^{1/2},\ x\in\Omega,\ z\in\mathbb{R},$$

我们从(15.111)就导出

$$\sup_{X\in\mathfrak{S}_{\theta R/2}} v(X)\leqslant C\inf_{X\in\mathfrak{S}_{\theta R/2}} v(X).$$

其中 $C=C(\gamma)$．改变 Y，显然可见，存在一个仅依赖于 γ 的数 $\chi\in\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，使得

(15.112)
$$v(X_1)\leqslant Cv(X_2),$$

对满足 $|X_1-X_2|\leqslant\chi R$ 和 $x^{(1)},\ x^{(2)}\in B_{R/2}(y)$ 的无论怎样的 $X_1=(x^{(1)},\ u(x^{(1)}))$ 及 $X_2=(x^{(2)},\ u(x^{(2)}))$ 成立．现在设

$$B^+_{\chi R}(y)=\{x\in B_{\chi R}\,|\,u(x)>u(y)\},$$

又设 $Y_1=(y^{(1)},\ u(y^{(1)}))$，$Y_2=(y^{(2)},\ u(y^{(2)}))$ 使得 $y^{(1)},\ y^{(2)}\in\overline{B^+_{\chi R}}(y)$，且

$$|Du(y^{(1)})|=\sup_{B^+_{\chi R}(y)}|Du|,\ |Du(y^{(2)})|=\inf_{B^+_{\chi R}(y)}|Du|.$$

在 $\mathfrak{S}\cap(\overline{B^+_{\chi R}}(y)\times\mathbb{R})$ 中取点列 $X_1,\ \cdots,\ X_N$，使得

$$|X_{i+1}-X_i|<\chi R, \quad i=1, \cdots, N-1,$$

且使得 $X_1=Y_1$, $X_N=Y_2$. 重复应用(15.111), 显然蕴涵

$$v(Y_1)\leqslant C^N v(Y_2);$$

即
$$\sup_{B^+_{\chi R}(y)} \sqrt{1+|Du|^2}\leqslant C^N \inf_{B^+_{\chi R}(y)} \sqrt{1+|Du|^2}.$$

然而, 我们显然可选择 N, 以使

$$N\leqslant C(m_R/R+1),$$

这里 $C=C(\gamma)$. 因此得到

$$\sup_{B^+_{\chi R}(y)} \sqrt{1+|Du|^2}\leqslant \{C_1\exp(C_2m_R/R)\} \inf_{B^+_{\chi R}(y)} \sqrt{1+|Du|^2},$$

这里 $C_1=C_1(\gamma)$, $C_2=C_2(\gamma)$. 最后, 利用事实

$$\inf_{B^+_{\chi R}(y)} |Du|\leqslant \chi^{-1}m_R/R,$$

(见习题 15.5)就得到定理 15.21. ▌

v 的 Hölder 估计也可用到非齐次情况中去导出 u 的一个梯度估计, 然而在这种情况下, 对上面引入的函数 a^{ij}_*, b_* 加上 Lipschitz 限制是必要的. 感兴趣的读者可查阅[SI4].

15.8. 附录: 椭圆参数泛函

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域. 考察由下式定义的泛函 I:

$$(15.113) \qquad I(\mathbf{Y})=\int_\Omega G(x, \mathbf{Y}, D_1\mathbf{Y}, D_2\mathbf{Y})dx,$$

其中 $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, Y_3):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ 是 C^1 映射. $G(x, X, p)$ 是关于 $(x, X, p)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^6$ 的一个给定的连续函数. (当然在这里 $D_i\mathbf{Y}=(D_iY_1, D_iY_2, D_iY_3)$, $i=1, 2$). 现在考察在 $\mathbb{R}^2$ 的微分同胚保持定向的情况下, I 保持不变的可能性; 也就是, 每当 ψ 是一个具有正的 Jacobi 行列式的从 $\mathbb{R}^2$ 到自身上的微分同胚的时候, 我们应有

$$\int_{\Omega'} G(\zeta, \widetilde{\mathbf{Y}}(\zeta), D_1\widetilde{\mathbf{Y}}(\zeta), D_2\widetilde{\mathbf{Y}}(\zeta))d\zeta$$
$$=\int_\Omega G(x, \mathbf{Y}(x), D_1\mathbf{Y}(x), D_2\mathbf{Y}(x))dx,$$

这里 $\Omega'=\psi(\Omega)$，$\tilde{\mathbf{Y}}=\mathbf{Y}\circ\psi^{-1}$. 简单的计算(见[MY5], p. 349) 表明，对所有这样的微分同胚 ψ 及区域 Ω，这件事成立当且仅当存在 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ 上的一个实值函数 F，使得

(15.114) $\quad G(x, X, p)=F(X, P), (x, X, P)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^6,$

这里

$$P=(p_3p_5-p_2p_6,\ p_1p_6-p_3p_4,\ p_2p_4-p_1p_5),$$

(15.115) $\quad F(X, \lambda q)=\lambda F(X, q), (X, q)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3, \lambda>0.$

需要特别指出，(15.114)蕴涵着 $G(x, X, p)$ 可不依赖于 x；就是，对于 $(x, X, p)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^6$，$G(x, X, p)=G(0, X, p)$. 在 $p=(D_1\mathbf{Y}, D_2\mathbf{Y})$ ($\mathbf{Y}$ 是从 $\bar{\Omega}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 C^1 映射) 的情况下，P 为

$$P=(D_1Y_3\cdot D_2Y_2-D_1Y_2\cdot D_2Y_3,\ D_1Y_1\cdot D_2Y_3-D_1Y_3\cdot D_2Y_1,\ D_1Y_2\cdot D_2Y_1-D_1Y_1\cdot D_2Y_2).$$

正如大家所知道的，在 $\mathbf{Y}$ 是一对一的，且对每个 $x\in\Omega$，Jacobi 矩阵 $[D_jY_i(x)]$ 的秩是 2 的情况下，这个恒等式可以写成

$$P=\chi\boldsymbol{\nu},$$

这里 $\boldsymbol{\nu}$ 是嵌入曲面 $\mathfrak{S}=\{\mathbf{Y}(x)\,|\,x\in\Omega\}$ 的单位法向量，而 χ 是映射 $\mathbf{Y}$ 的面积伸缩因子. 假定我们用单位法向量 $\boldsymbol{\nu}$ 给 $\mathfrak{S}$ 定向，使得 $\chi>0$，那末可写

$$I(\mathbf{Y})=\int_{\mathfrak{S}}F(X, \boldsymbol{\nu}(X))dA(X);$$

也即，我们可完全用定向曲面 $\mathfrak{S}$ 来表示 $I(\mathbf{Y})$，且与用来表示 $\mathfrak{S}$ 的特殊映射 $\mathbf{Y}$ 无关. 通过这样的讨论使我们要去研究泛函 J，它是对任何在 $\mathbb{R}^3$ 中有有限面积的光滑定向曲面 $\mathfrak{S}$ 定义的，

(15.116) $$J(\mathfrak{S})=\int_{\mathfrak{S}}F(X,\boldsymbol{\nu}(X))dA(X),$$

这个泛函具有性质：每当 $\mathbf{Y}$ 是从 Ω 到 $\mathbb{R}^3$ 中的一个一对一 C^1 映射，且在每一点 $x\in\Omega$，使得 $[D_jY_i]$ 的秩为 2；而 $\mathfrak{S}$: $\{\mathbf{Y}(x)\,|\,x\in\Omega\}$ 时，就有 $J(\mathfrak{S})=I(\mathbf{Y})$.

如果 F 满足(15.115)，我们就称形如(15.116)的泛函为参数泛函. 泛函 J 称为椭圆的，如果 F 在 $\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3-\{0\})$ 上是 C^2 的，

且如果凸性条件

$$D_{q_iq_j}F(X,\ q)\xi_i\xi_j\geqslant|q|^{-1}|\xi'|^2, \tag{15.117}$$

$$\xi'=\xi-\left(\xi\cdot\frac{q}{|q|}\right)\frac{q}{|q|},$$

对所有 $X\in\mathbb{R}^3$, $q\in\mathbb{R}^3-\{0\}$ 及 $\xi\in\mathbb{R}^3$ 成立. 由齐性条件(15.115)我们看到, 除一个纯量因子外, (15.117)是 F 的可能凸性条件中最强的.

如果我们现在研究由

$$\mathfrak{S}=\{(x,\ u(x))\in\mathbb{R}^3|x\in\Omega\}$$

给出的一个非参数曲面 $\mathfrak{S}$, 这里 $u\in C^2(\overline{\Omega})$, 取 $\boldsymbol{\nu}$ 是单位下法向 $(Du,\ -1)/\sqrt{1+|Du|^2}$, 那么, 我们有

$$J(\mathfrak{S})=\int_\Omega F(x,\ u(x),\ Du(x),\ -1)dx.$$

注意, 我们在这里用到了关系式 $dA=\sqrt{1+|Du|^2}dx$. 右边的表达式可看作一个对任何 $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 定义的非参数泛函. 关于这个非参数泛函的 Euler-Lagrange 方程是

$$\sum_{i=1}^2 D_i[D_{q_i}F(x,\ u,\ Du,\ -1)]-D_{X_3}F(x,\ u,\ Du,\ -1)=0.$$

利用链式法则和齐性条件(15.115), 容易验证这个方程可写成形式

$$Qu=a^{ij}(x,\ u,\ Du)D_{ij}u+b(x,\ u,\ Du)=0,$$

这里,

$$a^{ij}(x,\ u,\ Du)=vD_{q_iq_j}F(x,\ u,\ Du,\ -1),\quad i,\ j=1,\ 2, \tag{15.118}$$

$$b(x,\ u,\ Du)=v\sum_{i=1}^3 D_{q_iX_i}F(x,\ u,\ Du,\ -1), \tag{15.119}$$

其中, $v=\sqrt{1+|Du|^2}$. 利用 (15.115), (15.117) 不难验证 (15.64), (15.65) 对依赖于 F 的常数 γ 和 μ 是成立的. 也就是说, 关于椭圆参数泛函的非参数 Euler-Lagrange 方程是一个平均曲率型的方程.

最后, 我们要指出, 从现在的角度来看, 15.7 节中引入的函数 a_*^{ij}, b_* 有一个自然的解释. 事实上, 当 a^{ij}, b 由(15.118), (15.119)

给出的情况下，容易验明 a_*^{ij}, b_* 可用下式给出：

$$a_*^{ij}(X, \nu) = D_{q_iq_j}F(X, \nu), \quad i, j=1, 2, 3,$$

$$b_*(X, \nu) = \sum_{i=1}^{3} D_{q_iX_i}F(X, \nu);$$

此外，若 $F \in C^3(\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 - \{0\}))$，则对于用 F 确定的 μ_1, μ_2 来说，条件(15.103)是自动成立的.

评注

关于极小曲面方程的梯度内估计(定理 15.5)，在两个变量的情形是由 Finn[FN2] 发现的，而一般情况是由 Bombieri, De Giorgi 及 Miranda[BDM]解决的. 一般的规定了平均曲率的方程(15.1) 的梯度内估计是由 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva[LU6]最先建立的. [BDM]和[LU6]这两篇文章的方法取决于 Federer 和 Fleming (见 [FE]) 的等周不等式和所得的一个 Sobolev 不等式(见[MD1]和[LU6]). 我们对定理 15.5 的推导，以及在 15.1 中有关的预备材料，取自 Michael 和 Simon 的 [MSI] 和 Trudinger 的[TR 6, 8]. 使用类似于经典位势理论的方法这个关键想法是受 Michael 对[MD1]中的 Sobolev 不等式的一个简化(未发表)以及后来在[MS1]和[TR 6, 8] 中的运用所启发. 分部积分公式(引理 15.1)是属于 Morrey[MY 3] 的. 平均值不等式(引理 15.2)是属于 Michael 和 Simon[MSI] 的，它的推广(引理 15.3)本质上是在[TR 8] 中给出的. Morrey 估计对超曲面的推广(引理 15.4)是在 [SI 4] 中给出的. 15.2 节中的方法(用它我们从位势型不等式(引理 15.3)得到了梯度内估计)，摘引自[TR 6, 8].

关于光滑边界数据情况下的存在定理 15.9 和 15.11 是 Serrin [SE 4] 建立的. 定理 15.10 本质上出自 Giaquinta [GI]. 注意 15.3 节的结果可以用 10.6 节中所述的变分方法得到. 近年来，与此关联的变分问题已在有界变差函数空间中加以研究 (例如见 [BG 2], [GE], [GI], [MD5]). 规定了平均曲率的方程的进一步研究见[TE].

在 15.4 节中平均曲率型方程的论述是根据 [SI 4, 6]. 二维平均曲率型方程的开拓性工作是 Finn[FN 1, 2] 给出的，他处理的是 $a^{ij}(x, z, p)\equiv a^{ij}(p)$, $b\equiv 0$ 的情况. Finn 称他处理的方程是"极小曲面型方程"，且对系数矩阵提出了与(15.64)稍许不同(然而是等价)的结构条件. 第一个梯度估计是在 [FN 1, 2] 中得到的. 对于比 [FN 2] 中所研究的方程更特殊的方程类(事实上，是一个形如(15.63)的方程，$b\equiv 0$，而 a^{ij} 如同在(15.118)中一样，是对适合 $F(X, p)\equiv F(0, p)$ 的某个 F 给出的)的更精细的结果(包括一个类似于定理 15.21 的不等式)是 Jenkins 和 Serrin [JS 1] 得到的. 不等式(15.112)似乎是新的. 类似于定理 15.20 中的一个曲率估计最初是由 Heinz [HE 1] 对极小曲面方程得到的，尔后为 E. Hopf [HO 4] 和 R. Osserman [OR 1] 所加强. Jenkins [JE] 及 Jenkins-Serrin [JS 1] 对形如(15.63)型的方程(其中 $b\equiv 0$，而 a^{ij} 有形式(15.118)，其中 $F(X, p)\equiv F(0, p)$)得到了类似的曲率估计. 在 [HO 4], [OR 1], [JE] 及 [JS 1] 中的估计事实上得到的是更强的形式

(15.120) $$(1+|Du(y)|^2)(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)(y)\leqslant C/R^2.$$

对于在 [JE] 和 [JS 1] 中所处理的特殊方程类，正如在 [SI 4] 中所表明的，第 4 节到第 7 节中的方法可加以改进，使之也给出形如(15.120)的不等式. 在 $b\neq 0$ 的情况下，容易证明类似于(15.120)的估计一般是不成立的. 在 $b\neq 0$ 时，就作者所知，在这里和在 [SI 4] 中得到的那些结果之前，唯有的曲率估计是 Spruck [SP] 对常平均曲率方程得到的结果. 也应当提及在 [OR 1], [JE], [JS 1] 和 [SI 6] 中对特殊的参数曲面类所得到的结果.

推论 15.19 的一般的 Bernstein 型的结果解决了 Osserman [OR 2] 第 137 页上提出的一个问题；这样的结果在极小曲面方程的情况下是众所周知的(且存在多种证明)(例如见 [NT])；对于在 [JE] 中处理过的方程类，Jenkins 用在(15.120)中令 $R\to\infty$ 的方法也得到这样的结果. 极小曲面方程的 Bernstein 定理能否搬到 $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$ 上去的问题，给高维极小曲面的研究提供了巨大的动力.

Simons[SM]利用 Fleming[FL]和 De Giorgi[DG 2]的某些思想，终于证明在 $n\leqslant 7$ 的情形答案是肯定的. Bombieri, De Giorgi 及 Giusti 在[BDG]中证明，在 $n>7$ 的情形，答案是否定的. 当 $n\leqslant 7$ 时，L. Simon[SI 5]证明，在定理 15.20 中所建立的那种类型的曲率估计对于极小曲面方程也成立，而这就推出了 $n\leqslant 7$ 时的 Bernstein 定理.

关于二维极小曲面的一个详尽叙述，读者可查阅书[NT].

习　　题

15.1. 证明：在引理 15.2 推导中的函数 χ，选择时如用某数 $\alpha<n$ 代替 n，那么得到的不是(15.27)和(15.40)，而是关系式：

$$(15.121)\quad \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\int_{\mathfrak{S}_R} r^{-\alpha} g\,dA+\frac{\alpha}{n}\int_{\mathfrak{S}_R} r^{-\alpha}(1-|\delta r|^2) g\,dA$$
$$=R^{-\alpha}\int_{\mathfrak{S}_R} g\,dA+\int_{\mathfrak{S}_R}(r^{-\alpha}-R^{-\alpha}) gH\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)\,dA$$
$$-\frac{1}{n}\int_{\mathfrak{S}_R}(r^{-\alpha}-R^{-\alpha})(x-y)\cdot\delta g\,dA,\quad g\in C^1(\mathscr{U}).$$

$$(15.122)\quad \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\int_{\mathfrak{S}} r^{-\alpha} g\,dA+\frac{\alpha}{n}\int_{\mathfrak{S}} r^{-\alpha}(1-|\delta r|^2) g\,dA$$
$$=\int_{\mathfrak{S}} r^{-\alpha} gH\boldsymbol{\nu}\cdot(x-y)\,dA-\frac{1}{n}\int_{\mathfrak{S}} r^{-\alpha}(x-y)\cdot\delta g\,dA, g\in C^1(\mathscr{U}).$$

15.2. 利用(15.40)和(15.121)对 $g\in C_0^1(\mathscr{U})$ 导出下述 Sobolev 不等式：对 $p<n/(n-1)$，$H\equiv 0$ 有

$$(15.123)\quad \left[\int_{\mathfrak{S}}|g|^p dA\right]^{1/p}\leqslant C(n,p)(\operatorname{diam}\mathscr{U})^{1-n}[A(\mathfrak{S})]^{1/p}\int_{\mathfrak{S}}|\delta g|\,dA,$$

这里 $C(n,p)=\dfrac{1}{n\omega_n}\left[\dfrac{n}{n-(n-1)p}\right]^{1/p}$；对 $n=2$ 有

$$(15.124)\quad \left[\int_{\mathfrak{S}}|g|^2 dA\right]^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathfrak{S}}(|\delta g|+|Hg|)\,dA$$

(注意，在[MSI]中(15.123)是对 $p=\dfrac{n}{n-1}$ 建立的).

15.3. 设 g 是 C^2 超曲面 $\mathfrak{S}\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 上的一个非负下调和函数. 导出平均值不等式(15.21)的下述推广：

$$g(y)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}\displaystyle\int_{\mathfrak{S}_R} g\,dA+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{S}_R} gH^2\,dA, & n=2.\\ \dfrac{1+C(n)[H_0R+(H_0R)^n]}{\omega_n R^n}\displaystyle\int_{\mathfrak{S}_R} g\,dA, & n>2,\ H_0=\sup_{\mathfrak{S}}|H|.\end{cases}$$

15.4. 利用推论 15.6 和 Harnack 不等式(定理 8.28)，证明：如果极小曲面方程在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个解被一个线性函数从上界定，则这个解本身必是线性的.

15.5. 导出在定理 15.21 的证明中用到的不等式

$$\inf_{B^+_{\chi R}(y)} |Du| \leqslant \chi^{-1} m_R / R.$$

15.6. 利用(15.60)证明在定理 15.5 和推论 15.6 中的常数 C_1 和 C_2 仅须依赖于 n 和 $d^2 H_1$.

15.7. 采用第 2 章所述的 Perron 方法，证明条件(15.60)对于保证规定了平均曲率的方程：$\mathfrak{M}u = H(1+|Du|^2)^{3/2}$ 在区域 Ω 中存在一个古典解是充分的. 证明当 $\varepsilon_0 = 0$ 时条件(15.60)对于古典解的存在性是必要的.

附　录

边界曲率和距离函数

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域，其边界 $\partial\Omega$ 非空．**距离函数** d 定义为

$$d(x)=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega). \tag{A1}$$

易证 d 是一致 Lipschitz 连续的．设 $x,y\in\mathbf{R}^n$，选择 $z\in\partial\Omega$，使 $|y-z|=d(y)$．则

$$d(x)\leqslant|x-z|\leqslant|x-y|+d(y),$$

所以，交换 x 和 y，我们有

$$|d(x)-d(y)|\leqslant|x-y|. \tag{A2}$$

设 $\partial\Omega\in C^2$．对于 $y\in\partial\Omega$，令 $\boldsymbol{\nu}(y)$ 和 $T(y)$ 分别表示 $\partial\Omega$ 上 y 点处的单位内法向和超切平面．$\partial\Omega$ 在固定点 $y_0\in\partial\Omega$ 处的曲率确定如下：通过坐标的旋转，可设坐标轴 x_n 位于 $\boldsymbol{\nu}(y_0)$ 的方向．于是在 y_0 的某个邻域 $\mathscr{N}=\mathscr{N}(y_0)$ 中，$\partial\Omega$ 由 $x_n=\varphi(x')$ 给出，其中 $x'=(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})$，$\varphi\in C^2(T(y_0)\cap\mathscr{N})$ 以及 $D\varphi(y_0')=0$．因此 $\partial\Omega$ 在 y_0 处的曲率可以用在 y_0' 处的 Hesse 矩阵 $[D^2\varphi]$ 的正交不变量来描述．$[D^2\varphi(y_0)]$ 的特征值 $\varkappa_1,\ \cdots,\ \varkappa_{n-1}$ 就称为 $\partial\Omega$ 在 y_0 处的**主曲率**，对应的特征向量称为 $\partial\Omega$ 在 y_0 处的**主方向**．$\partial\Omega$ 在 y_0 处的**平均曲率**由下式给出：

$$H(y_0)=\frac{1}{n-1}\sum\varkappa_i=\frac{1}{n-1}\,\Delta\varphi(y_0'). \tag{A3}$$

再通过一次坐标旋转，我们可假设 $x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}$ 轴位于 y_0 处 $\varkappa_1,\ \cdots,\ \varkappa_{n-1}$ 所对应的主方向上．我们把这样的坐标系称为 y_0 点的**主坐标系**．上面说到的 Hesse 矩阵 $[D^2\varphi(y_0')]$，在 y_0 点的主坐标系中，由下式给出：

$$[D^2\varphi(y_0')]=\operatorname{diag}[\varkappa_1,\ \cdots,\ \varkappa_{n-1}]. \tag{A4}$$

在点 $y=(y',\ \varphi(y'))\in\mathscr{N}\cap\partial\Omega$ 处的单位内法向 $\overline{\boldsymbol{\nu}}(y')=\overline{\boldsymbol{\nu}}(y)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\nu_i(y)&=\frac{-D_i\varphi(y')}{\sqrt{1+|D\varphi(y')|^2}},\quad i=1,\ \cdots,\ n-1\\ \nu_n(y)&=1/\sqrt{1+|D\varphi(y')|^2}.\end{aligned} \tag{A5}$$

因此，在点 y_0 处的主坐标系中，我们有

$$D_j\overline{\nu}_i(y_0')=\varkappa_i\delta_{ij},\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ n-1. \tag{A6}$$

对于 $\mu>0$，我们令 $\Gamma_\mu=\{x\in\overline{\Omega}\,|\,d(x)<\mu\}$．下面的引理阐明了 Γ_μ 中距

离函数 d 的光滑性与边界 $\partial\Omega$ 的光滑性之间的关系.

引理 1 设 Ω 是有界区域, $\partial\Omega\in C^k$, $k\geqslant 2$. 则存在一个依赖于 Ω 的正常数 μ, 使得 $d\in C^k(\Gamma_\mu)$.

证明 Ω 的条件蕴涵着 $\partial\Omega$ 满足一致内部球条件. 即对于每一点 $y_0\in\partial\Omega$, 存在一个依赖于 y_0 的球 B, 使得 $\bar{B}\cap(\mathbf{R}^n-\Omega)=y_0$, 球 B 的半径以某个正常数为下界, 我们取此下界为 μ. 容易明白, μ^{-1} 也是 $\partial\Omega$ 主曲率的界. 此外, 对于每一点 $x\in\Gamma_\mu$, 存在唯一的点 $y=y(x)\in\partial\Omega$, 使得 $|x-y|=d(x)$. 点 x 和 y 有关系

(A7) $$x=y+\boldsymbol{\nu}(y)d.$$

我们来说明, 方程 (A7) 确定了 y 和 d 是 x 的 C^{k-1} 函数. 对于一个固定点 $x_0\in\Gamma_\mu$, 令 $y_0=y(x_0)$, 并选择 y_0 处的一个主坐标系. 定义一个从 $\mathscr{U}=(T(y_0)\cap\mathscr{N}(y_0))\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中的映射 $\boldsymbol{g}=(g^1,\cdots,g^n)$ 为

$$\boldsymbol{g}(y',d)=y+\boldsymbol{\nu}(y)d,\quad y=(y',\varphi(y')).$$

显然 $\boldsymbol{g}\in C^{k-1}(\mathscr{U})$, $\boldsymbol{g}$ 在 $(y_0',d(x))$ 处的 Jacobi 矩阵由下式给出:

(A8) $$[D\boldsymbol{g}]=\mathrm{diag}[1-\varkappa_1 d,\cdots,1-\varkappa_{n-1}d].$$

因为 $\boldsymbol{g}$ 在 $(y_0',d(x_0))$ 处的 Jacobi 行列式为

(A9) $$\det[D\boldsymbol{g}]=(1-\varkappa_1 d(x_0))\cdots(1-\varkappa_{n-1}d(x_0))>0,$$

(因为 $d(x_0)<\mu$), 由逆映射定理可知, 对于某个邻域 $\mathscr{M}=\mathscr{M}(x_0)$, 映射 y' 是属于 $C^{k-1}(\mathscr{M})$ 的. 由 (A7), 对于 $x\in\mathscr{M}$, 我们有 $Dd(x)=\boldsymbol{\nu}(y(x))=\boldsymbol{\nu}(y'(x))\in C^{k-1}(\mathscr{M})$. 因此 $d\in C^k(\mathscr{M})$, 于是 $d\in C^k(\Gamma_\mu)$. ∎

在接近边界 $\partial\Omega$ 的点处, d 的 Hesse 矩阵的表达式是引理 1 的证明的一个直接结果.

引理 2 设 Ω 和 μ 满足引理 1 的条件, 又设 $x_0\in\Gamma_\mu$, $y_0\in\partial\Omega$, 使得 $|x_0-y_0|=d(x_0)$. 那么, 用 y_0 处的主坐标系表示, 我们有

(A10) $$[D^2d(x_0)]=\mathrm{diag}\left[\frac{-\varkappa_1}{1-\varkappa_1 d},\cdots,\frac{-\varkappa_{n-1}}{1-\varkappa_{n-1}d},0\right].$$

证明 因为

$$Dd(x_0)=\boldsymbol{\nu}(y_0)=(0,0,\cdots,1).$$

我们有 $D_{in}(x_0)=0$, $i=1,\cdots,n$. 对于另外的导数 $(i,j=1,2,\cdots,n-1)$, 由 (A6) 和 (A8), 得到

$$D_{ij}d(x_0)=D_j\nu_i\circ y(x_0)=D_k\bar{\nu}_i(y_0)D_jy_k(x_0)=\begin{cases}\dfrac{-\varkappa_i}{1-\varkappa_i d}, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$ ∎

注意, 引理 2 的结论和几何上这样一个明显的命题等价: $\partial\Omega$ 在 y_0 处的主曲率圆和通过 x_0 的平行曲面在 x_0 处的主曲率圆是同心的.

平均曲率

现在我们来推导 C^2 超曲面 $\mathfrak{S}$ 的平均曲率公式，用 Ω 的已知表示式表出. 设 $y_0\in\mathfrak{S}$, $\mathscr{N}$ 是 y_0 的一个邻域，$\mathfrak{S}$ 由 $\psi(x)=0$ 给出，这里 $\psi\in C^2(\mathscr{N})$，并且在 $\mathscr{N}$ 中 $|D\psi|>0$. 在点 $y\in\mathfrak{S}\cap\mathscr{N}$ 处，$\mathfrak{S}$ 的单位法向量(指向 ψ 的正方向)由下式给出:

(A11)
$$\boldsymbol{\nu}=\frac{D\psi}{|D\psi|}.$$

令 $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_{n-1}$ 是 $\mathfrak{S}$ 在 y_0 处的主曲率. 于是在 y_0 处的主坐标系中，可以证明:

(A12)
$$D_i\left(\frac{D_j\psi}{|D\psi|}\right)=-\varkappa_i\delta_{ij},\quad i, j=1,\cdots, n-1,$$
$$D_i\left(\frac{D_n\psi}{|D\psi|}\right)=0,\quad i=1, \cdots, n.$$

因此在 y_0 处，矩阵 $[D_j(D_i\psi/|D\psi|)]$ 关于原始坐标的特征值便是 $-\varkappa_1, \cdots, -\varkappa_{n-1}, 0$，因而 $\mathfrak{S}$ 在 y_0 处的平均曲率由下式给出:

(A13)
$$H(y_0)=\frac{-1}{n-1}\left(D_i\left[\frac{D_i\psi}{\sqrt{1+|D\psi|^2}}\right]\right)_{x=y_0}.$$

特别，如果 $\mathfrak{S}$ 是 n 个变量的函数 $u\in C^2(\Omega)$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的图象，即 $\mathfrak{S}$ 由 $x_{n+1}=u(x_1, \cdots, x_n)$ 定义，那么 $\mathfrak{S}$ 在点 $x_0\in\Omega$ 处的平均曲率为

(A14)
$$H(x_0)=\frac{1}{n}\left(D_i\left[\frac{D_iu}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right]\right)_{x=x_0}.$$

如果对所有的 $x_0\in\Omega$，有 $H(x_0)=0$，那么 $\mathfrak{S}$ 就称为**极小曲面**.

注意，我们从 (A12) 还可以得到下面这个在 x_0 处的主曲率的平方和公式:

(A15)
$$\mathscr{C}^2=\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i^2(x_0)=\sum_{i,j=1}^{n}D_i\nu_jD_j\nu_i(x_0),$$

其中:
$$\nu_i=\frac{D_iu}{\sqrt{1+|Du|^2}},\quad i=1, \cdots, n.$$

参考书目

Adams, R. A.

[AD] Sobolev Spaces. New York: Academic Press 1975.

Agmon, S.

[AG] Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Princeton, N. J.: Van Nostrand 1965.

Agmon, S., A. Douglis and L. Nirenberg

[ADN 1] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. Comm. Pure Appl. Math. **12**, 623–727 (1959).

[ADN 2] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math. **17**, 35–92 (1964).

Aleksandrov, A. D.

[AL 1] Majorization of solutions of second-order linear equations. Vestnik Leningrad. Univ. **21**, no. 1, 5–25 (1966) [Russian]. English Translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) **68**, 120–143 (1968).

[AL 2] Majorants of solutions and uniqueness conditions for elliptic equations. Vestnik Leningrad. Univ. **21**, no. 7, 5–20 (1966). English Translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) **68**, 144–161 (1968).

Allard, W.

[AA] On the first variation of a varifold. Ann. of Math. (2) **95**, 417–491 (1972)

Almgren, F. J.

[AM] Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. Ann. of Math. (2) **84**, 277–292 (1966).

Bakel'man, I. YA.

[BA 1] Mean curvature and quasilinear elliptic equations. Sibirsk. Mat. Ž. **9**, 1014–1040 (1968) [Russian]. English Translation in Siberian Math. J. **9**, 752–771 (1968).

[BA 2] Geometric problems in quasilinear elliptic equations. Uspehi Mat. Nauk **25**, no. 3, 49–112 (1970) [Russian]. English Translation in Russian Math. Surveys **25**, no. 3, 45–109 (1970).

Bernstein, S.

[BE 1] Sur la généralisation du problème de Dirichlet. I. Math. Ann. **62**, 253–271 (1906).

[BE 2] Méthode générale pour la résolution du problème de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris **144**, 1025–1027 (1907).

[BE 3] Sur la généralisation du problème de Dirichlet II. Math. Ann. **69**, 82–136 (1910).

[BE 4] Conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité du problème de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris **150**, 514–515 (1910).

[BE 5] Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne et totale. Ann. Sci. École Norm. Sup. **27**, 233–256 (1910).

[BE 6] Sur les équations du calcul des variations. Ann. Sci. École Norm. Sup. **29**, 431–485 (1912).

Bers, L., and L. Nirenberg

[BN] On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane. In: Convegno Internazionale sulle Equazioni Lineari alle Derivate Parziali, Trieste, pp. 141–167. Rome: Edizioni Cremonese 1955.

Bers, L., and M. Schechter

[BS] Elliptic equations. In: Partial Differential Equations, pp. 131–299. New York: Interscience 1964.

Bliss, G. A.

[BL] An integral inequality. J. London Math. Soc. **5**, 40–46 (1930).

Bohl, P.
[BO] Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. J. Reine Angew. Math. **127**, 179–276 (1904).

Bombieri, E.
[BM] Variational problems and elliptic equations. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver 1974, Vol. 1, 53–63. Vancouver: Canadian Mathematical Congress 1975.

Bombieri, E., E. De Giorgi and E. Giusti
[BDG] Minimal cones and the Bernstein problem. Invent. Math. **7**, 243–268 (1969).

Bombieri, E., E. De Giorgi and M. Miranda
[BDM] Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche. Arch. Rational Mech. Anal. **32**, 255–267 (1969).

Bombieri, E., and E. Giusti
[BG 1] Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces. Invent. Math. **15**, 24–46 (1972).
[BG 2] Local estimates for the gradient of non-parametric surfaces of prescribed mean curvature. Comm. Pure Appl. Math. **26**, 381–394 (1973).

Bouligand, G., G. Giraud and P. Delens
[BGD] Le problème de la derivée oblique en théorie du potentiel. Actualités Scientifiques et Industrielles 219. Paris: Hermann 1935.

Brandt, A
[BR 1] Interior estimates for second-order elliptic differential (or finite-difference) equations via the maximum principle. Israel J. Math. **7**, 95–121 (1969).
[BR 2] Interior Schauder estimates for parabolic differential- (or difference-) equations via the maximum principle. Israel J. Math. **7**, 254–262 (1969).

Browder, F. E.
[BW 1] Strongly elliptic systems of differential equations. In: Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, pp. 15–51. Princeton, N.J.: Princeton University Press 1954.
[BW 2] *Problèmes non-linéaires.* Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 15 (Été, 1965). Montreal, Que.: Les Presses de l'Université de Montreal 1966.
[BW 3] Existence theorems for nonlinear partial differential equations. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XVI; pp. 1–60. Providence, R.I.: American Mathematical Society 1970.

Caccioppoli, R.
[CA 1] Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) **19**, 83–89 (1934).
[CA 2] Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di calcolo delle variazioni. I. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) **22**, 305–310 (1935).
[CA 3] Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di calcolo delle variazioni. II. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) **22**, 376–379 (1935).
[CA 4] Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazione lineare ellittica a derivate parziali. Giorn. Mat. Battaglini (4) **4** (80), 186–212 (1951).

Calderon, A. P., and A. Zygmund
[CZ] On the existence of certain singular integrals. Acta Math. **88**, 85–139 (1952).

Campanato, S.
[CM 1] Proprietà di inclusione per spazi di Morrey. Ricerche Mat. **12**, 67–86 (1963).
[CM 2] Equazioni ellittiche *del II° ordine e spazi* $\mathscr{L}^{(2,\lambda)}$. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **69**, 321–381 (1965).

Chicco, M.
[CI 1] Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **22**, 368–372 (1967).
[CI 2] Semicontinuità delle sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale. Boll. Un. Mat. Ital. (4) **1**, 548–553 (1968).
[CI 3] Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale. Boll. Un. Mat. Ital. (4) **3**, 384–394 (1970).

[CI 4] Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations. Boll. Un. Mat. Ital. (4) 4, 374–387 (1971).
[CI 5] Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti continui. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 88, 123–133 (1971).

Cordes, H. O.
[CO 1] Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen. Math. Ann. 131, 278–312 (1956).
[CO 2] Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume IV, pp. 157–166. Providence, R.I.: American Mathematical Society 1961.

Courant, R., and D. Hilbert
[CH] Methods of Mathematical Physics. Volume II. New York: Interscience 1962.

De Giorgi, E.
[DG 1] Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (3) 3, 25–43 (1957).
[DG 2] Una estensione del teorema di Bernstein. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 19, 79–85 (1965).

Douglas, J., T. Dupont and J. Serrin
[DDS] Uniqueness and comparison theorems for nonlinear elliptic equations in divergence form. Arch. Rational Mech. Anal. 42, 157–168 (1971).

Douglis, A. and L. Nirenberg
[DN] Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 8, 503–538 (1955).

Dunford, N., and J. T. Schwartz
[DS] Linear Operators, Part I. New York: Interscience 1958.

Edmunds, D. E.
[ED] Quasilinear second order elliptic and parabolic equations. Bull. London Math. Soc. 2, 5–28 (1970).

Edwards, R. E.
[EW] Functional Analysis: Theory and Applications. New York: Holt, Rinehart and Winston 1965.

Egorov, Yu. V., and V. A. Kondrat'ev
[EK] The oblique derivative problem. Mat. Sb. (N.S.) 78 (120), 148–176 (1969) [Russian]. English Translation in Math USSR Sb. 7, 139–169 (1969).

Federer, H.
[FE] Geometric Measure Theory. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1969.

Finn, R.
[FN 1] A property of minimal surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39, 197–201 (1953).
[FN 2] On equations of minimal surface type. Ann. of Math. (2) 60, 397–416 (1954).
[FN 3] New estimates for equations of minimal surface type. Arch. Rational Mech. Anal. 14, 337–375 (1963).
[FN 4] Remarks relevant to minimal surfaces, and to surfaces of prescribed mean curvature. J. Analyse Math. 14, 139–160 (1965).

Finn, R., and D. Gilbarg
[FG 1] Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows. Comm. Pure Appl. Math. 10, 23–63 (1957).
[FG 2] Three-dimensional subsonic flows, and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations. Acta Math. 98, 265–296 (1957).

Finn, R., and J. Serrin
[FS] On the Hölder continuity of quasi-conformal and elliptic mappings. Trans. Amer. Math. Soc. 89, 1–15 (1958).

Fiorenza, R.
[FI 1] Sui problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche. Ricerche Mat. 8, 83–110 (1959).
[FI 2] Sui problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche quasi lineari. Ricerche Mat. 15, 74–108 (1966).

Fleming, W.
[FL] On the oriented Plateau problem. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 11, 69–90 (1962).

Friedman, A.
[FR] Partial Differential Equations. New York: Academic Press 1969.

Friedrichs, K. O.
[FD 1] The identity of weak and strong extensions of differential operators. Trans. Amer. Math. Soc. 55, 132–151 (1944).
[FD 2] On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 6, 299–326 (1953).

Gårding, L.
[GA] Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Math. Scand. 1, 55–72 (1953).

Gariepy, R., and W. P. Ziemer
[GZ] Behaviour at the boundary of solutions of quasilinear elliptic equations. Arch. Rational Mech. Anal. 56, 372–384 (1972).

Gerhardt, C.
[GE] Existence, regularity, and boundary behaviour of generalized surfaces of prescribed mean curvature. Math. Z. 139, 173–198 (1974).

Giaquinta, M.
[GI] On the Dirichlet problem for surfaces of prescribed mean curvature. Manuscripta Math. 12, 73–86 (1974).

Gilbarg, D.
[GL 1] Some local properties of elliptic equations. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume IV, pp. 127–141. Providence, R.I.: American Mathematical Society 1961.
[GL 2] Boundary value problems for nonlinear elliptic equations in n variables. In: Nonlinear Problems, pp. 151–159. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press 1963.

Gilbarg, D., and J. Serrin
[GS] On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations. J. Analyse Math. 4, 309–340 (1955/56).

Giraud, G.
[GR 1] Sur le problème de Dirichlet généralisé (deuxième mémoire). Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 46, 131–245 (1929).
[GR 2] Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptiques. Bull. Sci. Math. (2) 56, 248–272, 281–312, 316–352 (1932).
[GR 3] Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 49, 1–104, 245–309 (1932).

Giusti, E.
[GT 1] Superfici cartesiane di area minima. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 40, 3–21 (1970).
[GT 2] Boundary value problems for non-parametric surfaces of prescribed mean curvature. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 3, 501–548 (1976).

Greco, D.
[GC] Nuove formole integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale. Ricerche Mat. 5, 126–149 (1956).

Günter, N. M.
[GU] Potential Theory and its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics. New York: Frederick Ungar Publishing Co. 1967.

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood
[HL] Some properties of fractional integrals. I. Math. Z. 27, 565–606 (1928).

Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Polya
[HLP] Inequalities. 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press 1952.

Hartman, P.
[HA] On the bounded slope condition. Pacific J. Math. 18, 495–511 (1966).

Hartman, P. and L. Nirenberg
[HN] On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. Amer. J. Math. 81, 901–920 (1959).

Hartman, P., and G. Stampacchia
[HS] On some non-linear elliptic differential-functional equations. Acta Math. 115, 271–310 (1966).

Heinz, E.
[HE 1] Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. IIa, 51–56 (1952).
[HE 2] Interior gradient estimates for surfaces $z = f(x, y)$ with prescribed mean curvature. J. Differential Geometry 5, 149–157 (1971).

Hervé, R.-M.
[HR] Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 12, 415–571 (1962).

Hervé, R.-M., and M. Hervé
[HH] Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19, fasc. 1, 305–359 (1969).

Hilbert, D.
[HI] Über das Dirichletsche Prinzip. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 8, 184–188 (1900).

Hildebrandt, S.
[HD] Maximum principles for minimal surfaces and for surfaces of continuous mean curvature. Math. Z. 128, 253–269 (1972).

Hopf, E.
[HO 1] Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wissensch. Berlin, Math.-Phys. Kl. 19, 147–152 (1927).
[HO 2] Zum analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme. Math. Z. 30, 404–413 (1929).
[HO 3] Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. 34, 194–233 (1932).
[HO 4] On S. Bernstein's theorem on surfaces $z(x, y)$ of nonpositive curvature. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 80–85 (1950).
[HO 5] A remark on linear elliptic differential equations of second order. Proc. Amer. Math. Soc. 3, 791–793 (1952).
[HO 6] On an inequality for minimal surfaces $z = z(x, y)$. J. Rational Mech. Anal. 2, 519–522 (1953).

Hörmander, L.
[HM 1] Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. Ann. of Math. (2) 83, 129–209 (1966).
[HM 2] The boundary problems of physical geodesy. Arch. Rational Mech. Anal. 62, 1–52 (1976).

Ivanov, A. V.
[IV 1] Interior estimates of the first derivatives of the solutions of quasi-linear nonuniformly elliptic and nonuniformly parabolic equations of general form. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 14, 24–47 (1969) [Russian]. English Translation in Sem. Math. V. A. Steklov Math. Inst. Leningrad 14, 9–21 (1971).
[IV 2] The Dirichlet problem for second-order quasi-linear nonuniformly elliptic equations. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 19, 79–94 (1970) [Russian]. English Translation in Sem. Math. V. A. Steklov Math. Inst. Leningrad 19, 43–52 (1972).

Ivočkina, N. M., and A. P. Oskolkov
[IO] Nonlocal estimates for the first derivatives of solutions of the first boundary problem for certain classes of nonuniformly elliptic and nonuniformly parabolic equations and systems. Trudy Mat. Inst. Steklov 110, 65–101 (1970) [Russian]. English Translation in Proc. Steklov Inst. Math. 110, 72–115 (1970).

Jenkins, H.
[JE] On 2-dimensional variational problems in parametric form. Arch. Rational Mech. Anal. 8, 181–206 (1961).

Jenkins, H., and J. Serrin
[JS 1] Variational problems of minimal surface type I. Arch. Rational Mech. Anal. 12, 185–212 (1963).
[JS 2] The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions. J. Reine Angew. Math. 229, 170–187 (1968).

John, F., and L. Nirenberg
[JN] On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14, 415–426 (1961).

Kellogg, O. D.
[KE 1] On the derivatives of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 486–510 (1931).
[KE 2] Foundations of Potential Theory. New York: Dover 1954.

Kondrachov, V. I.
[KN] Sur certaines propriétés des fonctions dans l'espace L^p. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) 48, 535–538 (1945).

Korn, A.
[KR 1] Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen. Abhandl. Königl. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1909; Anhang, Abh. 2.
[KR 2] Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen. Schwarz Festschrift, Berlin 1914, 215–229.

Košelev, A. E.
[KO] On boundedness in L^p of derivatives of solutions of elliptic differential equations. Mat. Sb. (N. S.) 38 (80), 359–372 (1956) [Russian].

Ladyzhenskaya, O. A.
[LA] Solution of the first boundary problem in the large for quasi-linear parabolic equations. Trudy Moskov. Mat. Obšč. 7, 149–177 (1958) [Russian].

Ladyzhenskaya, O. A., and N. N. Ural'tseva
[LU 1] On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems. Comm. Pure Appl. Math. 14, 481–495 (1961).
[LU 2] Quasilinear elliptic equations and variational problems with several independent variables. Uspehi Mat. Nauk 16, no. 1, 19–90 (1961) [Russian]. English Translation in Russian Math. Surveys 16, no. 1, 17–92 (1961).
[LU 3] On Hölder continuity of solutions and their derivatives of linear and quasilinear elliptic and parabolic equations. Trudy Mat. Inst. Steklov. 73, 172–220 (1964) [Russian]. English Translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 61, 207–269 (1967).
[LU 4] Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Moscow: Izdat. "Nauka" 1964 [Russian]. English Translation: New York: Academic Press 1968. 2nd Russian ed. 1973.
[LU 5] Global estimates of the first derivatives of the solutions of quasi-linear elliptic and parabolic equations. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 14, 127–155 (1969) [Russian]. English Translation in Sem. Math. V. A. Steklov Math. Inst. Leningrad 14, 63–77 (1971).
[LU 6] Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math. 23, 677–703 (1970).

Landis, E. M.
[LN] Harnack's inequality for second order elliptic equations of Cordes type. Dokl. Akad. Nauk SSSR 179, 1272–1275 (1968) [Russian]. English Translation in Soviet Math. Dokl. 9, 540–543 (1968).

Lax, P. D.
[LX] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations. Comm. Pure Appl. Maths. 8, 615–633 (1955).

Lax, P. D., and A. M. Milgram
[LM] Parabolic equations. In: Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, pp. 167–190. Princeton, N.J.: Princeton University Press 1954.

Lebesgue, H.
[LE] Sur le problème de Dirichlet. Rend. Circ. Mat. Palermo 24, 371–402 (1907).

Leray, J.
[LR] Discussion d'un problème de Dirichlet. J. Math. Pures Appl. 18, 249–284 (1939).

Leray, J., et J.-L. Lions
[LL] Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. France 93, 97–107 (1965).

Leray, J., et J. Schauder
[LS] Topologie et équations fonctionelles. Ann. Sci. École Norm. Sup. 51, 45–78 (1934).

Lewy, H., and G. Stampacchia
[LST] On existence and smoothness of solutions of some noncoercive variational inequalities. Arch. Rational Mech. Anal. 41, 241–253 (1971).

Lichtenstein, L.
[LC] Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. In: Enc. d. Math. Wissensch. 2.3.2, 1277–1334 (1924). Leipzig: B. G. Teubner 1923–27.

Littman, W., G. Stampacchia and H. F. Weinberger
[LSW] Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **17**, 43–77 (1963).

Meyers, N. G.
[ME 1] An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **17**, 189–206 (1963).
[ME 2] An example of non-uniqueness in the theory of quasilinear elliptic equations of second order. Arch. Rational Mech. Anal. **14**, 177–179 (1963).

Meyers, N. G., and J. Serrin
[MS 1] The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations. J. Math. Mech. **9**, 513–538 (1960).
[MS 2] $H=W$. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51**, 1055–1056 (1964).

Michael, J. H.
[MI] A general theory for linear elliptic partial differential equations. J. Differential Equations **23**, 1–29 (1977).

Michael, J. H., and L. M. Simon
[MSI] Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of R^n. Comm. Pure Appl. Math. **26**, 361–379 (1973).

Miller, K.
[ML 1] Barriers on cones for uniformly elliptic operators. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **76**, 93–105 (1967).
[ML 2] Exceptional boundary points for the nondivergence equation which are regular for the Laplace equation and vice-versa. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22**, 315–330 (1968).
[ML 3] Extremal barriers on cones with Phragmèn-Lindelöf theorems and other applications. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **90**. 297–329 (1971).
[ML 4] Nonequivalence of regular boundary points for the Laplace and nondivergence equations, even with continuous coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **24**, 159–163 (1970).

Miranda, C.
[MR 1] Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39**, 279–303 (1955).
[MR 2] Partial Differential Equations of Elliptic Type. 2nd ed., Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970.

Miranda, M.
[MD 1] Diseguaglianze di Sobolev sulle ipersuperfici minimali. Rend. Sem. Math. Univ. Padova **38**, 69–79 (1967).
[MD 2] Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimale. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38**, 91–107 (1967).
[MD 3] Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38**, 238–257 (1967).
[MD 4] Un principio di massimo forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla risoluzione del problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **45**, 355–366 (1971).
[MD 5] Dirichlet problem with L^1 data for the non-homogeneous minimal surface equation. Indiana Univ. Math. J. **24**, 227–241 (1974).

Morrey, C. B., Jr.
[MY 1] On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126–166 (1938).
[MY 2] Functions of several variables and absolute continuity, II. Duke Math. J. **6**, 187–215 (1940).
[MY 3] Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. Univ. California Publ. Math. (N. S.) **1**, 1–130 (1943).
[MY 4] Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity. Math. Z. **72**, 146–164 (1959).

[MY 5] Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1966.

Moser, J.

[MJ 1] A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **13**, 457–468 (1960).

[MJ 2] On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **14**, 577–591 (1961).

Nash, J.

[NA] Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. **80**, 931–954 (1958).

Nečas, J.

[NE] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague: Éditeurs Academia 1967.

Neumann, J. von

[NU] Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **8**, 28–31 (1931).

Nirenberg, L.

[NI 1] On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure Appl. Math. **6**, 103–156 (1953).

[NI 2] Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 649–675 (1955).

[NI 3] On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **13**, 115–162 (1959).

[NI 4] Elementary remarks on surfaces with curvature of fixed sign. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume III, pp. 181–185. Providence, R.I.: American Mathematical Society 1961.

Nitsche, J. C. C.

[NT] Vorlesungen über Minimalflächen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1975.

Novrusov, A. A.

[NO] The modulus of continuity of the solution of the Dirichlet problem at a regular boundary point. Mat. Zametki **12**, 67–72 (1972) [Russian]. English translation in Math. Notes **12**, no. 1, 472–475 (1973).

Oddson, J. K.

[OD] On the boundary point principle for elliptic equations in the plane. Bull. Amer. Math. Soc. **74**, 666–670 (1968).

Oleinik, O. A.

[OL] On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type. Mat. Sb. (N. S.) **30**, 695–702 (1952) [Russian].

Oleinik, O. A., and Radkevich, E. V.

[OR] Second order equations with non-negative characteristic form. (Mathematical Analysis 1969). Moscow: Itogi Nauki 1971 [Russian]. English Translation: Providence, R.I., Amer. Math. Soc. 1973.

Oskolkov, A. P.

[OS 1] On the solution of a boundary value problem for linear elliptic equations in an unbounded domain. Vestnik Leningrad. Univ. **16**, no. 7, 38–50 (1961) [Russian].

[OS 2] A priori estimates of first derivatives of solutions of the Dirichlet problem for nonuniformly elliptic differential equations. Trudy Mat. Inst. Steklov **102**, 105–127 (1967) [Russian]. English Translation in Proc. Steklov Inst. Math. **102**, 119–144 (1967).

Osserman, R.

[OR 1] On the Gauss curvature of minimal surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. **96**, 115–128 (1960).

[OR 2] A Survey of Minimal Surfaces. New York: Van Nostrand 1969.

Pascali, D.

[PA] Operatori Neliniari. Bucharest: Editura Academiei Republicii Socialiste România 1974.

Perron, O.

[PE] Eine neue Behandlung der Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. Math. Z. **18**, 42–54 (1923).

Piccinini, L. C. and S. Spagnola

[PS] On the Hölder continuity of solutions of second order elliptic equations in two variables. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **26**, 391–402 (1972).

Protter, M. H., and H. F. Weinberger
[PW] Maximum Principles in Differential Equations. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1967.

Pucci, C.
[PU 1] Su una limitazione per soluzioni di equazioni ellittiche. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **21**, 228–233 (1966).
[PU 2] Operatori ellittici estremanti. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **72**, 141–170 (1966).
[PU 3] Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **74**, 15–30 (1966).

Radó, T.
[RA] Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. Acta Litt. Sci. Univ. Szeged **2**, 228–253 (1924–26).

Rellich, R.
[RE] Ein Satz über mittlere Konvergenz. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., 30–35 (1930).

Rodemich, E.
[RO] The Sobolev inequalities with best possible constants. In: Analysis Seminar at California Institute of Technology, 1966.

Royden, H. L.
[RY] Real Analysis. 2nd ed., London: Macmillan 1970.

Schaefer, H.
[SH] Über die Methode der a priori Schranken. Math. Ann. **129**, 415–416 (1955).

Schauder, J.
[SC 1] Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2**, 171–180 (1930).
[SC 2] Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Ann. **106**, 661–721 (1932).
[SC 3] Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen. Math. Z. **37**, 623–634, 768 (1933).
[SC 4] Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **38**, 257–282 (1934).
[SC 5] Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen. Studia Math. **5**, 34–42 (1935).

Serrin, J.
[SE 1] On the Harnack inequality for linear elliptic equations. J. Analyse Math. **4**, 292–308 (1955/56).
[SE 2] Local behavior of solutions of quasi-linear elliptic equations. Acta Math. **111**, 247–302 (1964).
[SE 3] The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **264**, 413–496 (1969).
[SE 4] Gradient estimates for solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations. In: Contributions to Nonlinear Functional Analysis, pp. 565–601. New York: Academic Press 1971.
[SE 5] Nonlinear elliptic equations of second order. Lecture notes (unpublished), Symposium on Partial Differential Equations at Berkeley, 1971.

Simon, L. M.
[SI 1] Global estimates of Hölder continuity for a class of divergence-form elliptic equations. Arch. Rational Mech. Anal. **56**, 253–272 (1974).
[SI 2] Boundary regularity for solutions of the non-parametric least area problem. Ann. of Math. **103**, 429–455 (1976).
[SI 3] Interior gradient bounds for non-uniformly elliptic equations. Indiana Univ. Math. J. **25**, 821–855 (1976).
[SI 4] Equations of mean curvature type in 2 independent variables. Pacific J. Math. (1977).
[SI 5] Remarks on curvature estimates for minimal hypersurfaces. Duke Math. J. **43**, 545–553 (1976).
[SI 6] A Hölder estimate for quasiconformal mappings between surfaces in Euclidean space, with application to graphs having quasiconformal Gauss map. Acta Math. (1977).

Simons, J.
[SM] Minimal varieties in riemannian manifolds. Ann. of Math. (2) **88**, 62–105 (1968).

Sobolev, S. L.
[SO 1] On a theorem of functional analysis. Mat. Sb. (N.S.) **4** (46), 471–497 (1938) [Russian]. English Translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) **34**, 39–68 (1963).
[SO 2] Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Leningrad: Izdat. Leningrad. Gos. Univ. 1950 [Russian]. English Translation: Translations of Mathematical Monographs, Vol. 7. Providence, R.I.: American Mathematical Society 1963.

Spruck, J.
[SP] Gauss curvature estimates for surfaces of constant mean curvature. Comm. Pure Appl. Math. **27**, 547–557 (1974).

Stampacchia, G.
[ST 1] Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **12**, 223–245 (1958).
[ST 2] I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. In: Atti VI Congr. Un. Mat. Ital. (Naples, 1959), pp. 21–44. Rome: Edizioni Cremonese 1960.
[ST 3] Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **51**, 1–37 (1960).
[ST 4] Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15**, fasc. 1, 189–258 (1965).
[ST 5] Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues. Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 16 (Été, 1965). Montreal, Que.: Les Presses de l'Université de Montréal 1966.

Sternberg, S.
[SB] Lectures on Differential Geometry. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1964.

Talenti, G.
[TA 1] Equazione lineari ellittiche in due variabili. Le Matematiche **21**, 339–376 (1966).
[TA 2] Best constant in Sobolev inequality. Ann. Mat. Pura Appl. **110**, 353–372 (1976).

Temam, R.
[TE] Solutions généralisées de certaines équations du type hypersurface minima. Arch. Rational Mech. Anal. **44**, 121–156 (1971).

Trudinger, N. S.
[TR 1] On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. **20**, 721–747 (1967).
[TR 2] On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. J. Math. Mech. **17**, 473–483 (1967).
[TR 3] Some existence theorems for quasi-linear, non-uniformly elliptic equations in divergence form. J. Math. Mech. **18**, 909–919 (1968/69).
[TR 4] On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations. Arch. Rational Mech. Anal. **42**, 50–62 (1971).
[TR 5] The boundary gradient estimate for quasilinear elliptic and parabolic differential equations. Indiana Univ. Math. J. **21**, 657–670 (1972).
[TR 6] A new proof of the interior gradient bound for the minimal surface equation in n dimensions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **69**, 821–823 (1972).
[TR 7] Linear elliptic operators with measurable coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **27**, 265–308 (1973).
[TR 8] Gradient estimates and mean curvature. Math. Z. **131**, 165–175 (1973).
[TR 9] A sharp inequality for subharmonic functions on two-dimensional manifolds. Math. Z. **133**, 75–79 (1973).
[TR 10] On the comparison principle for quasilinear divergence structure equations. Arch. Rational Mech. Anal. **57**, 128–133 (1974).
[TR 11] Maximum principles for linear, non-uniformly elliptic operators with measurable coefficients. Math. Z. (1977).

Ural'tseva, N.
[UR] The solvability of the capillarity problem. Vestnik Leningrad. Univ. no. **19**, 54–64 (1973) [Russian].

Wahl, W. von
[WA] Über quasilineare elliptische Differentialgleichungen in der Ebene. Manuscripta Math. **8**, 59–67 (1973).

Weinberger, H. F.
[WE] Symmetrization in uniformly elliptic problems. In: Studies in Mathematical Analysis and Related Topics, pp. 424–428. Stanford, Calif.: Stanford University Press 1962.

Widman, K.-O.
[WI 1] Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. Math. Scand. **21**, 17–37 (1967).
[WI 2] A quantitative form of the maximum principle for elliptic partial differential equations with coefficients in L_∞. Comm. Pure Appl. Math. **21**, 507–513 (1968).
[WI 3] On the Hölder continuity of solutions of elliptic partial differential equations in two variables with coefficients in L_∞. Comm. Pure Appl. Math. **22**, 669–682 (1969).

Williams, G. H.
[WL] Existence of solutions for nonlinear obstacle problems. Math. Z. **154**, 51–65 (1977).

Winzell, B.
[WN] Solutions of second order elliptic partial differential equations with prescribed directional derivative on the boundary. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations No. 003 (1975). Linköping University, Sweden.

Yosida, K.
[YO] Functional Analysis. 4th ed., Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1974.

内 容 索 引

一　划

三　划

四 划

五 划

六 划

七 划

八 划

九 划

十 划

十 一 划

十 二 划

十 三 划 以 上

记号索引

空间和它们的范数及拟范数

其它记号(也可参看第 10 页)